المستوى: الثالثة علوم تجريبية

الموسم الدراسي: 2013 - 2014

مواضيع بكالوريا تجريبيّة من إعداد الأستاذ ناعم محمّد

☜ الموضوع الأوّل

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النّقط $A(1;-2;4), B(-2;-6;5)$ ، $C(-4;0;-3)$

1. أ) بيّن أنّ النّقط A, B, C ليست في استقاميّة .

ب) بيّن انه تكون $M(x,y,z)$ من المستوي (ABC) إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان μ, λ بحيث :

$$\begin{cases} x = 1 - 3\lambda - 5\mu \\ y = -2 - 4\lambda + 2\mu \\ z = 4 + \lambda - 7\mu \end{cases}$$

جـ) استنتج معادلة ديكارتيّة للمستوي (ABC) .

2. أ) عيّن تمثيلا وسيطيّا للمستقيم (Δ) المار من النّقطة O و العمودي على المستوي (ABC)

ب) استنتج إحداثيات النّقطة O' المسقط العمودي للنّقطة O على المستوي (ABC) .

3. لتكن النّقطة H المسقط العمودي للنّقطة O على المستقيم (BC) ، وليكن t عددا حقيقيّا حيث : $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$

أ) بيّن أنّ : $t = \dfrac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{||\overrightarrow{BC}||^2}$ ، ثمّ استنتج قيمة t .

ب) عيّن احداثيات النّقطة H ؛ ثمّ استنتج المسافة بين النّقطة H و المستقيم (BC)

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

1) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النّقط A ، B و C ذات اللواحق على التّرتيب $z_A = 3$ ، $z_B = 5 - 2i$ ، $z_C = 5 + 2i$ ، و النّقطة M ذات اللاحقة z بحيث M تختلف عن A و B .

أ) بيّن أنّ المثلّث ABC قائم و متساوي السّاقين

ب) فسّر هندسيا طويلة و عمدة العدد المركّب Z' حيث : $Z' = \dfrac{z-3}{z-5+2i}$

جـ) عيّن المجموعة (E) للنّقط $M(z)$ حتى يكون العدد المركّب Z' حقيقيا سالبا تماما

2) لتكن (Γ) الدّائرة المحيطة بالمثلّث ABC و لتكن النّقطة Ω ذات اللاحقة $2 - i$

أ) عيّن لاحقة النّقطة w مركز الدائرة (Γ)

ب) عيّن العبارة المركّبة للدوران r الذي مركزه Ω و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

جـ) عيّن المعادلة الدّيكارتيّة للمجموعة (Γ') صورة الدّائرة (Γ) بالدّوران r

التمرين الثالث: (04 **نقاط**)

(u_n) متتاليّة عدديّة معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

1/ أ) في معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ ، أنشىء (C) التّمثيل البياني للدّالة f حيث $f : x \longmapsto \sqrt{x+2}$

و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$

ب) أنشىء على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء

جـ) ماهو تخمينك حول إتجاه تغيّر و تقارب المتتاليّة (u_n) ؟

2/ أ) بيّن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n \geq 2$

ب) بيّن أنّ (u_n) متناقصة . ماذا تستنتج ؟

جـ) بيّن أنّ النّهاية l للمتتاليّة (u_n) تحقق : $l \geq 2$ و $l = \sqrt{l+2}$

د) استنتج قيمة l

التمرين الرّابع: (07 **نقاط**)

I) نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\mathrm{g}(x) = -4 + (4-2x)e^x$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{g}(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{g}(x)$

2) أدرس إتجاه تغيّر الدّالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها

3) بيّن أنّ المعادلة $\mathrm{g}(x) = 0$ تقبل حلّين على $\mathbb{R}$ أحدهما معدوم و الآخر نرمز له بالرّمز α حيث : $1.59 < \alpha < 1.6$

4) استنتج إشارة $\mathrm{g}(x)$ على $\mathbb{R}$

II) نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{2x-2}{e^x - 2}$ ؛ $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ (وحدة الطّول $1cm$)

1. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ ثمّ فسّر النّتيجتين بيانيا

2. أ) بيّن أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = \frac{\mathrm{g}(x)}{(e^x - 2x)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f و شكّل جدول تغيّراتها

جـ) أثبت أنّ : $f(\alpha) = \frac{2-\alpha}{\alpha - 1}$ ؛ ثمّ عيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$

3. أ) عيّن نقاط تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع محوري الإحداثيات

ب) أحسب $f(-2)$ ، $f(-1), f(2)$ ثمّ أنشىء $(\mathscr{C}_f)$

III) لتكن F الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = -x + \ln(e^x - 2x)$

1/ بيّن أنّ F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ثمّ أحسب دالتها المشتقّة الأولى .

2/ استنتج مجموعة الدّوال الأصليّة للدّالة f على $\mathbb{R}$

3/ أحسب بالسّنتيمتر مربّع مساحة الحيّز المحدّد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيمات ذات المعادلات $x = 0$ ، $x = 2$ ، $y = 0$

☜ الموضوع الثّاني

التّمرين الأول: (04.5 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النّقط $A(1;1;0), B(2;0;-1)$ ،

$$C(0;3;-1), D(-1;4;0)$$

1) بيّن أنّ الرّباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

2) أ) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(1;2;3)$ ناظمي للمستوي (ABC)

ب) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3) أ) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي (AB) و يعامد (ABC)

ب) عيّن تمثيلا وسيطيّا المستقيم (Δ) المار من النّقطة $\Omega(-3;0;-2)$ و العمودي على (Q)

4) أ) أكتب معادلة ديكارتيّة لسطح الكرة (S) التي مركزها Ω و المماسّة لـ (ABC)

ب) أدرس تقاطع سطح الكرة (S) و المستقيم (CD)

التّمرين الثاني: (04.5 نقاط)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركّب z التّاليّة : $z^2+8\sqrt{3}z+64=0$

2. نعتبر المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ؛ A, B نقطتان لاحقتاهما على التّرتيب : $z_A=-4\sqrt{3}-4i, z_B=-4\sqrt{3}+4i$

- أحسب الأطوال OA ، OB ، AB ؛ ثمّ استنتج طبيعة المثلّث OAB

3. لتكن C النّقطة ذات اللاحقة $z_C=\sqrt{3}+i$ ، و النّقطة D صورتها بالدّوران الذي مركزه النّقطة O و زاويته $\frac{\pi}{3}$

أ) عيّن z_D لاحقة النّقطة D

4. لتكن G مرجح الجملة $\{(B;1),(D;1),(O;-1)\}$

أ) برهن أنّ لاحقة النّقطة G هي : $z_G=-4\sqrt{3}+6i$

ب) علّم النّقط A, B, C, D, G ، ثمّ بيّن أنّ الرّباعي $OBGD$ متوازي أضلاع

5. أ) بيّن أنّ : $\frac{z_C-z_G}{z_A-z_G}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب) استنتج قيسا بالرّاديان للزاويّة $(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GC})$ ؛ ثمّ أحسب قيمة النّسبة $\frac{GC}{GA}$

جـ) استنتج طبيعة المثلّث AGC

التّمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) متتاليّة معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=5-\dfrac{4}{u_n} \end{cases}$

1. أحسب u_1, u_2

2. أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n فإن : $2 \le u_n \le 4$

ب) بيّن أنّ (u_n) متزايدة

جـ) استنتج أنّ (u_n) متقاربة

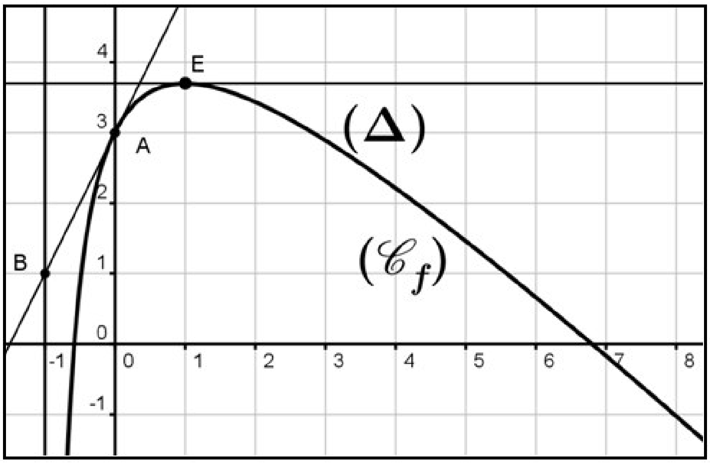
3. أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $4 - u_{n+1} \le \dfrac{4-u_n}{2}$

ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $0 \le 4 - u_n \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

جـ) استنتج نهاية المتتالية (u_n)

التّمرين الرّابع: (07 نقاط)

الجزء الأوّل: المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، $(\mathscr{C}_f)$ التّمثيل البياني لدالة f معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ ؛ ننشىء النّقط $A(0;3), B(-1;1), E(1;3+\ln 2)$ المستقيم (AB) مماس عند A للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ ، (Δ) المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند E .



1. باستعمال المعلومات المتوفّرة عيّن :

أ) معادلة المستقيم (AB) ، $f(0); f'(0); f(1); f'(1)$

ب) عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$

جـ) جدول تغيّرات الدّالة f

2. نقبل أنّ الدّالة f معرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ :

$f(x) = ax + 5 + \dfrac{b}{x+1} + \ln(x+1)$ ؛ حيث a, b عددان حقيقيان ، أحسب a, b

الجزء الثّاني: نقبل أنّ الدّالة f معرّفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة : $f(x) = \dfrac{-x^2+4x+3}{x+1} + \ln(x+1)$

1. أ) عيّن $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$ ؛ فسّر النّتيجة هندسيا

ب) بيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ ؛ ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. أ) أدرس اتجاه تغيّر الدّالة f ؛ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها

ب) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّين α, β حيث : $-0.6 < \alpha < -0.5$ ، $6.7 < \beta < 6.8$

3. أ) أحسب مشتقّة الدّالة g المعرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $\mathrm{g}(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$

ب) استنتج عبارة F الدّالة الأصلية للدّالة f على $]-1;+\infty[$ و التي تنعدم عند العدد 0

جـ) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة F على $]-1;+\infty[$

د) أحسب $\int_0^1 f(x)dx$ ؛ أعط تفسيرا هندسيا

☜ الموضوع الثّالث

التمرين الأول: (03.5 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النّقط $A(0;1;-2), B(2;1;0)$ ،

$$C(3;0;-3), H(2;2;-2)$$

1) بيّن أنّ المعادلة : $x-2y-z=0$ هي معادلة للمستوي (P) المحدّد بالنّقط H, B, A و أنّ $C \notin (P)$

2) أ) بيّن أنّ المثلّث HAB متساوي السّاقين في H

ب) بيّن أنّ (CH) عمودي على المستوي (P)

جـ) بيّن أنّ : $CA = CB$ ؛ ثمّ عيّن تمثيلا وسيطيّا لـ $(\triangle)$ المنصّف الدّاخلي للزاويّة $\widehat{ACB}$

3) لتكن T المسقط العمودي لـ H على المستوي (ACB) ، بيّن أنّ T تنتمي إلى $(\triangle)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(U_n) متتاليّة هندسيّة حدودها موجبة تماما بحيث : $\begin{cases} \ln U_1 + \ln U_5 = -12 \\ \ln U_2 - \ln U_4 = 4 \end{cases}$

1/ أ) بيّن أنّ q أساس (U_n) يساوي e^{-2}

ب) أحسب الحد الأوّل U_0 ؛ ثمّ أكتب U_n بدلالة n

جـ) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ ؛ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

2/ نعتبر المتتاليّة (V_n) المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n كما يلي : $V_n = \ln U_{n+1} + \ln U_n$

أ) بيّن أنّ (V_n) حسابيّة يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل

ب) أحسب بدلالة n المجموع T_n حيث : $T_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$

جـ) عيّن العدد الطبيعي n بحيث : $T_n = -8$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1/ أ) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة التّاليّة : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ ؛ نرمز إلى حلّي هذه المعادلة بـ z_1, z_2 حيث z_1 هو الحلّ الذي جزؤه التّخيلي موجب

ب) أكتب العدد المركّب $(z_1 - z_2)^{2012}$ على الشّكل الأسي

2/ في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $O;\vec{u};\vec{v}$ ، نعتبر النّقط A, M_2, M_1 ذات اللواحق على التّرتيب $\sqrt{2}(1+i), \sqrt{2}(1-i), \frac{\sqrt{2}}{2}$

أ) أوجد z_3 لاحقة النّقطة M_3 صورة M_2 بالتحاكي H الذي مركزه A و نسبته -3

ب) أوجد z_4 لاحقة النّقطة M_4 صورة M_2 بالدّوران R الذي مركزه O و زاويّته $-\frac{\pi}{2}$

جـ) أكتب العدد المركّب $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$ على الشّكل الأسّي

د) حدّد طبيعة المثلّث $M_1M_3M_4$

التمرين الرّابع: (08 نقاط)

I) لتكن الدّالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = x^2 - 2 + \ln x$

1. عيّن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2. أدرس إتجاه تغيّر الدّالة f ؛ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها

3. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$ حيث : $1 < \alpha < 2$

4. استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II) لتكن الدّالة g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $\mathrm{g}(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$ ، $(\mathscr{C}_{\mathrm{g}})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ (وحدة الطّول $1cm$)

1. أ) بيّن أنّه من أجل كلّ x من المجال $]0;+\infty[$ فإنّ إشارة $\mathrm{g}'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$ ، استنتج اتجاه تغيّر الدّالة g على المجال $]0;+\infty[$

ب) بيّن أنّ : $\mathrm{g}(\alpha) = \alpha^4 + \alpha^2$ و أنّ $\mathrm{g}(\alpha) \in [4.6;4.8]$

جـ) أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \mathrm{g}(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{g}(x)$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة g

د) أرسم $(\mathscr{C}_{\mathrm{g}})$ في المعلم السّابق

2. نعتبر النّقطتين $M(x;\ln x), A(0;2)$ حيث x عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$

أ) بيّن أنّ : $AM = \sqrt{\mathrm{g}(x)}$

ب) لتكن h الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $h(x) = \sqrt{x^2 + (2 - \ln x)^2}$ ، باستعمال تغيّرات الدّالة g استنتج تغيّرات الدّالة h على المجال $]0;+\infty[$

جـ) استنتج أقرب نقطة P من منحنى الدّالة " ln " إلى النّقطة A

د) أحسب عندئذ المسافة AP ؛ ثمّ بيّن أنّ : $AP \in [2.1;2.2]$

الموضوع الرابع

التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النّقطتين $A(3;0;6), I(0;0;6)$ ،
المستقيم (D) المار من النّقطتين A و I ؛ نعتبر المستويين : $(P): 2y+z-6=0$ ، $(Q): y-2z+12=0$

1/ بيّن أنّ المستويين (P) و (Q) متعامدان و أنّ تقاطعهما هو المستقيم (D)

2/ بيّن أنّ المستويين (P) و (Q) يقطعان على التّرتيب المحور $(O;\vec{j})$ في نقطتين B و C يطلب تعيينهما

3/ عيّن معادلة ديكارتيّة للمستوي (T) المار من النّقطة B و الشّعاع $\overrightarrow{AC}$ ناظمي له

4/ أ) عيّن إحداثيات النّقطة H نقطة تقاطع المستقيم (OA) و المستوي (T)

ب) ماذا تمثّل النّقطة H في المثلّث ABC ؟ علّل جوابك

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) متتاليّة عديّة معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1+\sqrt{u_n - 1} \end{cases}$

1/ أ) بيّن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $1 \leq u_n < 2$

ب) بيّن أنّ (u_n) متزايدة . ماذا تستنتج ؟

2/ نعتبر المتتاليّة العدديّة (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \ln(u_n - 1)$

أ) بيّن أنّ (v_n) هندسيّة يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل

ب) أكتب v_n بدلالة n ؛ ثمّ استنتج u_n بدلالة n

جـ) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i = 0 \qquad (1)$$

1/ بيّن أنّ المعادلة (1) تقبل حلا تخيّليا صرفا z_0 يطلب تعيينه

2/ عيّن العددين الحقيقين a و b بحيث من أجل كلّ عدد مركّب z يكون :

$$z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i = (z-z_0)(z^2+az+b)$$

3/ استنتج مجموعة حلول المعادلة (1)

4/ في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C صور الأعداد z_0 ، z_1 ، z_2 حلول المعادلة (1) على التّرتيب ؛ حيث z_1 هو الحل الذي جزؤه التّخيّلي موجب تماما و z_2 هو الحل الآخر

أ) أكتب العدد : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_O}$ على الشّكل الجبري ثمّ المثلّثي

ب) استنتج قيسا بالراديان للزاويّة الموجّهة $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC})$ ؛ ثم حدد طبيعة الرّباعي $OABC$

جـ) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركّب : $\left(\frac{z_B - z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيّا

التمرين الرّابع: (07 نقاط)

نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ ، $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$

1/ أ) أحسب $\lim\limits_{x \stackrel{>}{\to} 0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ؛ مبيّنا المستقيمات المقاربة لـ $(\mathscr{C}_f)$

ب) أدرس إتجاه تغيّر الدّالة f ؛ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها

2/ أرسم $(\mathscr{C}_f)$ حيث الوحدة $1cm$ على محور الفواصل و $2cm$ على محور التّراتيب

3/ m عدد حقيقي موجب تماما و لتكن A النّقطة من $(\mathscr{C}_f)$ ذات الفاصلة m و (T_m) مماس $(\mathscr{C}_f)$ في النّقطة A

أ) أكتب بدلالة m معادلة المماس (T_m)

ب) عيّن قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ O

جـ) أكتب معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصّل عليها ؛ ثمّ أرسم كلّ مماس

4/ أحسب بالسّنتيمتر مربّع مساحة الحيّز المحدّد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و محور الفواصل و المستقيمين $(d_1), (d_2)$ اللذيّن معادلتيهما $x = e, x = \frac{1}{e}$

5/ نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}^\star$ كما يلي : $\mathrm{g}(x) = \frac{(\ln |x|)^2}{x}$

أ) بيّن أنّ g فرديّة

ب) بيّن أنّه يمكن رسم (Γ) منحنى الدّالة g انطلاقا من $(\mathscr{C}_f)$ ؛ ثمّ أرسمه

د) استنتج مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و (Γ) و المستقيميّن $(d_1), (d_2)$

☜ الموضوع الخامس

التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النّقط $A(1;0;2)$ ، $B(1;1;4)$ ، $C(-1;1;1)$

1/ أ) بيّن أنّ النّقط $A;B;C$ تعيّن مستويا (ABC)

ب) عيّن العددين الحقيقيين a,b حتى يكون الشّعاع $\vec{n}(a;b;-2)$ ناظمي للمستوي (ABC)

جـ) استنتج معادلة ديكارتيّة للمستوي (ABC)

2/ ليكن المستويين (P) ، (Q) اللذين معادلتيهما على التّرتيب :

$$(P): 2x+y+2z+1=0, (Q): x-2y+6z=0$$

أ) بيّن أنّ المستويين (P) ، (Q) متقاطعان وفق مستقيم $(\triangle)$ يطلب تعيين تمثيل وسيطي له

ب) هل المستقيم $(\triangle)$ و المستوي (ABC) متقاطعان في نقطة ؟ برّر إجابتك .

3/ α عدد حقيقي يختلف عن -3

أ) عيّن بدلالة α احداثيات النّقطة G_α مرجح الجملة $\{(A;1),(B;2),(C;\alpha)\}$

ب) تحقق من أنّه لمّا α يمسح المجموعة $\mathbb{R}-\{-3\}$ فإن النّقطة G_α تنتمي إلى المستوي (ABC)

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) متتاليّة معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n غير معدوم كما يلي : $u_n = 1-2\int_0^n e^{-2x}dx$

1/ أحسب u_n بدلالة n

2/ أثبت أنّ (u_n) هندسيّة يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل

3/ أدرس تقارب المتتاليّة (u_n)

4/ أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$

5/ أ) أحسب بدلالة n الجداء : $P_n = u_1\times u_2\times\cdots\times u_n$

ب) عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون $P_n = e^{-4038090}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1/ نعتبر الأعداد المركّبة التّاليّة : $z_1 = \left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^4$ ، $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$ و $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$

أ/ أكتب على الشّكل المثلّثي كل من الأعداد z_1 ، z_2 ، و z_3

ب/ عيّن الشّكل الجبري للعدد المركّب z_3

جـ/ استنتج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ ، و $\sin\dfrac{11\pi}{12}$

د/ أحسب العدد المركّب $(z_3)^{2012}$

2/ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر التحويل النّقطي r الذي

يرفق بكلّ نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النّقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = (1+i)z+1$

أ/ عيّن طبيعة التّحويل r و حدّد عناصره المميّزة

ب/ A نقطة من المستوي لاحقتها z_1 ، عيّن لاحقة صورة النّقطة A بالتّحويل r

التّمرين الرّابع: (07 **نقاط**)

الجزء الأوّل:

نعتبر الدّالتين g و h على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $\mathrm{g}(x) = x - 1 - \ln x$ ؛ $h(x) = x + (x-2)\ln x$

1/ أ/ أحسب $\mathrm{g}'(x)$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$ ؛ ثمّ أدرس إتجاه تغيّر الدّالة g

ب/ استنتج أنّ : $\mathrm{g}(x) \geq 0$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$

2/ أ/ بيّن أنّ : $h(x) = 1 + \mathrm{g}(x) + (x-1)\ln x$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$

ب/ بيّن أنّ : $(x-1)\ln x \geq 0$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$

3/ استنتج : $h(x) > 0$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$

الجزء الثاني:

نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$ ؛ وليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$

1/ أ/ أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ؛ ثمّ فسّر النّتيجة هندسيا

ب/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ (**لاحظ** : $f(x) = 1 + x\ln x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$)

2/ أ/ بيّن أنّ : $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$

ب/ استنتج إتجاه تغيّر الدّالة f على المجال $]0;+\infty[$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها

3/ ليكن (Δ) المستقيم المماس لـ $(\mathscr{C}_f)$ في النّقطة $A(1;1)$

أ/ بيّن أنّ معادلة (Δ) هي : $y = x$

ب/ تحقق أنّ : $f(x) - x = (\ln x - 1)\mathrm{g}(x)$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$

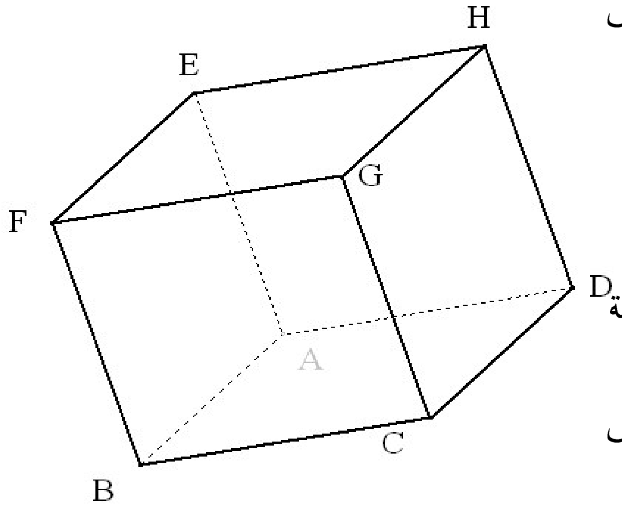
جـ/ أدرس إشارة $f(x) - x$ ثمّ استنتج الوضع النّسبي لـ $(\mathscr{C}_f)$ و (Δ)

4/ أنشىء (Δ) و $(\mathscr{C}_f)$ في نفس المعلم

5/ ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التّالية : $f(x) - m = 1$ ؛ m وسيط حقيقي

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

$ABCDEFGH$ مكعّب طول حرفه 1 ؛ كما هو موضح في الشّكل المقابل ، نعتبر الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$



1. أثبت أنّ المثلّث BDE متقايس الأضلاع
2. لتكن I مركز ثقل المثلّث BDE

أ) أحسب إحداثيات النّقطة I

ب) أثبت أنّ : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ ؛ ماذا تستنتج بالنّسبة للنّقط A,I,G

3. أثبت أنّ I هي المسقط العمودي للنّقطة A على المستوي BDE

4. من أجل كلّ عدد حقيقي k نعرّف النّقطتان M_k ، N_k و المستوي (P_k) كما يلي :

- M_k هي النّقطة من المستقيم (AG) حيث : $\overrightarrow{AM_k}=k\overrightarrow{AG}$
- (P_k) هو المستوي المار من M_k و الموازي للمستوي (BDE)
- N_k هي نّقطة تقاطع المستوي (P_k) و المستقيم (BC)

- عيّن $(P_{\frac{1}{3}})$ ، $M_{\frac{1}{3}}$ و $N_{\frac{1}{3}}$ باستعمال النقط المعرّفة سابقًا ؛ ثمّ أحسب المسافة $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$

5. أحسب إحداثيات النقطة N_k
6. أحسب إحداثيات النّقطة M_k في المعلم $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$
7. عيّن المعادلة الدّيكارتيّة للمستوي (P_k) في المعلم السّابق
8. أثبت أنّ إحداثيات النّقطة N_k في المعلم السّابق هي $(1;3k-1;0)$
9. عيّن قيمة k حتى يكون (M_kN_k) عمودي على كل من (AG) و (BC)

التمرين الثاني: (03.5 نقاط)

نعتبر المتتاليّة العدديّة (u_n) المعرّفة كما يلي : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^3}{3u_n^2+1} \end{cases}$

1/ بيّن بالتّراجع أنّ : $u_n>0$ من أجل كلّ عدد طبيعي n

2/ بيّن أنّ المتتاليّة (u_n) متناقصة

3/ استنتج أنّ (u_n) متقاربة

4/ أ) بيّن أنّ : $u_{n+1}\leq\frac{1}{3}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$ ب) بيّن أنّ : $u_n\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$ ؛ ثمّ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

I) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النّقط A ، B و C ذات اللّواحق $z_A = 2$ ، $z_B = 1+i\sqrt{3}$ ، $z_C = 1-i\sqrt{3}$ على التّرتيب

1) أكتب z_B و z_C على الشّكل الأسي

2) علّم النّقط A ، B و C ؛ ثمّ عيّن طبيعة الرّباعي $OBAC$

3) عيّن (D) مجموعة النّقط $M(z)$ بحيث : $|z| = |z-2|$

II) φ تحويل نقطي يرفق بكلّ نقطة $M(z)$ حيث $z \neq z_A$ النّقطة $M'(z)$ بحيث : $z' = \dfrac{-4}{z-4}$

1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z' = z$ ثمّ استنتج صورتي النّقطتين B و C بالتحويل φ

2/ لتكن G مركز ثقل المثلّث OAB ؛ عيّن لاحقة G' صورة النّقطة G بالتّحويل φ

2/ أ) «سؤال من الدّرس » : علمًا أنّ : $|z|^2 = z \times \overline{z}$ ؛ بيّن أنّ من أجل كلّ عددين مركّبين z_1 و z_2 لدينا : $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ و أنّ من أجل كلّ عدد مركّب غير معدوم z : $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

ب) بيّن أنّ من أجل كلّ عدد مركّب z حيث $z \neq z_A$: $|z'-2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$

جـ) استنتج أنّه عندما تمسح النّقطة $M(z)$ المجموعة (D) بإنّ النّقطة $M'(z')$ تمسح دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

التمرين الرّابع: (07.5 نقاط)

I) لتكن الدّالة g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x - \dfrac{1}{x} - 2\ln x$

1/ بيّن أنّ : $g'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$ من أجل كلّ x من المجال $]0;+\infty[$ ؛ ثمّ أدرس تغيّرات الدّالة g

2/ بيّن أنّ : $g(x) \leq 0$ من أجل كلّ x من المجال $]0;1]$ ، و أنّ $g(x) \geq 0$ من أجل كلّ x من المجال $[1;+\infty[$

II) نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = x + \dfrac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$ ، $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1/ أ) بيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (يمكن وضع $t = \sqrt{x}$) ؛ ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) تحقق أنّ : $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$ لكلّ x من المجال $]0;+\infty[$

جـ) أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ (يمكن وضع $t = \dfrac{1}{x}$) ؛ ثمّ فسّر هذه النّتيجة بيانيًا

2/ بيّن أنّ : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ لكلّ x من المجال $]0;+\infty[$ ، ثمّ شكِّل جدول تغيّرات الدّالة f

3/ أنشىء $(\mathscr{C}_f)$ بدقّة في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

4/ أ) بيّن أنّ الدّالة : $G : x \longmapsto x\ln x - x$ دالة أصليّة للدّالة $h : x \longmapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$

ب) باستعمال المكاملة بالتّجزئة أثبت أنّ : $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2 dx = e-2$

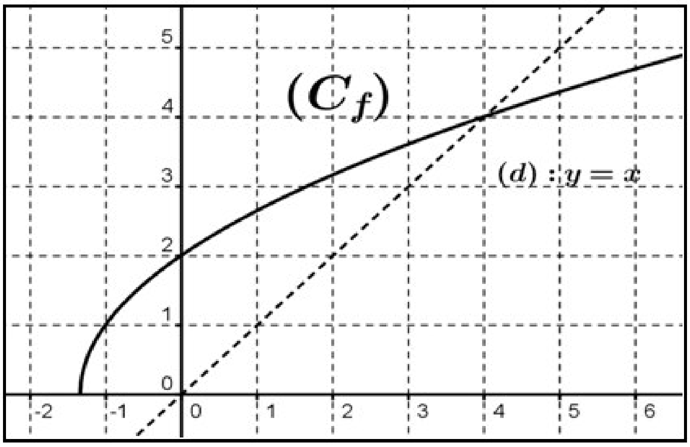
جـ) حدّد مساحة الحيّز المحصور بين $(\mathscr{C}_f)$ و محور الفواصل و المستقيمين اللّذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$

الموضوع السابع

التمرين الأول: (04 نقاط)

في الشكل أدناه (C_f) هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$ بالعلاقة : $f(x)=\sqrt{3x+4}$ ، (d) المستقيم ذو المعادلة : $y=x$ ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=\sqrt{3u_n+4} \end{cases}$

1. أعد رسم هذا الشّكل على ورقة الإجابة ثمّ مثل الحدود u_0,u_1,u_2,u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبينا خطوط الإنشاء .



2. ضع تخمينا حول إتجاه تغير (u_n) و تقاربها .
3. برهن بالتّراجع أنّ : $0<u_n<4$ مهما كان $n\in\mathbb{N}$
4. أ) بيّن أنّ : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(4-u_n)(u_n+1)}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

ب) استنتج إتجاه تغيّر (u_n)

جـ) بيّن أنّ (u_n) متقاربة

5. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n فإنّ : $4-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(4-u_n)$
6. بيّن أنّ : $4-u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n(4-u_0)$ مهما كان $n\in\mathbb{N}$ ؛ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$
7. هل توجد طريقة أخرى لحساب نهاية المتتالية (u_n) ؟ إن كانت موجودة أذكرها

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر التّحويل النّقطي f الذي يرفق بكلّ نقطة M ذات اللاحقة z ، النّقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=z^2-4z$ ؛ تسمى النّقطة M' صورة النّقطة M بالتحويل f

1/ لتكن النّقطتان A ، B ذات اللاحقتين على التّرتيب $z_A=1-i$ ، $z_B=3+i$

أ) أحسب لاحقتي النّقطتين A' ، B' صورتي النّقطتين A ، B على التّرتيب بالتّحويل f

ب) نفرض وجود نقطتين لهما نفس الصّورة بالتحويل f ، أثبت أنّهما متمايزتان أو واحدة منهما صورة الأخرى بتناظر مركزي يُطلَبُ تعيين عناصره المميّزة

2/ لتكن I النّقطة ذات اللاحقة $z_I=-3$

أ) أثبت أنّ الرّباعي $OMIM'$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان : $z^2-3z+3=0$

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركّب z التّالية : $z^2-3z+3=0$

3/ أ) أكتب $z'+4$ بدلالة $z-2$ ؛ ثمّ أوجد العلاقة بين $|z'+4|$ و $|z-2|$ و أيضًا العلاقة بين $arg(z'+4)$ و $arg(z-2)$

ب) نعتبر النّقطتين J و K ذات اللاحقتين $z_J=2$ و $z_K=-4$ على التّرتيب ، أثبت أنّه إذا كانت النّقطة M تنتمي إلى الدّائرة (C) ذات المركز J و نصف القطر 2 فإنّ النّقطة M' صورتها بالتحويل f تنتمي إلى دائرة يُطلَبُ تعيين مركزها و نصف قطرها

ب) لتكن النّقطة E ذات اللاحقة $z_E=-4-3i$ ، أكتب على الشّكل المثلّثي العدد المركّب z_E+4 ثمّ بالإستعانة بـ 3/ أ) ، أثبت أنّه توجد نقطتان صورتاهما بالتحويل f هما النّقطة E

د) أكتب على الشّكل الجبري لاحقتي هاتين النّقطتين

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، النّقط $A(2;1;3)$ ، $B(-3;-1;7)$ ، $C(3;2;4)$ ، (S_1) مجموعة النّقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $||-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}||=\sqrt{29}$ ، (S_2) مجموعة النّقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})=0$ و المستقيم $(\triangle)$ ذو التّمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t, t\in\mathbb{R} \\ z=4+t \end{cases}$

1/ بيّن أنّ النّقط A ، B و C تشكّل مستويًا

2/ بيّن أنّ الشّعاع $\vec{n}(2;-3;1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ؛ ثمّ استنتج معادلة ديكارتية له .

3/ أثبت أنّ المستقيم $(\triangle)$ يعامد المستوي (ABC) ؛ ثمّ عيّن إحداثيات G نقطة تقاطع المستقيم $(\triangle)$ و المستوي (ABC)

4/ أ) تحقق أنّ النّقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(C;2),(B;-1),(A;-2)\}$

ب) بيّن أنّ (S_1) هي سطح كرة يُطلَب تعيين مركزها و نصف قطرها

جـ) بيّن أنّ (S_2) هي مستو حيث المعادلة : $2x+y-z+18=0$ تمثّل معادلة ديكارتيّة له

د) حدّد الوضع النّسبي لـ (S_1) و (S_2)

التمرين الرّابع: (07 نقاط)

الجزء الأوّل: f الدّالة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$ ؛ $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1/ أ) تحقّق أنّ : $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$ لكلّ x من $\mathbb{R}$

ب) استنتج أنّ f فرديّة

2/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3/ أ) بيّن أنّ : $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ لكلّ x من $\mathbb{R}$

ب) أدرس إتجاه تغيّر الدّالة f على $\mathbb{R}^+$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها على $\mathbb{R}^+$

جـ) استنتج أنّ : $1-\dfrac{2}{e^x+1} \leq \dfrac{1}{2}x$ لكلّ x من $\mathbb{R}^+$

4/ بيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(1-\dfrac{1}{2}x\right)\right]=0$ ؛ ثمّ فسّر هذه النّتيجة بيانيًا

5/ أنشىء في المعلم السّابق المستقيم (d) ذو المعادلة : $y=1-\dfrac{1}{2}x$ ؛ و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$

6/ أ) بوضع: $t=e^{-x}$ ، بيّن أنّ : $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^x}dx=\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

ب) أحسب مساحة الحيّز المحدّد بين $(\mathcal{C}_f)$ و محور الفواصل و المستقيمين اللّذين معادلتيهما $x=-1$ ؛ $x=0$

الجزء الثاني: ليكن (u_n) متتاليّة عدديّة معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=1-\dfrac{2}{e^{u_n}+1}\end{cases}$

1/ بيّن بالتّراجع أنّ : $u_n>0$ لكلّ عدد طبيعي n

2/ أ) تحقق باستعمال نتيجة السّؤال الثالث من الجزء الأوّل ؛ من أنّ : $u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}u_n$ مهما كان $n\in\mathbb{N}$

ب) استنتج أنّ (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

3/ بيّن أنّ : $u_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$ ؛ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

الموضوع الثامن

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، النّقط $A(3;0;6)$ ، $I(0;0;6)$ ، (D) مستقيم يمر من النّقطتين A و I ؛ (P) و (P') مستويان معادلتيهما على التّرتيب $2y+z-6=0$ ، و $y-2z+12=0$

1) أثبت أنّ (P) و (P') متعامدان

2) أثبت أنّ (P) و (P') متقاطعان وفق المستقيم (D)

3) بيّن أنّ (P) و (P') يقطعان المحور $(O;\vec{j})$ على التّرتيب في النّقطتين B ، C يُطلَبُ تعيين إحداثياتهما

4) بيّن أنّ المستوي (Q) المار بـ B و شعاعه الناظمي $\overrightarrow{AC}$ معادلته الدّيكارتيّة هي : $x+4y+2z-12=0$

5) أكتب تمثيلًا وسيطيًا للمستقيم (OA)

6) أثبت أنّ المستقيم (OA) و المستوي (Q) متقاطعان في نقطة H يُطلَبُ تعيين إحداثياتها

7) ماذا تمثّل النّقطة H في المثلّث ABC ؟ برّر

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (وحدة الطّول $1cm$)

1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركّب z التّاليّة : $\overline{z}-3iz-3+6i=0$ ؛ حيث $\overline{z}$ مرافق العدد المركّب z

2/ نعتبر النّقطة A ذات اللاحقة $z_A=4-2i$

- أكتب على الشّكل الجبري z_B لاحقة النّقطة B بحيث يكون المثلّث OAB متقايس الأضلاع مباشر

3/ لتكن النّقطة D ذات اللاحقة $z_D=2i$

أ) عيّن طبيعة المجموعة (E) ، مجموعة النّقط M ذات اللاحقة z بحيث $z\neq 2i$ ؛ التي تحقق :

$$arg(z-2i)=\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$$

ب) عيّن طبيعة المجموعة (F) ، مجموعة النّقط M ذات اللاحقة z ؛ التي تحقق : $z=2i+2e^{i\theta};\theta\in\mathbb{R}$

4/ من أجل كلّ نقطة M ذات اللاحقة z حيث $z\neq -2$ ، نرفق النّقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث : $z'=\dfrac{z-1}{\overline{z}+2}$

- عيّن طبيعة المجموعة من النّقط M ذات اللاحقة z حيث $z\neq -2$ ؛ التّي تحقق : $|z'|=1$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

f دالة عدديّة معرّفة على المجال $[0;2]$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

1. أدرس إتجاه تغيّر الدّالة f علي المجال $[0;2]$ ؛ و أثبت أنّه إذا كان $x\in[1;2]$ فإنّ $f(x)\in[1;2]$

2. (u_n) ؛ (v_n) متتاليتان عدديتان معرّفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ و $\begin{cases} v_0=2 \\ v_{n+1}=f(v_n)\end{cases}$

أ) أعد الشّكل أدناه على ورقة الإجابة ؛ ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و v_0, v_1, v_2 دون حسابها مبيّنًا خطوط الإنشاء

ب) ضع تخمينًا حول إتجاه تغيّر و تقارب كلّ من (u_n) و (v_n)

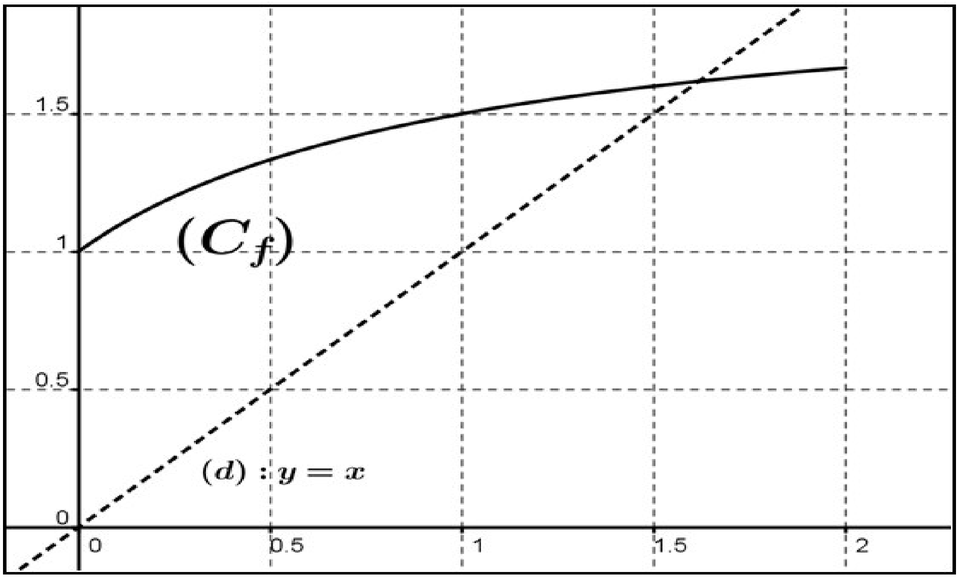
3/ برهن بالتّراجع صحة كلّ علاقة من العلاقات التّاليّة : $1 \leq v_n \leq 2$ و $v_{n+1} \leq v_n$ ؛ من أجل كلّ عدد طبيعي n ، نقبل أنّه يمكن إثبات أنّ : $1 \leq u_n \leq 2$ و $u_{n+1} \geq u_n$ ؛ من أجل كلّ عدد طبيعي n

4/ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا : $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$

5/ أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا : $v_n - u_n \geq 0$ و $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$

6/ بيّن أنّ : $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

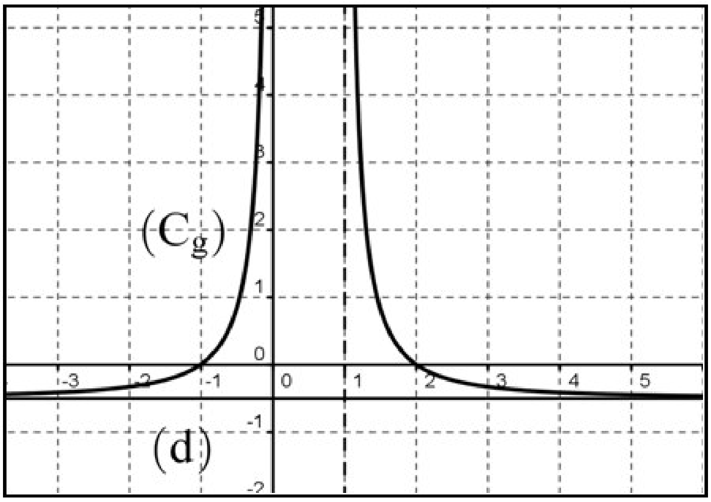
7/ أثبت أنّ المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس العدد الحقيقي l يُطلَبُ تعيينه



التمرين الرّابع: (07.5 **نقاط**)

الجزء الأوّل:

في الشّكل المقابل (C_g) يمثّل منحنى الدّالة g المعرّفة على $D_g =]-\infty;0[\bigcup]1;+\infty[$ ، بالعبارة : $g(x) = \dfrac{ax^2+x+2}{2x(x+b)}$ ، حيث a, b عددان حقيقيان ، و المستقيم (d) ذو المعادلة : $y = -\dfrac{1}{2}$



1/ بقراءة بيانيّة :

أ) عيّن نهايات الدّالة g عند أطراف مجموعة التّعريف

ب) استنتج أنّ : $a = b = -1$

جـ) عيّن $g(-1)$ و $g(2)$

د) عيّن إشارة $g(x)$ على D_g

2/ أ) بيّن أنّ : $g(x) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$ من أجل كلّ $x \in D_g$

ب) أحسب $S(\alpha)$ بدلالة α حيث $\alpha \in]1;2[$ و $S(\alpha) = \int_{\alpha}^{2} g(x)dx$

الجزء الثّاني:

f دالة عدديّة معرّفة على المجموعة $D_f =]-\infty;0[\bigcup]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ ؛

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1/ أ) أحسب نهايات الدّالة f عند أطراف مجموعة التّعريف

ب) بيّن أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة أحدها المستقيم $(\triangle)$ ذو المعادلة $y = -\frac{x}{2}$

2/ بيّن أنّ : $f'(x) = g(x)$ من أجل كلّ $x \in D_f$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها

3/ أثبت أنّ : $\Omega\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر لـ $(\mathscr{C}_f)$ ثمّ أرسم $(\mathscr{C}_f)$ و $(\triangle)$

4/ أ) بيّن أنّه لا يوجد مماسًا للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يوازي المستقيم $(\triangle)$

ب) ناقش بيانيًا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التّاليّة :

$$f(x) = -\frac{x}{2} + m$$

الموضوع التّاسع ☜

التمرين الأول: (04 نقاط)

الجزء الأوّل:

1/ z_1 و z_2 عددان مركّبان ؛ حل في $\mathbb{C}$ الجملة : $\begin{cases} z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \\ z_1 - z_2\sqrt{3} = -2i \end{cases}$

2/ في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (وحدة الطول $4cm$) ؛ نعتبر النّقطتين A و B ذات اللاحقتين على التّرتيب $z_A = -\sqrt{3}+i$ ، $z_B = -1+\sqrt{3}i$

- أكتب z_A و z_B على الشّكل الأسّي ؛ ثمّ عيّن النّقطتين A ، B في المعلم السّابق

3/ أحسب طويلة و عمدة العدد المركّب $\dfrac{z_A}{z_B}$

4/ حدّد طبيعة المثلّث ABO و أحسب قيس الزّاويّة الموجّهة $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$

5/ عيّن z_C لاحقة النّقطة C بحيث يكون الرّباعي $ACBO$ معيّن ؛ ثمّ عيّن C في المعلم السّابق و أحسب مساحة المثلّث ABC بـ cm^2

الجزء الثّاني:

ليكن f التّحويل النّقطي الذي يرفق بكلّ نقطة M ذات اللاحقة z ؛ النّقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

1/ عيّن طبيعة التّحويل f و حدّد عناصره المميّزة

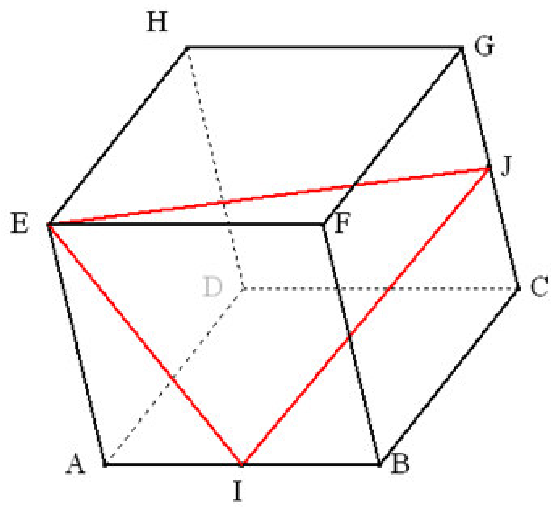
2/ أكتب على الشّكل الأسّي $z_{A'}$ ، $z_{B'}$ ، $z_{C'}$ لواحق النّقط A' ، B' و C' على التّرتيب صور النّقط A ، B و C على التّرتيب بالتّحويل f

3/ أحسب بـ cm^2 مساحة المثلّث $A'B'C'$

التمرين الثاني: (03 نقاط)

$ABCDEFGH$ مكعّب طول حرفه 1 ؛ I و J منتصفي القطعتين $[AB]$ ، $[CG]$ على التّرتيب كما في الشّكل المقابل ؛ نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$

- أجب بصحيح أو خطأ عن كلّ سؤال من الأسئلة الموجودة في الجدول ادناه مع التّبرير



	المعلومة	صحيح أو خطأ
.1	$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}$	
.2	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = AB.IC \times \cos\frac{\pi}{3}$	
.3	التمثيل الوسيطي للمستقيم (IJ) هو $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$	
.4	التمثيل الوسيطي للمستقيم (IJ) هو $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t+1 \\ y = t+1, t \in \mathbb{R} \\ z = \frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \end{cases}$	
.5	$6x-7y+8z-3=0$ هي معادلة ديكارتيّة للمستقيم (IJ)	
.6	الشّعاع $\overrightarrow{n}$ الذي مركّباته $\overrightarrow{n}(-4;1;2)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (FIJ)	

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1/ لتكن الدّالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = x - x\ln x$

- أدرس تغيّرات الدّالة f على $]0;+\infty[$ و شكّل جدول تغيّراتها

2/ (u_n) متتاليّة عدديّة معرّفة على $\mathbb{N}^\star$ بـ : $u_n = \frac{e^n}{n^n}$ ، أحسب u_1, u_2, u_3 ثمّ ضع تخمينًا حول إتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها

3/ (v_n) متتاليّة عدديّة معرّفة على $\mathbb{N}^\star$ بـ : $v_n = \ln u_n$

أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم لدينا : $v_n = n - n\ln n$

ب) أدرس إتجاه تغيّر (v_n) ثمّ استنتج أنّ (u_n) متناقصة

جـ) استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم : $0 < u_n \leq e$

د) استنتج أنّ (u_n) متقاربة ثمّ عيّن نهايتها

التمرين الرّابع: (09 نقاط)

الجزء الأوّل:

g دالة عدديّة معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $\mathrm{g}(x) = x\ln x - x - 2$

1/ أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \mathrm{g}(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{g}(x)$

2/ أدرس تغيّرات الدّالة g ؛ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها

3/ بيّن أنّ المعادلة $\mathrm{g}(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α من المجال $]\,;\,[$ ؛ ثمّ استنتج إشارة $\mathrm{g}(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

الجزء الثّاني:

نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x+2}$ ؛ $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$

1/ أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2/ استنتج أنّ $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيمّين مقاربين يُطلَبُ تعيين معادلتيهما

3/ أدرس وضعيّة $(\mathcal{C}_f)$ بالنّسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = 1$

4/ بيّن أنّه من أجل كلّ x من المجال $]0;+\infty[$ فإنّ : $f'(x) = -\dfrac{\mathrm{g}(x)}{x(x+2)^2}$

5/ أدرس إتجاه تغيّر الدّالة f ؛ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها

6/ بيّن أنّ : $f(\alpha) = 1 + \dfrac{1}{\alpha}$ ؛ ثمّ استنتج حصرًا لـ $f(\alpha)$

7/ عيّن معادلة المماس (D) لـ $(\mathcal{C}_f)$ عند النّقطة ذات الفاصلة 1 ؛ أنشىء المماس (D) و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$

8/ نعتبر الدّالة h المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x) = f(e^x)$

- أحسب الدّالة المشتقّة للدّالة h ؛ ثمّ استنتج إتجاه تغيّر الدّالة h و شكّل جدول تغيّراتها

☜ الموضوع العاشر

التمرين الأول: (04 نقاط)

الجزء الأوّل: نعتبر الدّالة g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=1-x^2-\ln x$

1/ أحسب $g(1)$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2/ أحسب $g'(x)$ من أجل كلّ x من المجال $]0;+\infty[$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها

3/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

الجزء الثّاني: لتكن f الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=-x+3+\dfrac{\ln x}{x}$ ؛ $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1/ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ؛ ثمّ أعطِ تفسيرًا هندسيًا

2/ بيّن أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل $(\triangle)$ يُطلَبُ تعيين معادلته

3/ أدرس الوضع النّسبي بين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\triangle)$

4/ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فإنّ : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها

5/ بيّن أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α,β حيث : $0<\alpha<1$ ؛ $3<\beta<4$

6/ بيّن أنّه توجد نقطة وحيدة A من $(\mathscr{C}_f)$ المماس فيها يكون موازيًا لـ $(\triangle)$ ؛ حدّد إحداثياتها

7/ أنشىء $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم $(\triangle)$

8/ ناقش بيانيًا حسب قيّم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التّاليّة :

$$f(x)=-x+2m$$