الزوايــا الموجهة و حساب المثلثات

الكفاءات المستهدفة

حساب أقياس زوايا موجهة

حل المعادلات المثلثية

حل المتراجحات المثلثية

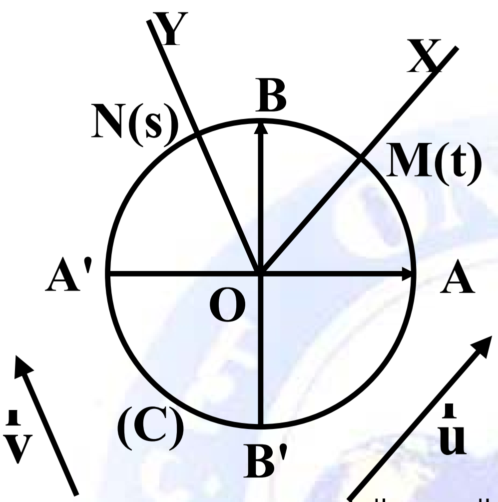
تصميم الدرس

- تعاريف
- مشاكل و تمارين
- الحلول

تعاريف

I. الزاوية الموجهة لشعاعين :

$\vec{u}$ وَ $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي الموجه . (C) الدائرة المثلثية التي مركزها O .



$[OX)$ نصف مستقيم له نفس منحى و نفس اتجاه الشعاع $\vec{u}$ ويقطع الدائرة (C) في النقطة M .

$[OY)$ نصف مستقيم له نفس منحى ونفس اتجاه الشعاع $\vec{v}$ ويقطع الدائرة (C) في النقطة N .

الزاوية الموجهة $(\vec{u}\ ,\ \vec{v})$ للشعاعين $\vec{u}$ وَ $\vec{v}$ هي بالتعريف الزاوية الموجهة $(\ OM\ ,\ ON\ )$ لنصفي المستقيمين $[OX)$ وَ $[OY)$.

II. أقياس الزوايا الموجهة لشعاعين :

أقياس الزاوية الموجهة $(\vec{u}\ ,\ \vec{v})$ المعرفة سابقا هي الأعداد $t - s$ حيث s وt هما العددان المرفقان بالنقطتين N وM على الترتيب عند لف المستقيم العددي على الدائرة (C) .

- تعيين أقياس زاوية موجهة:

لكل زاوية موجهة $(\vec{u}\ ,\ \vec{v})$ مالا نهاية من الأقياس . إذا كان α هو أحد هذه الأقياس فإن أقياس هذه الزاوية تعطى بالعبارة : $\theta = \alpha + 2k\pi$ حيث: $k \in Z$.

أمثلة :

1) أقياس الزاوية الموجهة :

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ k \in Z$$

2) أقياس الزاوية الموجهة :

$$\left(\overrightarrow{OB'} , \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad ; \quad k \in Z$$

إذن :
$$\left(\overrightarrow{OB'} , \overrightarrow{OB}\right) = -\pi + 2k\pi$$

3) إذا كانت $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ، $N\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ فإن :

$$\left(\overrightarrow{OM} , \overrightarrow{ON}\right) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad ; \quad k \in Z$$

إذن :
$$\left(\overrightarrow{OM} , \overrightarrow{ON}\right) = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$$

4) هل العددان $\frac{-\pi}{5}$ و $\frac{9\pi}{5}$ هما قيسان لنفس الزاوية الموجهة ؟

الحل :
$$\frac{9\pi}{5} - \left(\frac{-\pi}{5}\right) = \frac{9\pi + \pi}{5} = \frac{10\pi}{5} = 2\pi$$

وعليه :
$$\frac{9\pi}{5} = \frac{-\pi}{5} + 2\pi$$

إذن العددان $\frac{-\pi}{5}$ و $\frac{9\pi}{5}$ هما قيسان لنفس الزاوية الموجهة .

5) هل العددان $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{5\pi}{3}$ هما قيسان لنفس الزاوية الموجهة ؟

الحل :
$$\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{10\pi - \pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

وعليه : $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{3}$ هما قيسان لزاويتين موجهتين مختلفتين .

- القيس الرئيسي لزاوية موجهة :

من بين أقياس الزاوية الموجهة لشعاعين يوجد قيس رئيسي وحيد θ ينتمي إلى المجال $]-\pi \, ; \pi]$.

θ تسمى القيس الرئيسي لهذه القوس الموجهة .

أمثلة :

1) $\frac{\pi}{2}$ هي القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OA} \, , \overrightarrow{OB}\right)$ في الدائرة المثلثية .

2) $\frac{-\pi}{2}$ هو القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OB} \, , \overrightarrow{OA}\right)$

3) عين القيس الرئيسي للزاوية الموجهة التي أحد أقياسها $\frac{2007\pi}{6}$ Rd .

الحل :

$$\frac{2007\pi}{6} = \frac{(6 \times 334 + 3)\,\pi}{6} = \frac{6 \times 334\pi}{6} + \frac{3\pi}{6}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 334\,\pi$$

إذن القيس الرئيسي لهذه الزاوية هو $\frac{\pi}{2}$.

4) نفس السؤال السابق من أجل : $\frac{1954\pi}{5}$ Rad

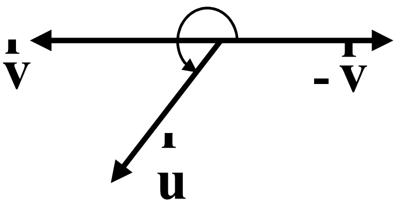
الحل : $\frac{1954\pi}{5} = \frac{(5 \times 390 + 4)\,\pi}{5} = \frac{\pi}{5} + 390\pi$

إذن القيس الرئيسي هو $\frac{\pi}{5}$.

- <u>خواص</u> :

$\vec{u} \, , \vec{v} \, , \vec{w}$ ثلاثة أشعة كيفية و غير معدومة .

1) $(\vec{u} \, , \vec{v}) + (\vec{v} \, , \vec{w}) = (\vec{u} \, , \vec{w}) + 2k\pi \;\; ; \; k \in Z$



2) $(\vec{u}\,,\vec{v}) = -(\vec{v}\,,\vec{u})$

الزاويتان $(\vec{u}\,,\vec{v})$ و $(\vec{v}\,,\vec{u})$

هما زاويتان متعاكستان .

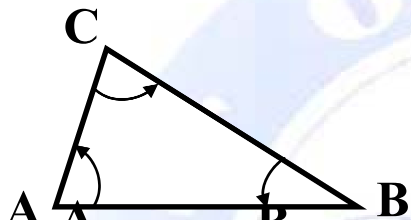
3) $(\vec{u}\,,\vec{v})$ و $(-\vec{u}\,,-\vec{v})$ متقايستان

4) $(-\vec{v}\,,\vec{u}) = \pi + (\vec{v}\,,\vec{u}) = \pi - (\vec{u}\,,\vec{v})$

الزاويتان $(\vec{u}\,,\vec{v})$ و $(-\vec{v}\,,\vec{u})$ زاويتان متكاملتان .

5) مجموع زوايا المثلث :

$$(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}\,,\overrightarrow{CB}) = \pi + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

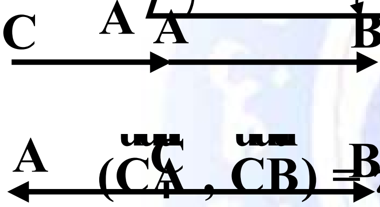


6) شروط وقوع ثلاث نقط على استقامة واحدة :

A , B , C ثلاث نقاط متمايزة مثنى مثنى

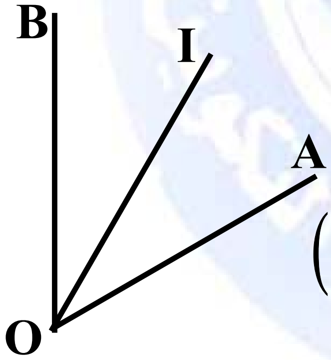
تكون النقط A , B , C على استقامة

واحدة إذا وفقط إذا كان :



$$(\overrightarrow{CA}\,,\overrightarrow{CB}) = 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z} \quad \text{أو} \quad (\overrightarrow{CA}\,,\overrightarrow{CB}) = \pi + 2k\pi$$

7) منصف زاوية :



$[OI)$ منصف الزاوية $\widehat{AOB}$

يعني أن :

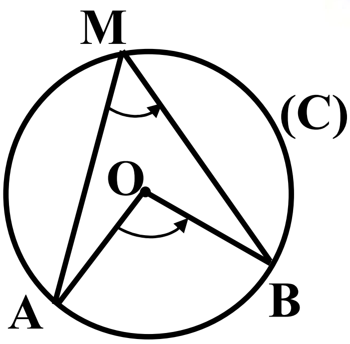
$$\left(\overrightarrow{OB}\,,\overrightarrow{OI}\right) = \left(\overrightarrow{OI}\,,\overrightarrow{OA}\right) + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

8) الزاوية المحيطية و الزاوية المركزية اللتان يحصران نفس القوس :

A , B نقطتان من الدائرة (C) مركزها O

من أجل كل نقطة M من (C)

لدينا :



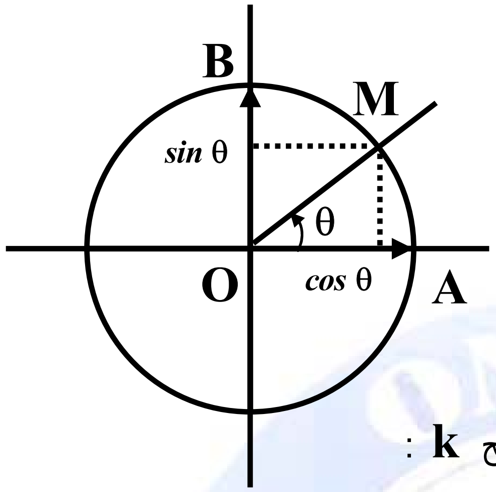
$$\left(\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB}\right) = 2\left(\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB}\right) + 2k\pi$$

III. حساب المثلثات :

(C) الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم المتعامد المتجانس $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

من أجل كل زاوية موجهة $(\vec{u} , \vec{v})$ قيسها θ ، توجد نقطة وحيدة من (C) بحيث :

$$(\vec{i} , \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi \quad ; k \in Z$$



- فاصلة M في المعلم $\left(O ; \vec{i} , \vec{j}\right)$

هي: $cos\ (\vec{u} , \vec{v}) = cos\ \theta$

- ترتيب M في المعلم $\left(O ; \vec{i} , \vec{j}\right)$

هي: $sin\ (\vec{u} , \vec{v}) = sin\ \theta$

إذن: $\overrightarrow{OM} = cos\theta\ \vec{i} + sin\theta\ \vec{j}$

نتائج من أجل كل عدد حقيقي θ و من أجل كل عدد صحيح k :

1) $cos^2\ \theta + sin^2\ \theta = 1$

2) $-1 \le\ sin\ \theta\ \le 1$ و $-1 \le\ cos\ \theta\ \le 1$

3) $sin(\theta + k.2\pi) = sin\ \theta$ وَ $cos(\theta + k.2\pi) = cos\ \theta$

جيب و جيب تمام العدد x و الأعداد المرفقة به :

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

1) $sin(-x) = -sin\ x \quad ; \quad cos\ (-x) = cos\ x$

2) $sin(\pi - x) = sin\ x \quad ; \quad cos(\pi - x) = -cos\ x$

3) $sin(\pi + x) = -sin\ x \quad ; \quad cos(\pi + x) = -cos\ x$

4) $sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos\ x \quad ; \quad cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin\ x$

5) $sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cos\ x \quad ; \quad cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\ sin\ x$

تطبيقات :

احسب ما يلي :

$$cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) \quad ; \quad sin\ \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad cos\ \frac{5\pi}{4} \quad ; \quad cos\ \frac{5\pi}{6}$$

الحل :

$$* \quad \cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$* \quad \cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$* \quad \sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$* \quad \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

IV. معادلات و متراجحات مثلثية :

- المعادلات :

1) المعادلة : $\cos\alpha = \cos\beta$ تكافئ :

$$\begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad\qquad k \in Z \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$$

2) المعادلة : $\sin\alpha = \sin\beta$ تكافئ :

$$\begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad\qquad k \in Z \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

3) المعادلة : $\tan\alpha = \tan\beta$ تكافئ: $\alpha = \beta + k\pi \; ; \; k \in Z$

أمثلة حل في $\mathfrak{R}$ كل من المعادلات التالية :

1) $2\cos x + 1 = 0$

2) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

3) $\tan 3x = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

الحل :

1) المعادلة : $2\cos x + 1 = 0$ تكافئ : $\cos x = -\frac{1}{2}$

أي : $\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ وعليه: $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

مجموعة حلول المعادلة هي :

$$S = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;;\; \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2) المعادلة : $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ تكافئ

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

و منه : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 3x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

مجموعة حلول المعادلة هي :

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\; \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \;;\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3) تكون المعادلة معرفة إذا كان :

$$\cos 3x \neq 0 \quad \text{وَ} \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \neq 0$$

أي : $3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ; \quad x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ; \quad k \in Z$

وعليه : $x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi$ و $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$

إذن : $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k}{3}(3\pi)$ و $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$

ومنه : $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \quad ; \quad k \in Z$

المعادلة : $\tan 3x = \tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ تكافئ :

$3x = x + \frac{\pi}{3} + k'\pi$ أي $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k'}{2}\pi$.

ويكون حلا للمعادلة إذا كان : $\frac{\pi}{6} + \frac{k'\pi}{2} \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$

أي : $3k' \neq 2k$ أي يكون k' عدد صحيح فردي .

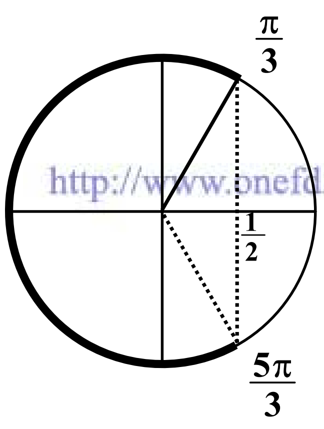
- حل المتراجحة المثلثية :

مثال1 :

حل في $\left[0 ; 2\pi\right]$ المتراجحة : $2 \cos x - 1 < 0$

الحل :

لدينا : $\cos x < \frac{1}{2}$



ونعلم أن: $\cos \frac{5\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

وعليه يكون $\cos x < \dfrac{1}{2}$

عندما يكون x في المجال $\left]\dfrac{\pi}{3} \; ; \; \dfrac{5\pi}{3}\right[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة هي : $S = \left]\dfrac{\pi}{3} \; ; \; \dfrac{5\pi}{3}\right[$.

مثال2 :

حل في $[0 \; ; \pi]$ المتراجحة : $2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

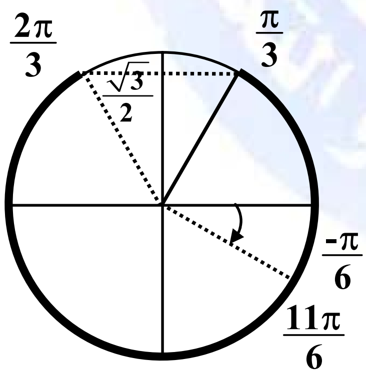
الحل :

لدينا : $0 \leq x \leq \pi$ و عليه : $0 \leq 2x \leq 2\pi$

ومنه : $\dfrac{-\pi}{6} \leq 2x - \dfrac{\pi}{6} \leq 2\pi - \dfrac{\pi}{6}$

و بوضع : $2x - \dfrac{\pi}{6} = y$ نجد : $\dfrac{-\pi}{6} \leq y \leq \dfrac{11\pi}{6}$

ومنه نحل المتراجحة :



$\sin y < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ حيث : $\dfrac{-\pi}{6} \leq y \leq \dfrac{11\pi}{6}$

نعلم أن: $\sin\dfrac{\pi}{3} = \sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

إذن تكون $\sin y < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ عندما يكون:

$\dfrac{-\pi}{6} \leq y \leq \dfrac{\pi}{3}$ أو $\dfrac{2\pi}{3} \leq y \leq \dfrac{11\pi}{6}$

إذن : $\dfrac{-\pi}{6} \leq 2x - \dfrac{\pi}{6} \leq \dfrac{\pi}{3}$ أو $\dfrac{2\pi}{3} \leq 2x - \dfrac{\pi}{6} \leq \dfrac{11\pi}{6}$

و منه : $0 \leq 2x \leq \dfrac{\pi}{2}$ أو $\dfrac{5\pi}{6} \leq 2x \leq 2\pi$

و عليه : $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ أو $\frac{5\pi}{12} \leq x \leq \pi$

إذن مجموعة الحلول هي : $S = \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{12} ; \pi\right]$

V. دساتير التحويل :

من أجل كل عددين حقيقيين a وb لدينا :

1) $\cos(a+b) = \cos a . \cos b - \sin a . \sin b$

2) $\cos(a-b) = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b$

3) $\sin(a+b) = \sin a . \cos b + \cos a . \sin b$

4) $\sin(a-b) = \sin a . \cos b - \cos a . \sin b$

تطبيقات : احسب $\cos \frac{\pi}{12} ; \sin \frac{5\pi}{12}$

الحل :

* لدينا : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ و منه :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} . \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} . \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2}$$

إذن: $\boxed{\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$.

* لدينا : $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ و منه :

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

إذن : $\boxed{\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$.

بجمع الدستورين (1) و (2) نجد :

5) $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cdot \cos b$

بطرح الدستورين (1) و (2) نجد :

6) $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \cdot \sin b$

بجمع الدستورين (3) و (4) نجد :

7) $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cdot \cos b$

بطرح (4) و (3) نجد :

8) $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \cdot \sin b$

بوضع $a+b=x$ و $a-b=y$ ؛ نجد: $a = \frac{x+y}{2}$; $b = \frac{x-y}{2}$

وعليه :

9) $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

10) $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

11) $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

12) $$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) . \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

و بوضع $b = a$:

من الدستور (1) نجد : 13) $$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

لكن : $$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

و منه : $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ أو $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$

بالتعويض في الدستور (13) نجد :

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 \quad \text{أو} \quad \cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$$

من الدستور (3) نجد : 14) $$\sin(2a) = 2\sin a . \cos a$$

تطبيقات :

1) حل في $\Re$ المعادلة : $$\cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

الحل :

$$\cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{x + x - \frac{\pi}{2}}{2} . \cos\frac{x - x + \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$= 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

ومنه المعادلة تكافئ : $$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

أي : $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ أي : $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

وعليه: $\begin{cases} x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{-\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ أي : $k \in Z$ $\begin{cases} x = \dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$

إذن مجموعة الحلول هي :

$$S = \left\{ \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \ , \ \frac{-\pi}{12} + 2k\pi \ ; k \in Z \right\}$$

2) احسب $\cos \dfrac{\pi}{12}$

الحل : لدينا : $\cos\left(2 \times \dfrac{\pi}{12}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) - 1$

أي : $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) - 1$ وعليه :

$\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+1}{2} = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ أي : $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}$

ومنه: $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ أي: $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{8+4\sqrt{3}}{16}$

إذن : $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 \,.\, \sqrt{2} \,.\, \sqrt{6} + \left(\sqrt{6}\right)^2}{16}$

أي : $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{16}$ و بما أن : $0 < \dfrac{\pi}{12} < \dfrac{\pi}{2}$

فإن : $\cos \dfrac{\pi}{12} > 0$ ومنه : $\boxed{\cos \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$.

(*) - حل المعادلة من الشكل : $a\cos x + b\sin x = c$

1) تحويل العبارة : $a\cos x + b\sin x$

لدينا : $a\ cos\ a + b\ sin\ x = \sqrt{a^2+b^2}\ cos\ (x-\theta)$

حيث : $\begin{cases} cos\ \theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin\ \theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

2) تصبح المعادلة : $\sqrt{a^2+b^2}\ cos\ (x-\theta) = \mathbf{c}$

وتحل بطريقة عادية .

مثال :

حل في $\Re$ المعادلة : $\sqrt{3}\ cos\ x + sin\ x = 1$

ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

الحل :

1) تحويل العبارة : $\sqrt{3}\ cos\ x + sin\ x$

$$\sqrt{3}\ cos\ x + sin\ x = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2}\ cos(x - \theta)$$

حيث : $\begin{cases} cos\ \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\ \theta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ أي : $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

ومنه : $\sqrt{3}\ cos\ x + sin\ x = 2cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

2) حل المعادلة : $2cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$

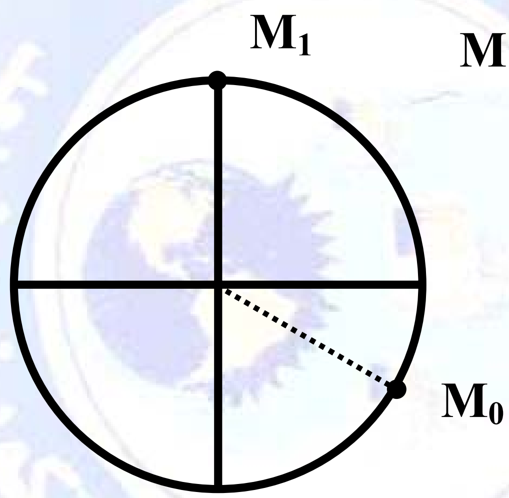
أي : $cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ ومنه : $cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = cos\dfrac{\pi}{3}$

إذن : $\begin{cases} x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \\ x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{-\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$ أي : $k\in\mathbb{Z}$ $\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=\dfrac{-\pi}{6}+2k\pi \end{cases}$

3) تمثيل الحلول على الدائرة المثلثية :

من أجل $k=0$: $x=\dfrac{\pi}{2}$ أو $x=\dfrac{-\pi}{6}$

وعليه صور الحلول على الدائرة المثلثية هما النقطتان : $M_0\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)$; $M_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$



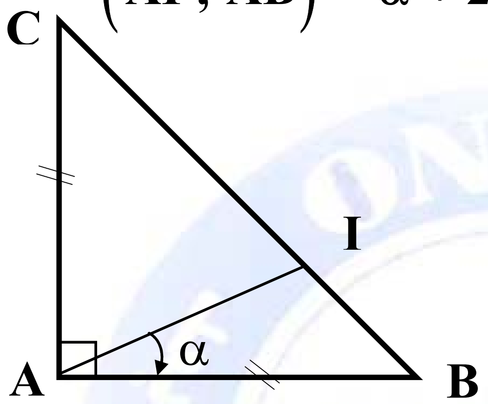
تمـاريـن و مشكلات

التمرين 1 .

ABC مثلث قائم و متساوي الساقين . I نقطة من $[BC]$ حيث :

$$\left(\overrightarrow{AI}\,,\overrightarrow{AB}\right)=\alpha+2k\pi \quad ; \quad \left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

حيث : $k\in Z \quad ; \quad \alpha\in\Re$

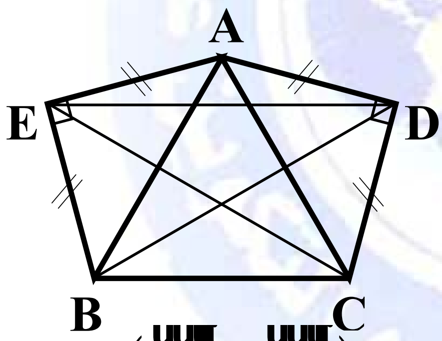


- احسب أقياس الزوايا التالية :

$$\left(\overrightarrow{AI}\,,\overrightarrow{AC}\right) ; \left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{BC}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{AI}\,,\overrightarrow{BC}\right)$$

التمرين 2 .



ABC مثلث متقايس الأضلاع.

ABE و ACD مثلثان

قائمان و متقايسا الساقين

- عين أقياس الزوايا الآتية :

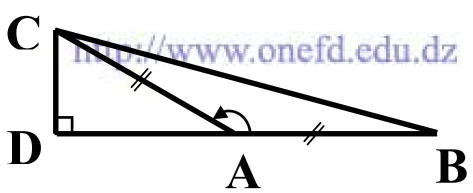
(1 $$\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right) ; \left(\overrightarrow{DC}\,,\overrightarrow{DA}\right) ; \left(\overrightarrow{EB}\,,\overrightarrow{EA}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{CB}\,,\overrightarrow{CD}\right) ; \left(\overrightarrow{AE}\,,\overrightarrow{AB}\right) ; \left(\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BE}\right)$$

(2 $$\left(\overrightarrow{EA}\,,\overrightarrow{ED}\right) ; \left(\overrightarrow{EA}\,,\overrightarrow{CB}\right) ; \left(\overrightarrow{EC}\,,\overrightarrow{BA}\right) ; \left(\overrightarrow{EC}\,,\overrightarrow{DB}\right)$$

التمرين 3 .

إليك الشكل المقابل حيث : AB = 2 Cm



$$\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right)=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \; ; k\in Z$$

1- احسب كل من :

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) \;;\; \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) \;;\; \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$$

2- احسب BC , DB , DA , DC .

- استنتج $sin\frac{\pi}{12}$; $cos\frac{\pi}{12}$

التمرين 4 .

ABC مثلث متقايس الأضلاع .

عين مجموعة النقـط M من المستوي بحيث :

1) $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right) = 0 + k(2\pi) \;;\; k \in Z$

2) $\left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2} + k(2\pi) \;;\; k \in Z$

3) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) = \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}\right) + k(2\pi) \;;\; k \in Z$

التمرين 5 .

مثل على الدائرة المثلثية النقط المرفقة بالأعداد الآتية عند لف المستقيم العددي على الدائرة المثلثية .

$$\frac{21\pi}{4} \;;\; \frac{25\pi}{6} \;;\; \frac{15\pi}{2} \;;\; \frac{3\pi}{2} \;;\; \frac{-13\pi}{3} \;;\; -5\pi$$

التمرين 6 .

- عين الأقياس الرئيسية للزوايا الموجهة التي إحدى أقياس كل منها :

$$\frac{1830\pi}{3} \;;\; \frac{177\pi}{4} \;;\; \frac{2007\pi}{5} \;;\; -13\pi \;;\; 120\pi \;;\; 99\pi \;;\; \frac{344\pi}{7}$$

التمرين 7 .

احسب $sin\,\alpha$; $cos\,\alpha$; $tan\,\alpha$ من أجل قيمة للعدد α فيما يلي:

1) $\alpha = \frac{2007\pi}{6}$ ؛ 2) $\alpha = \frac{1427\pi}{3}$ ؛ 3) $\alpha = \frac{-50\pi}{3}$.

4) $\alpha = 410\pi$ ؛ 5) $\alpha = \frac{1962\pi}{4}$ ؛ 6) $\alpha = -177\pi$.

التمرين 8 .

- عين على الدائرة المثلثية نقطة M مرفقة بالعدد الحقيقي x

حيث : $x \in \left]0 \,;\, \frac{\pi}{6}\right[$.

- عين النقط F , I , L , T , S المعينة بالأعداد :

$$-x \quad ; \quad \frac{\pi}{2} - x \quad ; \quad \frac{\pi}{2} + x \quad ; \quad \pi - x \quad ; \quad \pi + x$$

- احسب إحداثيي كل من هذه النقط بدلالة x و اذكر إشارة إحداثيي كل من هذه النقط .

التمرين 9 .

بسط العبارات التالية :

$$\cos\left(x + \frac{11\pi}{2}\right) \;;\; \sin\,(x + 4\pi) \;;\; \cos\,(x + 25\pi)$$

$$\cos\,(x + 2007\pi) \quad ; \quad \sin\left(\frac{15\pi}{2} - x\right)$$

التمرين 10 .

أكتب بدلالة $\tan x$ الأعداد الآتية :

$$\tan(x + 20\pi) \quad ; \quad \tan\left(x - \frac{13\pi}{2}\right) \quad ; \quad \tan(x + 13\pi)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad ; \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

التمرين 11 .

باستعمال آلة حاسبة : احسب القيم المدورة إلى 10^{-5} للأعداد الآتية :

$$\sin\frac{\pi}{15}\ ;\ \cos\frac{\pi}{7}\ ;\ \sin\frac{\pi}{5}\ ;\ \cos\frac{\pi}{5}$$

$$\cos\frac{13\pi}{5}\ ;\ \sin\frac{\pi}{10}\ ;\ \cos\frac{2\pi}{9}$$

التمرين 12 .

احسب $\sin x$ و $\tan x$ علما أن : $\frac{-\pi}{2} < x < 0$ وَ $\cos x = 0{,}3$

التمرين 13 .

احسب $\cos x$ إذا علمت أن : $\sin x = \frac{3}{5}$ وَ $x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$

التمرين 14 .

احسب $\cos x$ و $\tan x$ إذا علمت أن :

$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ وَ $\sin x = -0{,}6$

التمرين 15 .

نضع : $\cos x = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ وَ $x \in \left[\dfrac{\pi}{2} ; \pi\right]$

- ما هي القيمة الحقيقية لـ $\sin x$ ؟

التمرين 16 .

حل في المجال $[0 ; 2\pi]$ كل من المعادلات التالية :

$$1)\ \cos x = \frac{1}{2} \quad ; \quad 2)\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3)\ \sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad 4)\ \sin x = \frac{-1}{2}$$

التمرين 17 .

حل في $]-\pi , \pi]$ كل من المعادلات التالية ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

$$1)\ \sin(2x) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad 2)\ \cos(2x) = \frac{1}{2}$$

$$3)\ \cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad 4)\ \sin x = \frac{-1}{2}$$

التمرين 18 .

حل في المجال $[0 , \pi]$ المعادلة :

$$4\cos^2 x - 2\,(1 + \sqrt{2}\,)\,\cos x + \sqrt{2} = 0$$

التمرين 19 .

حل في المجال $[0 , 2\pi]$ كل من المتراجحات التالية ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية :

$$1)\ \cos x \leq 0 \quad ; \quad 2)\ \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad 3)\ \sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

التمرين 20 .

اكتب كل من العبارتين التاليتين بدلالة $\cos x$ وَ $\sin x$:

$$\sin(3x) \ ; \ \cos(4x)$$

التمرين 21 .

برهن على صحة المساويات الآتية :

$$1)\ \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x$$

$$2)\ 2\cos^4 x + 2\sin^4 x + \sin^2(2x) = 2$$

$$3)\ \cos^2 x \times \sin^2 x = \frac{1 - \cos 4x}{8}$$

التمرين 22 .

1) برهن أن : $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2) حل في $\mathfrak{R}$ المعادلة : $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

(*) **التمرين 23** .

1- بسط العبارة : $p(x) = \sin 2x + \sin x + \sin 3x$

2- حل في $\mathfrak{R}$ المعادلة : $p(x) = 0$.

(*) التمرين 24 .

1) اكتب العبارة : $p(x)=\cos x - \sqrt{3}\sin x$

على الشكل : $p(x)=a\cos(x-\theta)$

2) حل في $\Re$ المعادلة : $p(x)=0$.

3) حل في المجال $[0,\pi]$ المتراجحة : $p(x)\geq 0$

(*) التمرين 25 .

حل في $\Re$ المتراجحة : $\sin x - \sqrt{3}\cos x > \sqrt{2}$

يمكن وضع : $\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}$

(*) التمرين 26 .

حل في $\Re$ المعادلة : $\cos x + 3\sin x = 1$

يمكن إدخال عدد α حيث : $\tan\alpha = 3$.

التمرين 27 .

حل في $\Re$ المعادلة :

$$\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin^2\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)$$

ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية.

الحلـــــــــــول

التمرين 1 .

- حساب أقياس الزوايا :

$$1)\ \left(\overrightarrow{AI}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AI}\ ,\ \overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right) + 2k\pi \quad ; \quad k \in Z$$

و منه : $$\left(\overrightarrow{AI}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right) = \alpha + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad ; \quad k \in Z$$

$$2)\ \left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{BC}\right) = \pi + \left(\overrightarrow{BA}\ ,\ \overrightarrow{BC}\right) + 2k\pi \quad ; \quad k \in Z$$

و منه : $$\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{BC}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ,\ k \in Z$$

أي : $$\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{BC}\right) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad ; \quad k \in Z$$

$$3)\ \left(\overrightarrow{AI}\ ,\ \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AI}\ ,\ \overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{BC}\right) + 2k\pi \quad ; \quad k \in Z$$

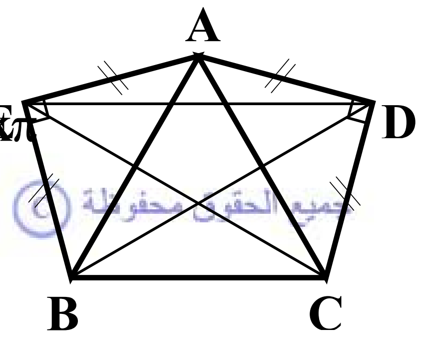
و منه : $$\left(\overrightarrow{AI}\ ,\ \overrightarrow{BC}\right) = \alpha + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad ; \quad k \in Z$$

التمرين 2 .

حساب أقياس الزوايا : (في كل مما يلي نأخذ : $k \in Z$)

$$1)\ \bullet\ \left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\bullet\ \left(\overrightarrow{DC}\ ,\ \overrightarrow{DA}\right) = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$$



- $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right)$

- $\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

- $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}\right) = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}\right)$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$$

2) • $\left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}\right) + \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE}\right) + \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}\right) = \pi + 2k\pi$

بما أن المثلث **AED** متساوي الساقين فإن :

$$\left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}\right) = \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE}\right)$$

و من الشكل نجد :

$$\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{10\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}$$

و منه : $2 \times \left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}\right) + \frac{5\pi}{6} = \pi$

وعليه : $-2 \times \left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED}\right) + \frac{5\pi}{6} = \pi$

أي : $-2 \times \left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED}\right) = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

إذن : $\boxed{\left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED}\right) = \frac{-\pi}{12} + 2k\pi}$.

- $\left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}\right) + \left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{CB}\right) + 2k\pi$

$$= \frac{-\pi}{2} + \left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}\right) + 2k\pi$$

$$= \frac{-\pi}{2} + \frac{-7\pi}{12} + 2k\pi$$

$$= \frac{-13\pi}{12} + 2k\pi$$

- $$\left(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EB}\right) + \left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{BA}\right) + 2k\pi$$

$$= \frac{-\pi}{4} + \pi + \left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA}\right) + 2k\pi$$

$$= \frac{-\pi}{4} + \pi + \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

- $$\left(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EB}\right) + \left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{BA}\right) + 2k\pi$$

$$= \frac{-\pi}{4} + \pi + \left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA}\right) + 2k\pi$$

$$= \frac{-\pi}{4} + \pi + \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

- $$\left(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{DB}\right) = \left(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DB}\right) + 2k\pi$$

$$= \frac{\pi}{2} + \pi + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}\right) + 2k\pi$$

$$= \frac{3\pi}{2} + \frac{-\pi}{6} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

التمرين 3 .

1) الحساب : (نعتبر فيما يلي $k \in \mathbb{Z}$)

في المثلث ABC لدينا :

$$\bullet \ \left(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\,,\,\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CA}\,,\,\overrightarrow{CB}\right)=\pi$$

و منه : $\dfrac{5\pi}{6}+2\times\left(\overrightarrow{BC}\,,\,\overrightarrow{BA}\right)=\pi$

لأن : $\left(\overrightarrow{BC}\,,\,\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{CA}\,,\,\overrightarrow{CB}\right)$

ومنه : $\left(\overrightarrow{BC}\,,\,\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{CA}\,,\,\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi$

$$\bullet \ \left(\overrightarrow{AC}\,,\,\overrightarrow{CB}\right)=\pi+\left(\overrightarrow{CA}\,,\,\overrightarrow{CB}\right)+2k\pi$$

$$=\pi+\frac{\pi}{12}+2k\pi$$

$$=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$$

2) الحساب :

في المثلث القائم DAC لدينا :

* $\left(\overrightarrow{AC}\,,\,\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ وَ $sin\ D\widehat{A}C=\dfrac{DC}{AC}$

ومنه: $sin\ \dfrac{\pi}{6}=\dfrac{DC}{2}$ إذن: $DC=2\times\dfrac{1}{2}$ أي: $\boxed{DC=1}$.

* $cos\ D\widehat{A}C=\dfrac{DA}{AC}$ ومنه : $cos\ \dfrac{\pi}{6}=\dfrac{DA}{2}$

وعليه : $DA=2\,cos\ \dfrac{\pi}{6}=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ أي : $\boxed{DA=\sqrt{3}}$.

* DB = DA + AB وعليه : $\boxed{DB=\sqrt{3}+2}$.

في المثلث القائم DCB لدينا : $BC^2=DB^2+DC^2$

ومنه : $BC^2=\left(\sqrt{3}+2\right)^2+\left(1\right)^2$ أي $BC^2=8+4\sqrt{3}$

إذن : $BC=\sqrt{8+4\sqrt{3}}$ أي : $\boxed{BC=2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

- استنتاج $\sin\frac{\pi}{12}$; $\cos\frac{\pi}{12}$:

في المثلث القائم DBC لدينا : $\widehat{\sin}\ DBC = \frac{DC}{BC}$

إذن :

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{8+2\sqrt{12}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2}\,.\,\sqrt{6} + \left(\sqrt{6}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2-6} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{-4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\ D\widehat{B}C = \frac{DB}{BC} = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}$$

و منه :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{18}+2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{2-6}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{-4}$$

$$= \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{-4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

التمرين 4 .

تعيين مجموعة النقط M :

$$\left(\overrightarrow{MB}\ ,\ \overrightarrow{MC}\right) = 0 + k\,(2\pi)\ ;\ \ k \in \mathbb{Z} \quad (1$$

تعني أن M نقطة من المستقيم (BC) باستثناء القطعة $[BC]$

ولتكن (γ_1) .

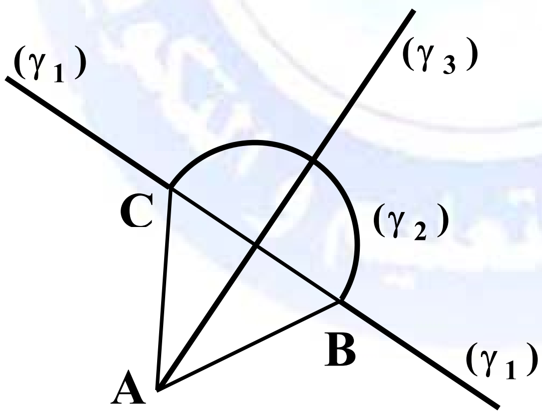
$$\left(\overrightarrow{MC}\ ,\ \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2} + k\,(2\pi)\ ;\ \ k \in \mathbb{Z} \quad (2$$

هذا يعني أن M نقطة من قوس الدائرة ذات القطر $[BC]$ باستثناء

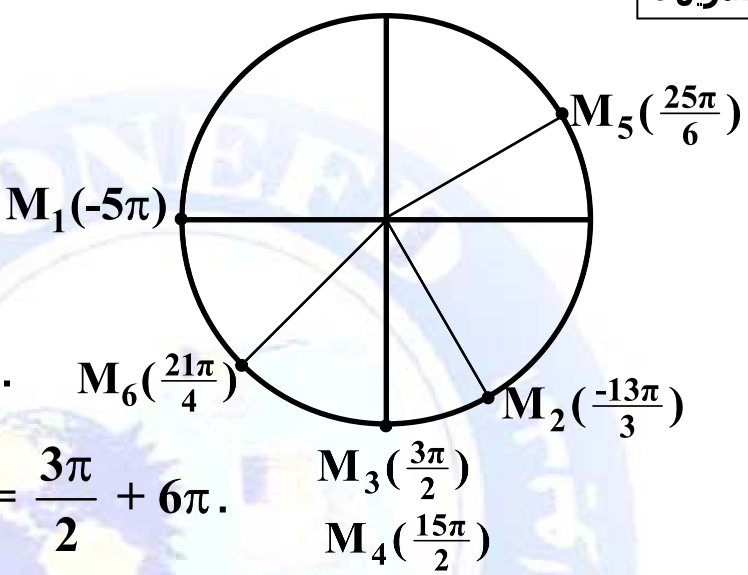
B وَ C ولتكن (γ_2).

$$\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AM}\right) = \left(\overrightarrow{AM}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right) + k\,(2\pi)\ ;\ \ k \in \mathbb{Z} \quad (3$$

هذا يعني أن M نقطة من منتصف الزاوية $\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right)$ باستثناء النقطة A ولتكن (γ_3) .



التمرين 5 .



- $-5\pi = -\pi - 4\pi$.
- $\frac{-13\pi}{3} = \frac{-\pi}{3} - 4\pi$.
- $\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 0 \times \pi$.
- $\frac{15\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 7\pi = \frac{3\pi}{2} + 6\pi$.
- $\frac{25\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 4\pi$.
- $\frac{21\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 5\pi = \frac{5\pi}{4} + 4\pi$.

التمرين 6 .

تعيين الأقياس الرئيسية :

1) لدينا : $\frac{1830\pi}{3} = \frac{(3 \times 610)\,\pi}{3} = 0 + 610\pi$

إذن القيس الرئيسي هو : 0 .

2) لدينا : $\frac{177\pi}{4} = \frac{(4 \times 44 + 1)\,\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 44\pi$

إذن القيس الرئيسي هو : $\frac{\pi}{4}$.

3) لدينا :
$$\frac{2007\pi}{5} = \frac{(5\times 401+2)\,\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} + 401\pi$$
$$= \frac{2\pi}{5} - \pi + 402\pi = \frac{-3\pi}{5} + 402\pi$$
إذن القيس الرئيسي هو : $\frac{-3\pi}{5}$.

4) لدينا : $-13\pi = \pi - 14\pi$ إذن القيس الرئيسي هو : π .

5) لدينا : $120\pi = 0 + 120\pi$ إذن القيس الرئيسي هو : 0 .

6) لدينا : $99\pi = \pi + 98\pi$ إذن القيس الرئيسي هو : π .

7) لدينا :
$$\frac{344\pi}{7} = \frac{(7\times 49 + 1)\,\pi}{7} = \frac{\pi}{7} + 49\pi$$
$$= \frac{\pi}{7} - \pi + 50\pi = \frac{-6\pi}{7} + 50\pi$$
إذن القيس الرئيسي هو : $\frac{-6\pi}{7}$.

التمرين 7 .

1) لدينا :
$$\alpha = \frac{2007\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 334\pi$$
ومنه : $\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ و $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

2) لدينا :
$$\alpha = \frac{1427\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 475\pi$$
$$= \frac{2\pi}{3} - \pi + 476\pi = \frac{-\pi}{3} + 476\pi$$
ومنه :
$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

3) لدينا : $\frac{-50\pi}{3} = \frac{-2\pi}{3} - 16\pi$

و منه :

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{-50\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\sin\frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

4) لدينا : $\alpha = 410\pi = 0 + 410\pi$

و منه : $\cos\alpha = \cos 0 = 1 \quad ; \quad \sin\alpha = \sin 0 = 0$

5) لدينا : $\frac{1962\pi}{2} = \frac{981\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 490\pi$

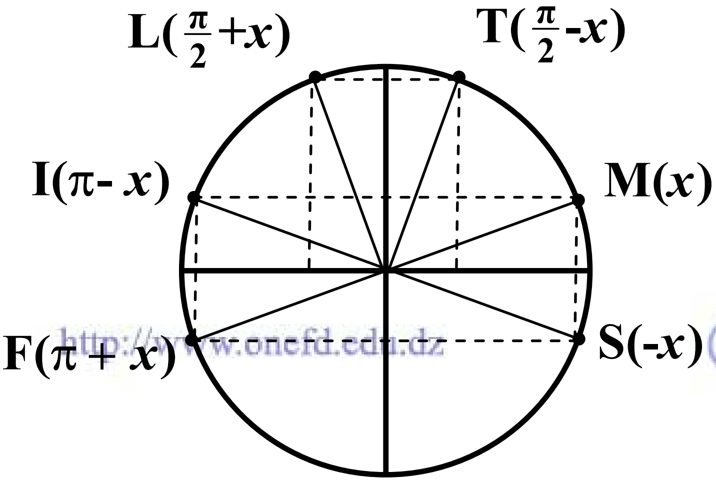
و منه : $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad ; \quad \sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

6) لدينا : $\alpha = -177\pi = \pi - 188\pi$

و منه : $\cos\alpha = \cos\pi = -1 \quad ; \quad \sin\alpha = \sin\pi = 0$

التمرين 8 .

1) تعيين النقط



2) تعيين إحداثيات النقط :

لدينا : $S\left(\cos(-x) , \sin(-x)\right)$; $M(\cos x , \sin x)$

$L\left(\cos(\frac{\pi}{2}+x) , \sin(\frac{\pi}{2}+x)\right)$; $T\left(\cos(\frac{\pi}{2}-x) , \sin(\frac{\pi}{2}-x)\right)$

$F\left(\cos(\pi+x) , \sin(\pi+x)\right)$; $I\left(\cos(\pi-x) , \sin(\pi-x)\right)$

وباستعمال العلاقات المذكورة في الدرس نجد :

$$M(\cos x , \sin x) \quad ; \quad S(\cos x , -\sin x)$$

$$T(\sin x , \cos x) \quad ; \quad L(-\sin x , \cos x)$$

$$I(-\cos x , \sin x) \quad ; \quad F(-\cos x , -\sin x)$$

إشارة الإحداثيات :

* إحداثيي M موجبين .   * فاصلة S موجبة وترتيبها سالبة .

* إحداثيي T موجبين .   * فاصلة L سالبة وترتيبها موجبة .

* إحداثيي F سالبين .   * فاصلة I سالبة وترتيبها موجبة .

التمرين 9 .

تبسيط العبارات التالية :

1) $\cos(x+25\pi) = \cos(x+\pi+24\pi) = \cos(x+\pi) = -\cos x$

2) $\sin(x+4\pi) = \sin x$

3) $$\cos\left(x+\frac{11\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{(2\times5+1)\pi}{2}\right)$$

$$=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}+5\pi\right)$$

$$=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}+\pi+4\pi\right)$$

و منه : $$\cos\left(x+\frac{11\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}+\pi+4\pi\right)$$

$$= \cos\left(x+\frac{\pi}{2}+\pi\right) = -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$4)\ \sin\left(\frac{15\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{(2\times 7+1)\pi}{2}-x\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}+7\pi-x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x+\pi+6\pi\right)$$

$$= \sin\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\cos x$$

$$5)\ \cos(x+2007\pi) = \cos(x+\pi+2006\pi)$$

$$= \cos(x+\pi) = -\cos x$$

التمرين 10 .

- $\tan(x+13\pi) = \tan x$
- $\tan\left(x-\frac{13\pi}{2}\right) = \tan\left(x-\frac{(2\times 6+1)\pi}{2}\right)$

$$= \tan\left(x-\frac{\pi}{2}-6\pi\right) = \tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \tan\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \underbrace{-\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}_{=-\cot x}$$

- $\tan(x+20\pi) = \tan x$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \dfrac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x$

$$\bullet\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

التمرين 11 .

القيم المدورة إلى 10^{-5} :

$$\cos\frac{\pi}{5}\approx 0{,}99995\quad ;\quad \sin\frac{\pi}{5}\approx 0{,}00987$$

$$\cos\frac{\pi}{7}\approx 0{,}99998\quad ;\quad \sin\frac{\pi}{15}\approx 0{,}00329$$

$$\cos\frac{2\pi}{9}\approx 0{,}99994\quad ;\quad \sin\frac{\pi}{10}\approx 0{,}00493$$

$$\cos\frac{13\pi}{5}\approx 0{,}99178\ .$$

التمرين 12 .

*** حساب $\sin x$:**

لدينا : $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ و منه : $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

إذن : $\sin^2 x=1-(0{,}3)^2$ أي : $\sin^2 x=0{,}91$

إذن : $\sin x=\sqrt{0{,}91}$ أو $\sin x=-\sqrt{0{,}91}$

لكن : $\frac{-\pi}{2}<x<0$ وعليه : $\sin x=-\sqrt{0{,}91}$

لأن : $\sin x<0$ إذن : $\sin x\approx -0{,}95$

*** حساب $\tan x$:**

لدينا : $\tan x=\frac{\sin x}{\cis x}$ وعليه : $\tan x\approx\frac{-0{,}95}{0{,}3}\approx -3{,}18$

التمرين 13 .

لدينا : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ و عليه : $\cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$

إذن : $\cos^2 x = \frac{16}{25}$ وعليه : $\cos x = \frac{4}{5}$ أو $\cos x = \frac{-4}{5}$

لكن : $x \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$ أي : $\cos x \geq 0$ ومنه : $\cos x = \frac{4}{5}$.

التمرين 14 .

- لدينا : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ وعليه : $\cos^2 x = 1 - (-0,6)^2$

إذن : $\cos^2 x = 0,64$ وعليه : $\cos x = 0,8$ أو $\cos x = - 0,8$

لكن $x \in \left[\frac{3\pi}{2} , 2\pi\right]$ وعليه : $\cos x \geq 0$ إذن : $\cos x = 0,8$

- لدينا : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{- 0,6}{0,8} = \frac{- 6}{8}$ إذن : $\tan x = \frac{-3}{4}$

التمرين 15 .

لدينا : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ وعليه :

$$\sin^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6 - 2\sqrt{6}.\sqrt{2} + 2}{16}$$

$$= \frac{16 - 8 + 2\sqrt{6}.\sqrt{2}}{16} = \frac{8 + 2\sqrt{6}.\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin^2 x = \frac{\left(\sqrt{6}\right)^2 + 2\sqrt{6}.\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2}{4} = \frac{\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)^2}{4}$$

إذن : $\sin x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ أو $\sin x = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

وبما أن : $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ فإن : $\sin x > 0$

وعليه : $\sin x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

التمرين 16 .

حل المعادلات في $[0, 2\pi]$:

1) لدينا : $\cos x = \frac{1}{2}$ وهي تكافئ : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

وعليه : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ $; k \in \mathbb{Z}$

بوضع : $k = 0$ نجد : $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{-\pi}{3}$ (مرفوض)

بوضع : $k = 1$ نجد : $x = \frac{5\pi}{3}$ أو $x = \frac{7\pi}{3}$ (مرفوض)

إذن مجموعة الحلول في المجال $[0, 2\pi]$ هي :

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}}.$$

2) لدينا : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و هي تكافئ : $\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$

وعليه : $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} ; k \in Z$

من أجل : $k = 0$: نجد $x = \dfrac{\pi}{6}$ أو $x = \dfrac{-\pi}{6}$ (مرفوض)

من أجل : $k = 1$: نجد $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi$ (مرفوض) أو $x = \dfrac{11\pi}{6}$

إذن مجموعة الحلول في المجال $[0 , 2\pi]$ هي :

$\boxed{S = \left\{\dfrac{\pi}{6} , \dfrac{11\pi}{6}\right\}}$.

3) لدينا : $sin\ x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ وهي تكافئ : $sin\ x = sin\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)$

و عليه: $; k \in Z$ $\begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \pi + \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

لما : $k = 0$: نجد $x = \dfrac{-\pi}{4}$ (مرفوض) أو $x = \dfrac{5\pi}{4}$

لما : $k = 1$: نجد $x = \dfrac{7\pi}{4}$ أو $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi$ (مرفوض)

إذن مجموعة الحلول في المجال $[0 , 2\pi]$ هي :

$\boxed{S = \left\{\dfrac{5\pi}{4} , \dfrac{7\pi}{4}\right\}}$.

4) لدينا : $sin\ x = -\dfrac{1}{2}$ وهي تكافئ : $sin\ x = sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)$

و عليه: $; k \in Z$ $\begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \pi + \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

لما : $k = 0$ نجد : $x = \dfrac{-\pi}{6}$ (مرفوض) أو $x = \dfrac{7\pi}{6}$

لما : $k = 0$ نجد : $x = \dfrac{11\pi}{6}$ أو $x = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi$ (مرفوض)

إذن مجموعة الحلول في المجال $[0 , 2\pi]$ هي :

$$\boxed{S = \left\{\frac{7\pi}{6} , \frac{11\pi}{6}\right\}}$$.

التمرين 17 .

حل المعادلات في المجال $]-\pi , \pi[$:

1) $sin\ 2x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ وهي تكافئ : $sin\ 2x = sin\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)$ وعليه:

$; k \in Z$ $\begin{cases} 2x = \dfrac{-\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = \pi + \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ وعليه : $\begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}$

لما : $k = 0$ نجد : $x = \dfrac{-\pi}{6}$ أو $x = \dfrac{2\pi}{3}$

لما : $k = 1$ نجد : $x = \dfrac{5\pi}{6}$ أو $x = \dfrac{2\pi}{3} + \pi$ (مرفوض)

إذن مجموعة الحلول في المجال $]-\pi , \pi[$ هي :

$$\boxed{S = \left\{\frac{-\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right\}} .$$

2) لدينا : $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ وهي تكافئ : $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$

إذن : $\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$; $k \in Z$ وعليه : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$

لما : $k = 0$ نجد : $x = \frac{\pi}{6}$ أو $x = \frac{-\pi}{6}$

لما : $k = 1$ نجد : $x = \frac{\pi}{6} + \pi$ (مرفوض) أو $x = \frac{5\pi}{6}$

إذن مجموعة الحلول في المجال $]-\pi, \pi[$ هي :

$$\boxed{S = \left\{\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}} .$$

3) لدينا : $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ وهي تكافئ : $\cos x = \cos\frac{5\pi}{6}$ وعليه :

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} ; k \in Z$$ و منه :

لما : $k = 0$ نجد : $x = \frac{5\pi}{6}$ أو $x = \frac{-5\pi}{6}$

$$\boxed{S = \left\{\frac{-5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}} .$$

4) لدينا : $\sin x = \frac{-1}{2}$ وهي تكافئ : $\sin x = \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

وعليه : $\begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \pi + \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ $; k \in Z$

لما : $k = 0$ نجد : $x = \dfrac{-\pi}{6}$ أو $x = \dfrac{7\pi}{6}$ (مرفوض)

لما : $k = 1$ نجد : $x = \dfrac{-\pi}{6} + 2\pi$ (مرفوض) أو $x = \dfrac{-5\pi}{6}$

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{-5\pi}{6}\right\}}.$$

التمرين 18 .

حل في المجال $[0, \pi]$ المعادلة :

$$4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} = 0$$

بوضع $\cos x = y$ نجد : $4y^2 - 2(1+\sqrt{2})y + \sqrt{2} = 0$

لدينا : $\Delta' = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 - 4\left(\sqrt{2}\right)$

$$= 1 - 2\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(1 - \sqrt{2}\right)^2$$

وعليه : $\sqrt{\Delta'} = 1 - \sqrt{2}$

إذن للمعادلة حلين هما :

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}{4} \quad ; \quad y_2 = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2}-1}{4}$$

أي : $y_1 = \dfrac{1}{2} \quad ; \quad y_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

وعليه : $cos\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $cos\ x = \frac{1}{2}$

* $cos\ x = \frac{1}{2}$ تكافئ : $cos\ x = cos\ \frac{\pi}{3}$

و منه : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ $; k \in Z$

* $cos\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ تكافئ : $cos\ x = cos\ \frac{\pi}{4}$

ومنه : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ $; k \in Z$

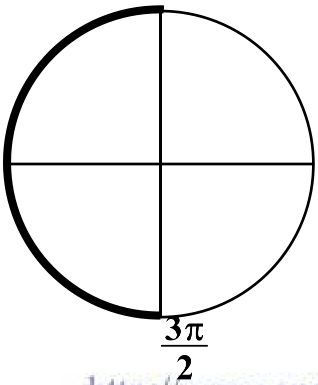
من أجل $k = 0$ نجد : $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{\pi}{4}$

إذن مجموعة الحلول في المجال $[0 , \pi]$: $S = \left\{\frac{\pi}{3} , \frac{\pi}{4}\right\}$

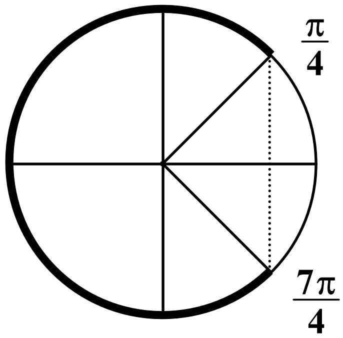
التمرين 19 .

حل في المجال $[0 , 2\pi]$ المتراجحة :

1) $cos\ x \le 0$ معناه : $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$



وعليه : $S = \left[\frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2}\right]$



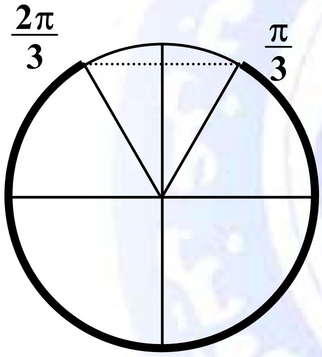
2) $\cos x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$:

لدينا : $\cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

وعليه : $x \in \left[\frac{\pi}{4} , \frac{7\pi}{4}\right]$

$$S = \left[\frac{\pi}{4} , \frac{7\pi}{4}\right]$$

3) $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، لدينا : $\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



وعليه : $x \in \left[\frac{\pi}{3} , \frac{2\pi}{3}\right]$

$$S = \left[\frac{\pi}{3} , \frac{2\pi}{3}\right]$$

التمرين 20 .

الكتابة بدلالة $\sin x$ وَ $\cos x$:

1) $\sin(3x) = \sin(2x + x)$

$$= \sin(2x).\cos x + \cos(2x).\sin x$$
$$= \left(2\sin x.\cos x\right).\cos x + \left(1 - 2\sin^2 x\right).\sin x$$
$$= 2\sin x.\cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x$$

2) $\cos(4x) = \cos(2 \times 2x)$

$$= 1 - 2.\sin^2(2x)$$
$$= 1 - 2 \times \left(2.\sin x.\cos x\right)^2$$
$$= 1 - 8.\sin^2 x.\cos^2 x$$

التمرين 21 .

1) $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$= (\cos 2x) . (1) = \cos 2x$$

2) $P(x) = 2\cos^4 x + 2\sin^4 x + \sin^2 2x$

$$= 2 \cos^4 x + 2 \sin^4 x + (2 \sin x . \cos x)^2$$

$$= 2 \left[(\cos^2 x)^2 + 2\sin^2 x . \cos^2 x + (\sin^2 x)^2\right]$$

$$= 2 \left[(\cos^2 x + \sin^2 x)^2\right] = 2 \times 1 = 2$$

3) $\left(\cos^2 x\right)\times\left(\sin^2 x\right) = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} \times \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$$= \frac{1 - (\cos 2x)^2}{4}$$

$$= \frac{1 - \left(\dfrac{1 + \cos 4x}{2}\right)}{4} = \frac{2 - 1 - \cos 4x}{8}$$

$$= \frac{1 - \cos 4x}{8}$$

التمرين 22 .

1) الإثبات :

$$\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times \left[\cos x . \cos\frac{\pi}{4} + \sin x . \sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\ \cos\ x + \frac{\sqrt{2}}{2}\ \sin\ x\right]$$

$$= \cos\ x\ +\ \sin\ x = \mathrm{p}(x)$$

2) حل المعادلة : $\mathrm{p}(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

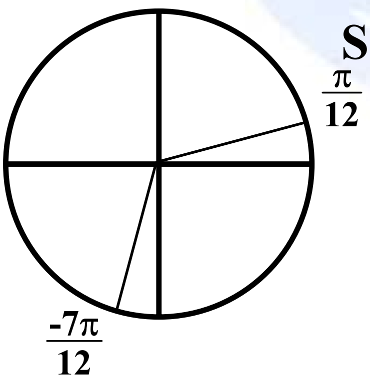
$\mathrm{p}(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ تكافئ : $\sqrt{2}\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

وعليه : $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ أي : $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}$

ومنه : $; \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3} + 2\mathrm{k}\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{-\pi}{3} + 2\mathrm{k}\pi \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12} + 2\mathrm{k}\pi \\ x = \dfrac{-7\pi}{12} + 2\mathrm{k}\pi \end{cases}$ إذن مجموعة الحلول هي :

$$\mathrm{S} = \left\{\frac{\pi}{12} + 2\mathrm{k}\pi\ ,\ \frac{-7\pi}{12} + 2\mathrm{k}\pi\ \ ; \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\}$$



تمثيل الحلول على الدائرة المثلثية :

• $: \mathrm{k} = 0$ $\quad x = \dfrac{\pi}{12}$ أو $x = \dfrac{-7\pi}{12}$

(*) $\boxed{\text{التمرين 23}}$.

1) تبسيط $\mathrm{p}\ (x)$:

$$\mathrm{p}(x) = \sin 2x + \sin x + \sin 3x$$

$$= \sin 2x + 2\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)$$

$$= \sin 2x + 2\sin 2x \, . \, \cos(-x)$$

ومنه : $p(x) = \sin 2x(1+2\cos x)$

2) حل المعادلة : $p(x) = 0$:

$p(x) = 0$ تكافئ : $\sin 2x = 0$ أو $1 + 2\cos x = 0$

أي : $\sin 2x = 0$ أو $\cos x = \frac{-1}{2}$

* $\sin 2x = 0$ تكافئ : $2x = k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$ أي : $x = \frac{k\pi}{2}$

* $\cos x = \frac{-1}{2}$ تكافئ : $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

وعليه : $\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \; ; k \in \mathbb{Z}$

ومنه حلول المعادلة هي :

$$S = \left\{ \frac{k\pi}{2} , \frac{2\pi}{3} + 2k\pi , \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(*) **التمرين 24** .

كتابة $p(x)$ على الشكل : $a\cos(x-\theta)$

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2}\,\cos(x-\theta)$$

$$= 2\cos(x-\theta)$$

حيث : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ أي: $\theta = \dfrac{-\pi}{3}$

ومنه : $\cos x - \sqrt{3}\ \sin x = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

2) حل المعادلة : $p(x) = 0$

و تكافئ : $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$ أي : $x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

و منه : $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي : $S = \left\{\dfrac{\pi}{6} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3) حل في $[0\ ,\ \pi]$ المتراجحة : $p(x) \geq 0$

أي : $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \geq 0$

لدينا : $0 \leq x \leq \pi$ وعليه : $\dfrac{\pi}{3} \leq x + \dfrac{\pi}{3} \leq \dfrac{4\pi}{3}$

وتصبح المتراجحة : $\cos y \geq 0$ مع $\dfrac{\pi}{3} \leq y \leq \dfrac{4\pi}{3}$

ومنه : $\cos y \geq 0$ تكافئ : $\dfrac{\pi}{3} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$

وبالتالي : $\dfrac{\pi}{3} \leq x + \dfrac{\pi}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ إذن : $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{6}$

إذن مجموعة حلول المتراجحة في المجال $[0\ ,\ \pi]$ هي: $S = \left[0\ ,\ \dfrac{\pi}{6}\right]$

(*) **التمرين 25** .

حل المتراجحة : $\sin x - \sqrt{3}\ \cos x > \sqrt{2}$

بوضع : $\sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$ نجد : $\sin x - \tan\frac{\pi}{3}\cos x > \sqrt{2}$

إذن : $\sin x - \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} . \cos x > \sqrt{2}$

وعليه : $\dfrac{\cos\frac{\pi}{3}.\sin x - \sin\frac{\pi}{3}.\cos x}{\cos\frac{\pi}{3}} > \sqrt{2}$

وعليه : $\sin x .\cos\frac{\pi}{3} - \cos x .\sin\frac{\pi}{3} > \sqrt{2}.\cos\frac{\pi}{3}$

وعليه : $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$

نضع : $x - \frac{\pi}{3} = y$ وعليه : $\sin y > \frac{\sqrt{2}}{2}$

ولدينا : $\sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن : $\sin y > \frac{\sqrt{2}}{2}$ معناه : $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < y < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

حيث : $k \in \mathbb{Z}$ وعليه : $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{3} < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

إذن : $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

وبالتالي : $\frac{7\pi}{12} + 2k\pi < x < \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

و منه مجموعة الحلول هي اتحاد كل المجالات من الشكل :

$$\left[\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \ ; \ \frac{13\pi}{12} + 2k\pi\right]$$ لما **k** يمسح كل الأعداد الصحيحة**Z**

(*) **التمرين 26** .

حل المعادلة $\cos x + 3\sin x = 1$

بوضع $\tan\alpha = 3$ نجد : $\cos x + \tan\alpha . \sin x = 1$

إذن : $\cos x + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} . \sin x = 1$

وعليه : $\dfrac{\cos\alpha . \cos x + \sin\alpha . \sin x}{\cos\alpha} = 1$

إذن : $\dfrac{\cos(x - \alpha)}{\cos\alpha} = 1$ وبالتالي : $\cos(x - \alpha) = \cos\alpha$

وعليه : $\begin{cases} x - \alpha = \alpha + 2k\pi \\ x - \alpha = -\alpha + 2k\pi \end{cases} ; \ k \in Z$

ومنه : $\begin{cases} x = 2\alpha + 2k\pi \\ x = 2k\pi \end{cases} ; \ k \in Z$

$$S = \{2\alpha + 2k\pi \ , \ 2k\pi \ ; k \in Z\}$$

حيث : $\alpha = 1,25 \text{ rd}$

التمرين 27 .

حل المعادلة : $\cos^2\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(-x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

وتكافئ : $\cos^2\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) - \sin^2\left(-x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ وعليه :

$$\left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=0$$

وعليه إما : (1) . . . $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

و إما : (2) . . . $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

(1) تكافئ : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)$

وعليه : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x-\frac{\pi}{4}\right)$

أي : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ ومنه :

$$\begin{cases} 2x+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+x+2k\pi \\ 2x+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}-x+2k\pi \end{cases} ; k\in\mathbb{Z}$$

أي :

$$\begin{cases} x=\frac{-\pi}{4}+2k\pi \\ x=\frac{-\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

(2) تكافئ $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)$

وعليه : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

إذن : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{4}\right)$

أي : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$ **ومنه :**

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4} - x + 2k\pi \\ 2x + \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{3\pi}{4} + x + 2k\pi \end{cases} ; k \in Z$$

أي :

$$\begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \dfrac{-5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

و بالتالي :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3} \\ x = \dfrac{-5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

إذن مجموعة الحلول هي :

$$S = \left\{ \frac{-\pi}{4} + 2k\pi \; ; \; \frac{-\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \; ; \; \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \; ; \; \frac{-5\pi}{4} + 2k\pi \; ; k \in Z \right\}$$

تمثيل الحلول على الدائرة المثلثية :

$$k = 0 : \quad x = \frac{-\pi}{4} \; , \; x = \frac{\pi}{12} \; , \; x = \frac{-5\pi}{4}$$

$$k = 1 : \quad x = \frac{5\pi}{12} \; , \; x = \frac{3\pi}{4} \; , \; x = \frac{7\pi}{4}$$

$$k = 2 : \quad x = \frac{13\pi}{12} \; , \; x = \frac{17\pi}{12}$$