عموميات على الدوال

الكفاءات المستهدفة

تعيين مجموعة تعريف دالة.

استعمال الحسابية البيانية لرسم منحنى دالة

دراسة تغيرات دالة

التعرف على شفعية دالة(اختصار مجال الدراسة،عناصر التناظر)

الانتقال من منحنى إلى آخر

التعرف عن الدالة

دوال مألوفة f إن كانت : مجموع ، جداء ، مركب

تصميم الدرس

- تعاريف
- مشاكل و تمارين
- الحلول

تعاريف

I - تذكير على الدوال :

نرمز عادة بـ D_f لمجموعة تعريف الدالة f

و بـ $\left(C_f\right)$ إلى منحنى الدالة f في معلم مختار.

1- الدالة – مجموعة التعريف :

إذا كانت f دالة و D_f مجموعة تعريفها .

لكل عدد حقيقي x من D_f . الدالة f ترفق عدد حقيقي وحيد نرمز له بـ $f(x)$. نقول عن $f(x)$ صورة x بالدالة f .

2- المنحنى الممثل لدالة :

f دالة معرفة على مجموعة D . المنحنى الممثل للدالة f في معلم هو مجموعة النقط $M\left(x\,;f(x)\right)$ حيث x عنصر من D إذن : قولنا

$M\left(x\,;y\right)$ ينتمي إلى منحنى "f" يعني : $x \in \mathbf{D}$ وَ $y = f(x)$.

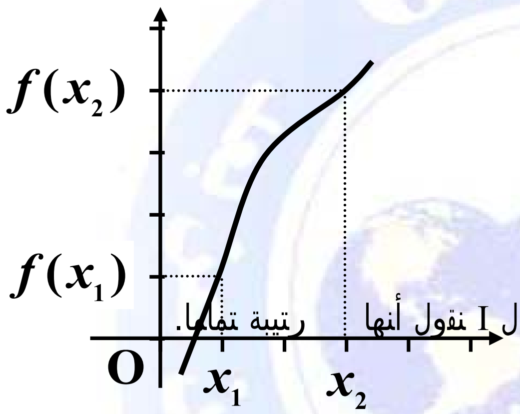
نقول عن : $y = f(x)$ هي معادلة لهذا المنحنى في المعلم المعطى.

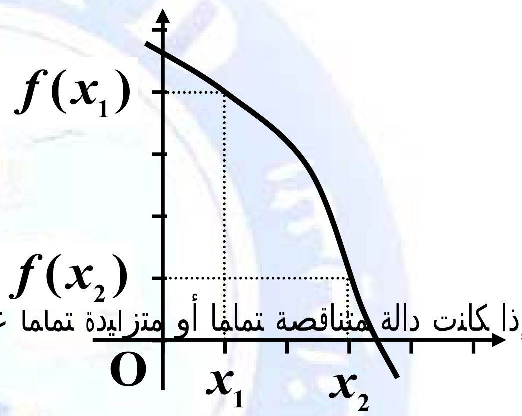
3- اتجاه التغير :

نقول عن الدالة f أنها متزايدة تماما على مجال I . إذا كان :

من أجل كل x_1 و x_2 من I : $x_1 < x_2$ يستلزم $f(x_1) < f(x_2)$ و بالمثل نعرف دالة متناقصة تماما على المجال I :

$x_1 < x_2$ يستلزم $f(x_1) > f(x_2)$





- إذا كانت دالة متناقصة تماما أو متزايدة تماما على مجال I نقول أنها رتيبة تماما.

ملاحظة :

يمكن أن تكون دالة غير متناقصة و غير متزايدة على مجال.

4 - الدوال المرجعية :

تذكير بالدوال المرجعية التي درستها في السنة الأولى :

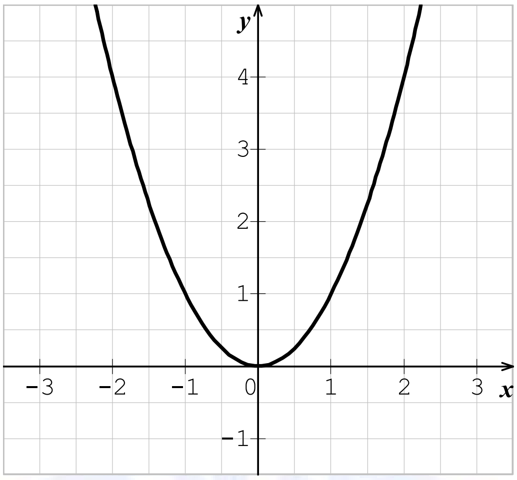
- الدالة " مربع " : $f : x \mapsto x^2$

f متناقصة تماما على $]-\infty \,;\, 0]$ ومتزايدة تماما على $[0 \,;\, +\infty[$

إذا كان : $0 \leq x_1 < x_2$ فإن : $x_1^2 < x_2^2$.

إذا كان : $x_1 < x_2 \leq 0$ فإن : $x_1^2 \geq x_2^2$

المنحنى الممثل للدالة هو قطع مكافئ .



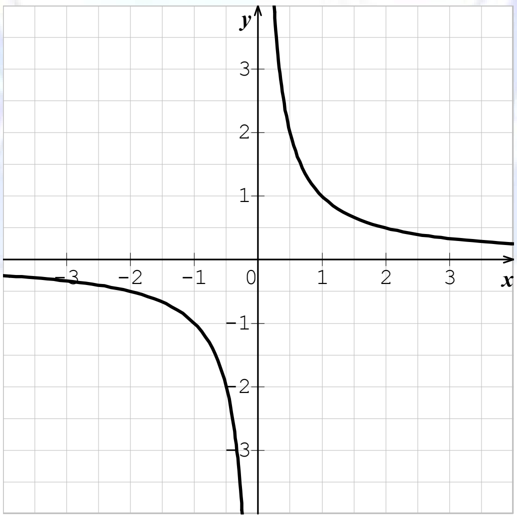
- الدالة " مقلوب" : $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

f متناقصة تماما على $]-\infty ; 0[$ و على $]0 ; +\infty[$

إذا كان : $0 < x_1 < x_2$ فإن : $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$

إذا كان : $x_1 < x_2 < 0$ فإن : $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$

المنحنى الممثل للدالة هو قطع زائد :

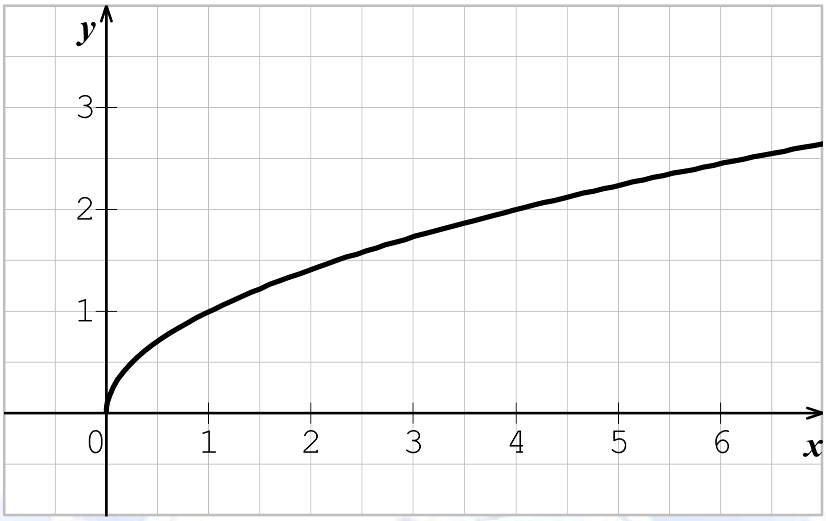


- **الدالة " الجذر التربيعي "** : $f : x \mapsto \sqrt{x}$

f متزايدة تماما على $[0 ; +\infty[$

إذا كان : $0 \leq x_1 < x_2$ فإن : $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$

المنحنى الممثل للدالة هو جزء من قطع مكافئ :

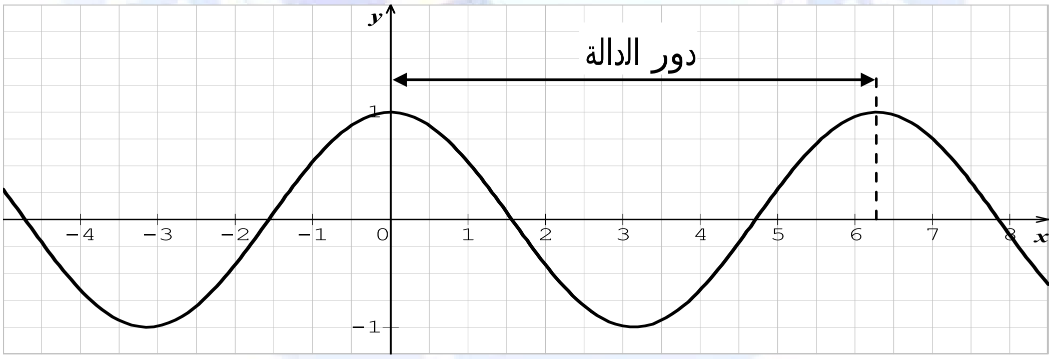


- الدالة " جيب التمام " : $f : x \mapsto \cos x$

الدالة f دورية ودورها : $T = 2\pi$ أي : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

و لذلك يكفى دراستها على مجال طوله 2π .

المنحنى الممثل للدالة هو :

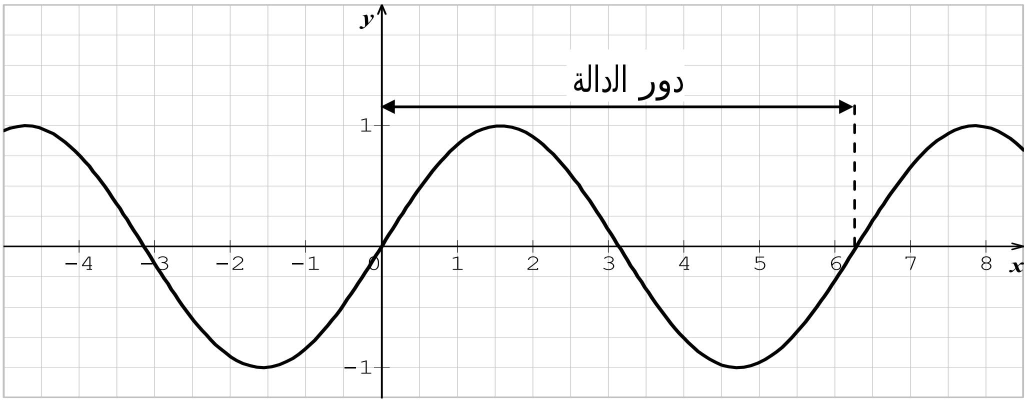


- **الدالة " جيب " :** $f : x \mapsto \sin x$

الدالة f دورية ودورها : $T = 2\pi$ أي : $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

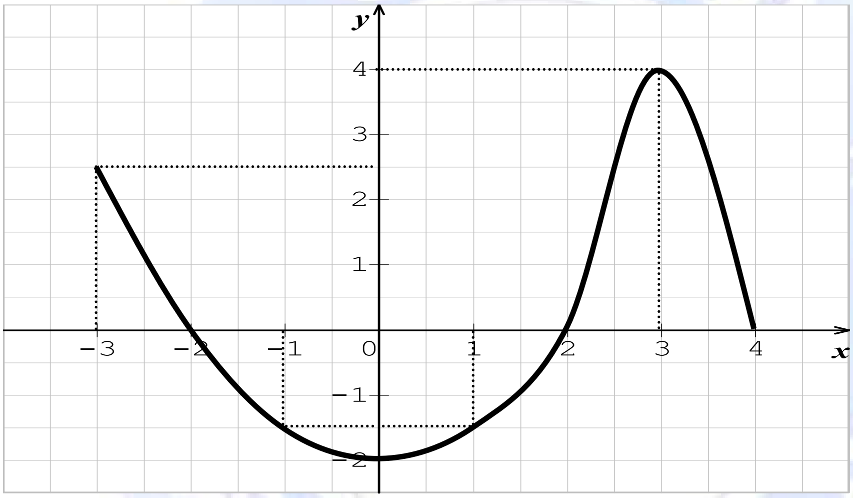
و لذلك يكفى دراستها على مجال طوله 2π .

المنحنى الممثل للدالة هو :



تمرين : (كيفية استعمال التمثيل البياني للدالة)

f دالة معرفة على المجال $\left[-3\ ;\ 4\right]$. تمثيلها البياني $\left(C_f\right)$ معطى بالشكل المقابل:



1- استعمل التمثيل البياني لتجيب على الأسئلة الآتية :

أ) أعط جدول تغيرات الدالة f على المجال [4 ; 3-]

ب) ما هي حلول المعادلة . $f(x) = 0$ ؟

ج) ما هي حلول المتراجحة ، $f\ (x)\ \geq\ 0$ ؟

2- ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 3$ ؟

3- لتكن m عدد حقيقي كيفي .

ناقش حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = m$

حـل :

1- أ) إذا كان المنحنى "ينزل" على مجال فإن الدالة متناقصة. وإذا كان "يصعد" الدالة متزايدة و منه جدول التغيرات :

x	-3		0		3		4
f	2,5	↘	-2	↗	4	↘	0

ب) لدينا : $f(x)=0$ يكافئ : $x=-2$ أو $x=2$ أو $x=4$

ج) لدينا : $f(x)\geq 0$ يكافئ : $x\in[-3\ ;\ -2]\cup[2\ ;\ 4]$

2- المعادلة : $f(x)=3$ تقبل حلين .

3- من قراءة البيان نجد :

من أجل : $m<-2$ لا توجد حلول .

من أجل : $m=-2$ يوجد حل واحد .

من أجل : $-2<m<0$ يوجد حلان .

من أجل : $0\leq m\leq 2,5$ توجد ثلاثة حلول .

من أجل : $2,5<m<4$ يوجد حلان .

من أجل : $m=4$ يوجد حل واحد .

من أجل : $m>4$ لا توجد حلول .

5- شفعية الدالة :

أ) الدالة الزوجية :

f زوجية يعني :

- إذا كان : $x\in D_f$ فإن : $-x\in D_f$ و $f(-x)=f(x)$

- إذا كانت f زوجية فإن منحناها الممثل في معلم متعامد متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.

ب) الدالة الفردية :

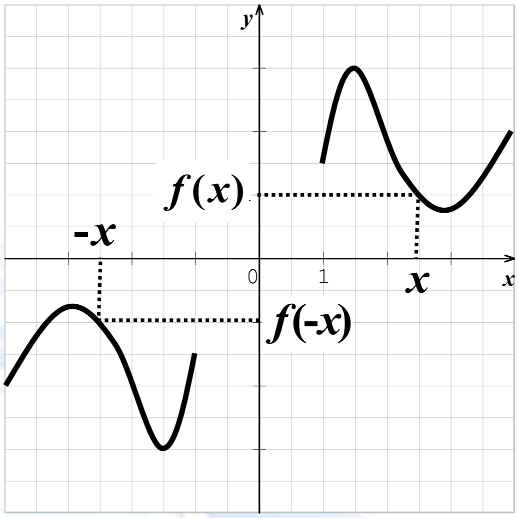
f فردية يعني :

- إذا كان : $x\in D_f$ فإن : $-x\in D_f$ و $f(-x)=-f(x)$

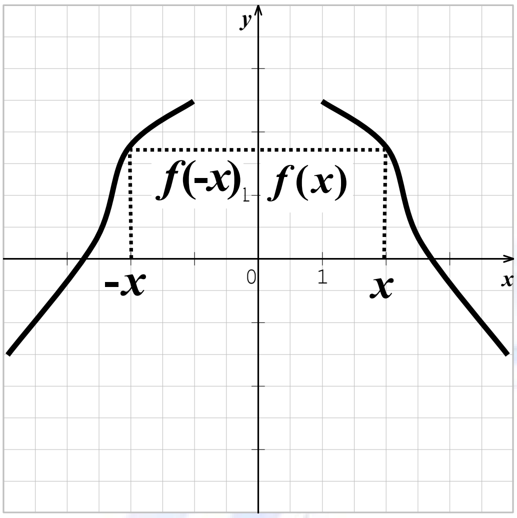
- إذا كانت f فردية فإن تمثيلها البياني متناظر بالنسبة إلى المبدأ O

ملاحظات :

إذا كانت الدالة f زوجية أو فردية يمكن تقليص مجال الدراسة إلى $D_f \cap \mathbb{R}_+$.



تناظر بالنسبة إلى المبدأ



تناظر بالنسبة إلى محور التراتيب .

أمثلة : الدالة جيب تمام دالة زوجية لأن : من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(-x) = \cos x$$

- الدالة جيب دالة فردية لأن : من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(-x) = -\sin x$$

- الدالة : $x \mapsto |x|$ معرفة على $\mathbb{R}$ و $|x| = |-x|$

ومنه : $x \mapsto |x|$ هي دالة زوجية.

- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ ليست زوجية و ليست فردية لأن مجموعة تعريفها $D = [0 ; +\infty[$

و إذا كان : $x > 0$ فإن : $-x < 0$ لا تنتمي إلى D.

أي شرط تناظر D غير محققة .

تمرين :

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = x^2 + x \quad \text{و} \quad g(x) = x\sqrt{x^2+1}$$

- ادرس شفعية كل من f و g.

حـل :

f معرفة على $\Re$. ومن أجل كل عدد حقيقي x.

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$$

ومنه : $f(-x) \neq -f(x)$ وَ $f(-x) \neq f(x)$

ماعدا من أجل $x = 0$.

إذن : الدالة f ليست زوجية و ليست فردية.

الدالة g معرفة على $\Re$ و من أجل كل عدد حقيقي x

$$g(-x) = -x\sqrt{(-x)^2 + 1} = -x\sqrt{x^2 + 1} = -g(x)$$

ومنه الدالة g دالة فردية .

6- الدالة كثيرة حدود :

*** تعريف : n عدد طبيعي . الدالة :**

$$P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$$

تسمى دالة كثيرة الحدود للمتغير x .

الأعداد الحقيقية : $a_n , a_{n-1} , \dots , a_1 , a_0$

تسمى معاملات كثير الحدود.

إذا كان $a_n \neq 0$ العدد الطبيعي n تسمي درجة كثير الحدود.

$a_n x_1^n$ هو الحد ذو أعلى درجة.

مثال : دالة كثير الحدود من الدرجة الثانية هي دالة من الشكل :

$$x \mapsto a x^2 + b x + c$$

حيث a , b , c أعداد حقيقية و $a \neq 0$.

*** تساوي كثيري حدود :**

يتساوى كثيرا حدود إذا كانت لهما نفس الدرجة و معاملات وحيدات الحد من نفس الدرجة متساوية .

مثال : $P(x) = 5x^3 + 2x^2 + 7x - 1$

$$Q(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$$

إذا كان : P = Q فإن : $a = 5$; b = 2 ; c = 7 ; d = -1

تطبيق :

جد كثير حدود من الدرجة الثانية $Q(x)$ يحقق:

من أجل كل عدد حقيقي x :

$$x^3 + 2x^2 - 6x + 3 = (x - 1)\, Q(x)$$

إرشاد : اكتب Q(x) على شكله العام .

أنشر وبسط ورتب الجداء $(x-1)\,Q(x)$ **.**

7- تغيير المعلم :

المعلم منسوب إلى معلم متعامد $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$. $\left(C_f\right)$ المنحنى الذي معادلته : $y = f(x)$ في هذا المعلم .

لتكن A نقطة إحداثياها $\left(x_0\,;\,y_0\right)$ في المعلم $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$

M نقطة إحداثياها $\left(x\,;\,y\right)$ في المعلم $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ و $\left(x'\,;\,y'\right)$ في المعلم $\left(A\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

هذا يعني : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ؛ $\overrightarrow{AM} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

ولدينا : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$

و منه : $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$.

تغيير هذا المعلم يؤدي إلى معادلة $\left(C_f\right)$ في المعلم الجديد $\left(A\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$. نرمز لها بـ :

$$y' = g(x')$$

- إذا كانت g زوجية فإن المحور $\left(A\,;\,\vec{i}\right)$ محور تناظر للمنحنى $\left(C_f\right)$.

- إذا كانت g فردية فإن النقطة A مركز تناظر للمنحنى $\left(C_f\right)$.

8- مركز التناظر و محور التناظر :

المستوى منسوب إلى معلم متعامد $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

$\left(C_f\right)$ منحنى الدالة f ؛ (Δ) مستقيم معادلته : $x = a$

نتيجة 1 :

يكون المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = a$ محور تناظر للمنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان من أجل كل : $x \in D_f : a - x \in D_f \, , a + x \in D_f$

و $f(a+x) = f(a-x)$

نتيجة 2 :

تكون النقطة $A\ (a\ ;\ b)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان من أجل كل : $x \in D_f : a - x \in D_f \, , a + x \in D_f$

و $f(a+x) + f(a-x) = 2b$

تطبيق 1 :

f هي الدالة : $x \mapsto 3x^2 + 5x - 1$

برهن أن المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{5}{6}$ هو محور تناظر لمنحنى الدالة f.

تطبيق 2 :

f هي الدالة : $x \mapsto \dfrac{2x - 1}{x + 1}$

برهن أن النقطة $A\ (-1\ ;\ 2)$ هي مركز تناظر لمنحنى الدالة f .

II - عمليات على الدوال :

1- تساوي دالتين :

تعريف : إذا تساوت دالتان f و g نكتب : $f = g$

و هذا يعني أن لهما نفس مجموعة التعريف D

و من أجل كل x من D : $f(x) = g(x)$

2- العمليات الجبرية على الدوال :

f و g دالتان $x \mapsto f(x)\ ;\ x \mapsto g(x)$

العملية	الترميز	التعريف	معرفة من أجل
المجموع	$f + g$	$x \mapsto f(x) + g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
الفرق	$f - g$	$x \mapsto f(x) - g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
الجداء	$f \cdot g$	$x \mapsto f(x).g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
حاصل قسمة	$\dfrac{f}{g}$	$x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$x \in D_f \cap D_g$ و $g(x) \neq 0$

3- تركيب دالتين :

تعريف : f و g دالتان . الدالة التي نرمز لها بـ gof هي الدالة المركبة والتي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد $g\left(f(x)\right)$ أي :

$$(gof)(x) = g\left(f(x)\right)$$

$$\underbrace{x \mapsto f(x) \mapsto g\left(f(x)\right)}_{gof}$$

مثال :

$$g : x \mapsto \sqrt{x} \quad ; \quad f : x \mapsto x - 2$$

$$(gof)(x) = g\left(f(x)\right) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x - 2}$$

إذن : $gof : x \mapsto \sqrt{x - 2}$ معرفة على $[2 ; +\infty[$

ملاحظة :

الكتابة $gof(x)$ لها معنى إذا كان $x \in D_f$ و $f(x) \in D_g$

ومنه : مجموعة تعريف الدالة gof هي مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث: $x \in D_f$ و $f(x) \in D_g$

و بالمثل الدالة fog هي الدالة المعرفة بـ : $(fog)(x) = f\left(g(x)\right)$

في الحالة العامة : $fog \neq gof$

في المثال السابق :

$$(fog)(x) = f\left(g(x)\right) = g(x) - 2 = \sqrt{x} - 2$$

تطبيق :

f و g دالتان معرفتان كما يلي : $f(x) = x^2 + 1 \ ; \ g(x) = \dfrac{1}{x}$

1) احسب $(fog)(x)$ بعد تحديد مجموعة تعريف الدالة gof .

2) نفس الأسئلة بالنسبة إلى الدالة fog .

الحـل :

1) حساب $(fog)(x)$:

$$D_f = \Re \text{ و } f(x) = x^2 + 1$$

$$D_g = \Re - \{0\} \text{ و } g(x) = \frac{1}{x}$$

$$x \mapsto f(x) \mapsto g\big(f(x)\big)$$

حتى يمكن حساب $g\big(f(x)\big)$ يجب أن يكون $f(x) \neq 0$

وهذا صحيح (لأن المعادلة: $x^2 + 1 = 0$ ليس لها حلول)

ومنه : $D_{gof} = \Re$

لحساب $g\big(f(x)\big)$ نعوض x بـ $f(x)$ في عبارة $g(x)$ فنجد :

$$g\big(f(x)\big) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

2) حساب $(fog)(x)$:

لدينا : $D_f = \Re - \{0\} \; ; \; g(x) = \frac{1}{x}$

$$D_f = \Re \quad ; \quad f(x) = x^2 + 1$$

ومنه الدالة fog معرفة على $\Re - \{0\}$

لدينا : $x \mapsto g(x) \mapsto f\big(g(x)\big)$ و منه :

$$f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1$$

أي: $f\big(g(x)\big) = \frac{1}{x^2} + 1$

لاحظ أن : $gof \neq fog$

III - اتجاه التغير :

1 - اتجاه تغير مجموع دالتين :

مبرهنة :

إذا كانت f وg دالتان متزايدتان تماما على مجال I . فإن دالة المجموع $(f+g)$ تكون متزايدة تماما على I .

إذا كانت f وg دالتان متناقصتان تماما على مجال I . فإن دالة المجموع $(f+g)$ تكون متناقصة تماما على I .

2 - اتجاه تغير الدالة $\lambda.f$:

مبرهنة :

f دالة معرفة على مجال I . λ عدد حقيقي .

- إذا كان $\lambda > 0$ فإن f و λf لهما نفس اتجاه التغير على المجال I
- إذا كان $\lambda < 0$ فإن f و λf لهما اتجاهان للتغير متعاكسان على I
- إذا كان $\lambda = 0$ فإن λf ثابتة على I .

مثال :

لتكن : $f : x \mapsto x^2 + 3$ على المجال $I = [0 ; +\infty[$

ومنه : $5.f : x \mapsto 5x^2 + 15$

f متزايدة تماما على I و $5.f$ متزايدة تماما على I

3- اتجاه تغير مركب دالتين :

مبرهنة :

f و g دالتان رتيبتان تماما . I مجال محتوى في D_f .

J مجال محتوى في D_g . بحيث يكون من أجل كل x من I ، يكون $f(x)$ من J .

1) إذا كان للدالتين f و g نفس اتجاه التغير فإن الدالة gof تكون متزايدة تماما على المجال I .

2) إذا كان للدالتين f و g اتجاهان للتغير مختلفان فإن الدالة gof تكون متناقصة تماما على المجال I .

مثال :

h هي الدالة المعرفة بـ : $h(x) = \sqrt{1-x}$

1 – عين مجموعة تعريف الدالة h .

2- برهن أن الدالة h متناقصة تماما على مجموعة التعريف.

حـل :

نرمز بـ f وg للدالتين المعرفتين بـ : $f(x) = 1 - x$; $g(x) = \sqrt{x}$

ومنه : $h = gof$.

الدالة f معرفة على $\Re$. ويجب أن يكون $f(x) \geq 0$ حتى نطبق الدالة g؛ أي :

$1 - x \geq 0$ و منه : $x \leq 1$.

ومنه مجموع تعريف الدالة h هي $D_h =]-\infty ; 1]$.

الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty ; 1]$ و $f(x) \in [0 ; +\infty[$.

الدالة g متزايدة تماما على $[0 ; +\infty[$ ومنه فإن الدالة h متناقصة تماما عل المجال $]-\infty ; 1]$.

ملاحظة :

في الحالة العامة لا يمكن استنتاج اتجاه تغير : $f - g$ و $f.g$

من اتجاه تغير الدالتين f وg .

4- دراسة تغيرات دالة :

لدراسة اتجاه تغير دالة f على مجال I . يمكن :

1) اعتبارها كمجموع دوال رتيبة.

2) اعتبارها كجداء دالة بعدد حقيقي .

3) اعتبارها كمركب عدد دوال مألوفة .

4) استعمال التعريف و دراسة إشارة : $f(b) - f(a)$ علما أن $a \leq b$ على المجال I.

ملاحظة :

ستتعرف على طريقة أخرى في دروس لاحقة.

IV - منحنيات و تحويلات :

f دالة و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

k عدد حقيقي . كيف يتم استنتاج منحنيات الدوال :

$x \mapsto -f(x)$; $x \mapsto |f(x)|$; $x \mapsto f(-x)$ في نفس المعلم.

- **التناظر :**

- منحنى الدالة $x \mapsto -f(x)$ نظير منحنى الدالة $x \mapsto f(x)$ بالنسبة إلى محور الفواصل .
- منحنى الدالة $x \mapsto f(-x)$ نظير منحنى الدالة $x \mapsto f(x)$ بالنسبة إلى محور التراتيب .
- منحنى الدالة $x \mapsto |f(x)|$ ينطبق على منحنى الدالة $x \mapsto f(x)$ من أجل x التي تجعل $f(x) \geq 0$

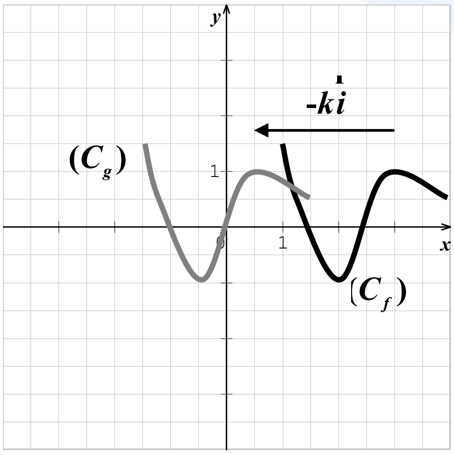
منحنى الدالة $x \mapsto |f(x)|$ نظير منحنى الدالة $x \mapsto f(x)$ من أجل x التي تجعل $f(x) \leq 0$ بالنسبة إلى محور الفواصل .

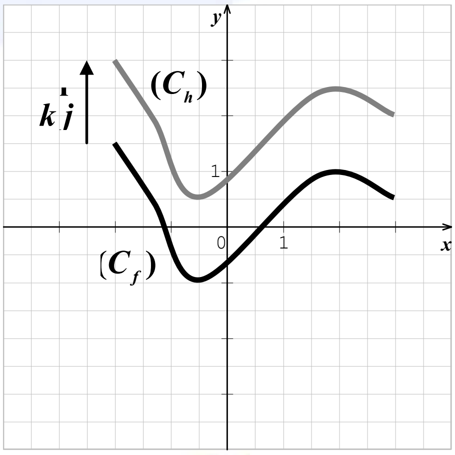
لأن :
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ; f(x) \leq 0 \end{cases}$$

*** الانسحاب :**

مبرهنة :

- المنحنى (C_g) ذو المعادلة : $y = f(x+k)$ هو صورة المنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $(-k\vec{i})$.
- المنحنى (C_h) ذو المعادلة $y = f(x)+k$ هو صورة المنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $(k\vec{j})$.





تطبيقات :

1- تركيب دالتين :

f دالة معرفة على $\Re - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ بالشكل : $f\ (x) = \dfrac{1}{2x - 1}$

الهدف : كتابة f كمركب دالتين g و h $(f = goh)$ ثم نفس العمل بالنسبة للدالة f المعرفة على $\Re$

بالشكل : $f\,(x) = (x^2 + 1)^2$

1- إيجاد دالتين g وh بحيث يكون :

من أجل كل $x \in D_f \quad ; \quad f\,(x) = g\,\big(h\,(x)\big)$

لهذا نجزأ حساب $f\,(x)$ (مع الأخذ بعين الاعتبار أولويات مراحل هذا الحساب). فنجد مرحلتين :

- حساب $\dfrac{1}{2x - 1}$ ينجز بالترتيب على مرحلتين :

* **حساب :** $X = 2x - 1$ * **حساب** $\dfrac{1}{X}$.

- لإيجاد الدالتين g وh بحيث $f = goh$ يجب أن نعرف أن الدالة h هي التي تطبق في الأول .

2- كتابة أخرى لدالة ناطقة :

f هي دالة ناطقة معرفة على $\Re - \{2\}$ بـ : $f\,(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$

الهدف : ايجاد الأعداد الحقيقية a , b , c بحيث يكون :

من أجل كل $x \in \Re - \{2\}$: $f\ (x) = a\,x + b + \dfrac{c}{x - 2}$

ثم دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة : $y = ax + b$

أ) نحول الكتابة $ax + b + \dfrac{c}{x - 2}$ إلى حاصل قسمة لأن $f\,(x)$ معطاة على شكل حاصل قسمة لهذا نوحد المقامات.

- نقوم بتوحيد المقام وتبسط كثير الحدود الموجود في البسط.

- الهدف هو إيجاد الأعداد a , b , c حيث من أجل $x \neq 2$

$$\frac{x^2 - x}{x - 2} = \frac{a x^2 + (b - 2a) x + c - 2b}{x - 2}$$

ب) العبارتان لهما نفس المقام و حتى تكونان متساويتان يكفي أن يكون البسطان متساويان أي : من أجل كل $x \neq 2$ و

$$x^2 - x = ax^2 + (b - 2a) x + c - 2b$$

- كتابة الجملة التي تترجم تساوي كثير حدود من نفس الدرجة.

- تعيين a , b , c .

ج) لمعرفة إذا كانت (C_f) فوق المستقيم ذو المعادلة $y = a x + b$

تقارن بين العددين $f(x)$ و $a x + b$ لهذا ندرس إشارة الفرق

$h(x) = f(x) - (ax + h)$ ولدينا شكلان لـ $f(x)$

- نختار الشكل الموافق لحساب الفرق $h(x)$

- ندرس إشارة $h(x)$ ثم نستنتج .

تمـاريـن و مشكلات

التمرين 1 .

عين مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة مما يلي :

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x(x-1)}$ 2) $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

3) $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2+x}$ 4) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$

5) $f(x) = \dfrac{x-1}{3+x^2}$ 6) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$

7) $f(x) = \sqrt{3-x}$ 8) $f(x) = \sqrt{x+2}$

9) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

التمرين 2 .

f وg دالتان معرفتان كما يلي :

$$f(x) = \frac{1}{x} + x - 1 \quad ; \quad g(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x}$$

1- ما هي مجموعة تعريف الدالة $f+g$ ؟

2- احسب $(f+g)(x)$

التمرين 3 .

f وg دالتان معرفتان كما يلي :

$$f(x) = 2x + 3 \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

- احسب : $(gof)(x)$; $(fog)(x)$

بعد تعيين مجموعة تعريف الدوال :

$gof \;\; ; \;\; fog \;\; ; \;\; g \;\; ; \;\; f$

التمرين 4 .

بسط و رتب و أعط درجة كثيرة الحدود :

$$P\ (x) = x^2 + 2x^3 - x + x^4$$

$$Q\ (x) = x^2 - x^3 - 6x + (x^2 + 2x^3 + x^4)$$

$$R\ (x) = x^2 + 2x^3 + 4x^3 + x^4 - (x^2 + 2x^3 - x)$$

التمرين 5 .

1) اذكر اتجاه تغير الدالة U على $\Re$ حيث : $U\ (x) = x^2$

2) استنتج اتجاه تغير الدوال التالية :

$$f : x \mapsto -5x^2 \quad ; \quad g : x \mapsto x^2 - 4$$

$$h : x \mapsto 0{,}5\, x^2 + 2$$

التمرين 6 .

u دالة معرفة على مجال $[-5\ ;\ 1]$ بجدول تغيراتها كما يلي :

x	-5		-1		1
u	0	↘	-3	↗	4

شكل جدول تغيرات الدوال التالية :

أ) $f = -u$. ب) $g = 2.u$. ج) $h = 0{,}5.u + 25$

التمرين 7 .

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $[0\ ;\ 2\pi]$ كما يلي:

$f(x) = \sin x + x$

على أي مجال يمكن أن يكون f : 1- متزايدة ؟ 2- متناقصة ؟

التمرين 8 .

u دالة حيث : $u(x) = 2x - 8$

1) ادرس إشارتها ؟

2) عين مجموعة تعريفها ؟

3) ادرس اتجاه تغير الدالة : $\dfrac{1}{u}$

التمرين 9 .

لتكن الدالة العددية f المعرفة كما يلي: $f(x) = \dfrac{x+5}{-2x\ \ 4}$

1) اكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{B}{-2x+4}$

معينا العدد B .

2) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]2\,;+\infty[$

التمرين 10 .

نعتبر الدالتين : U وV حيث : $V(x) = 3x + 5 \quad ; \quad U(x) = \dfrac{1}{x}$

- اكتب :

$$(VoU)(x)\ ;\ (UoV)(x)\ ;\ (UoU)(x)\ ;\ (VoV)(x)$$

التمرين 11 .

أصحيح أم خطأ :

1) الدالتان : $x \mapsto x^2+1$ وَ $x \mapsto x^2-1$

لهما نفس اتجاه التغير على $\Re$.

2) جداء دالتين تآلفيتين هو دالة تآلفية .

3) الدالة $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ متزايدة على $]0\,;+\infty[$

4) المنحنى ذو المعادلة $y = \dfrac{1}{x+1}$ يستنتج من المنحنى

ذي المعادلة $y = \dfrac{1}{x}$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{j}$.

5) الكسر $\dfrac{4x-5}{x-3}$ يمكن كتابته على الشكل : $4 + \dfrac{7}{x-3}$

6) إذا كانت الدالة f متزايدة تاما على I فإن :

الدالة f^2 متزايدة تماما على I.

7) لتكن : $f(x) = \sqrt{x}$ وَ $g(x) = x^4 + x^2 + 1$

و $h(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$ إذن : $h = gof$

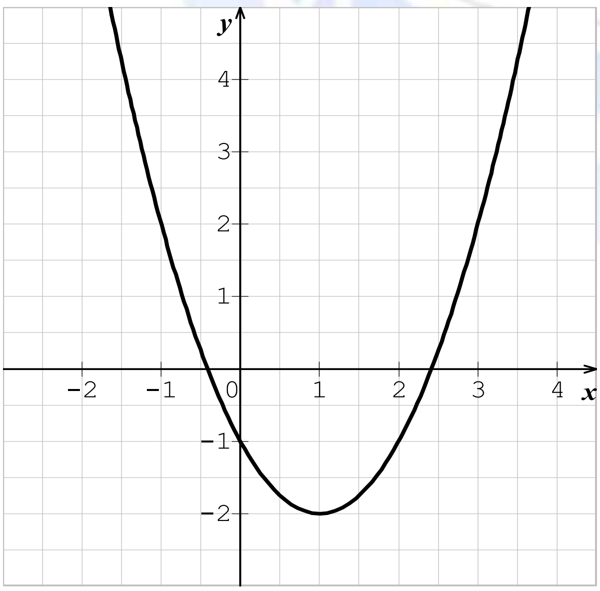
التمرين 12 .

احسب : $\left(x^2 + p\,x + q\right)^2$ **ثم تحقق أن :** $\left(x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1\right)$

هو مربع كثير حدود من الدرجة الثانية.

التمرين 13 .

تغيير المعلم :



المنحنى (C) في الشكل المقابل

معادلته : $y = x^2 - 2x - 1$ في

معلم متعامد و متجانس $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$

1- من الشكل يمكن تخمين محور

التناظر لمحور التراتيب .

ماهي معادلته ؟

2- إختر نقطة A من هذا المحور كمبدأ لمعلم جديد $\left(A ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

واكتب معادلات تغيير المعلم .

3- استعمل هذه المعادلات لتعيين المعادلة الجديدة للمنحنى (C) في المعلم $\left(A\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

- أثبت أن المستقيم المخمن هو محور تناظر للمنحنى (C) .

التمرين 14 .

لتكن : $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$ و $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$

أ) باستعمال آلة حاسبة أو مجدول أعط جدول قيم f و g من أجل x يتغير من $0,1$ إلى $0,01$. و قارن النتائج .

ب) - احسب $d(x) = g(x) - f(x)$

- احسب $d(x)$ من أجل ، $x = 0,01$.

- اشرح كيف تبين الدالة d أن $f(x)$ و $g(x)$ لهما قيم متقاربة جدا من أجل x قريب من 0 .

التمرين 15 .

استعمال مجدول Exel

الشاشة أدناه تعطي حساب قيمة دالة f . النتيجة معطاة في الخلية B_1

	A	B
1	f(x)	=RACINE(A4)
2		
3		
4	=A2^2+1	

1- في أي خلية يكون المبرمج قد توقع حجز قيمة x ؟

2- أ) ماهما الدالتان h و g اللتان استعملهما المبرمج لتشكيل جدوله .

ب) اكتب f باستعمال الدالتين .

ج) أعط عبارات : $h(x)$ و $g(x)$ و $f(x)$

التمرين 16 .

لتكن g دالة معرفة لـ : $g\ (x) = \dfrac{x^2\ + 1}{x^2\ - 1}$

أ) ما هي مجموعة تعريفها ؟

ب) ادرس إشارة : $x^2\ - 1$ حسب قيم x .

ج) بين أن : $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2\ - 1}$

د) ما هي وضعية (C_g) المنحنى الممثل للدالة g بالنسبة إلى المستقيم

ذي المعادلة $y = 1$ ؟

التمرين 17 .

لتكن f الدالة المعرفة بـ : $f\,(x) = 2x^3\ - x^2\ + 1$

أعط العبارات التالية :

$$f\left(2x\right)\quad ;\ f\left(\frac{x}{2}\right)\ ;\ f\left(-x\right)$$

الحـــلــول

التمرين 1 .

(1 $D_f = \Re - \{0\}$ ؛ (2 $D_f = \Re - \{0 ; 1\}$

(3 $D_f = \Re$ ؛ (4 $D_f = \Re - \{-1 ; 0\}$

(5 $D_f = \Re - \{-2 ; 2\}$ ؛ (6 $D_f = \Re$

(7 $D_f = [-2 ; +\infty[$ ؛ (8 $D_f =]-\infty ; 3]$

(9 $D_f =]0 ; +\infty[$.

التمرين 2 .

(1 $D_f = D_g = \Re - \{0\}$ ومنه $D_{f+g} = \Re - \{0\}$

(2 $(f+g)(x) = 3x + 2$ من أجل كل x من $\Re - \{0\}$

التمرين 3 .

$$(fog)(x) = \frac{2}{x} + 3 \quad ; \quad (gof)(x) = \frac{1}{2x+3}$$

$$D_f = \Re \quad ; \quad D_g = \Re - \{0\} \quad ; \quad D_{fog} = \Re - \{0\}$$

$$D_{gof} = \Re - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

التمرين 4 .

لدينا :

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - x$$

$$q(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - 6x$$

$$R(x) = x^4 - x$$

درجة كثيرات الحدود هذه هي : 4.

التمرين 5 .

1) الدالة u (الدالة "مربع") متناقصة على المجال $]-\infty\ ;\ 0]$ و متزايدة على المجال $[0\ ;\ +\infty[$.

2) الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty\ ;\ 0]$ و متناقصة على المجال $[0\ ;\ +\infty[$

الدالتان g وh متناقصتان على $]-\infty\ ;\ 0]$ ومتزايدتان على $[0\ ;\ +\infty[$

التمرين 6 .

x	-5	-1	1
u	0	-3	4
-u	0	3	-4
2u	0	-6	8
h	25	26،5	23

التمرين 7 .

الدالة $x \mapsto \sin x$ متزايدة على كل من المجالين :

$$\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right] \text{ و } \left[\frac{3\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$$

وكذلك الدالة : $x \mapsto x$ متزايدة على كل من هذين المجالين .

ومنه الدالة f مجموع دالتين متزايدتين فهي متزايدة على كل من هذين المجالين . على المجالات الأخرى لا يمكن الاستنتاج .

التمرين 8 .

1) $u(x) = 0$ من أجل $x = 4$

$u(x) > 0$ إذا كان $x > 4$

$u(x) < 0$ إذا كان $x < 4$

2) مجموعة التعريف هي : $D_u = ¡$

3) الدالة $x \mapsto \frac{1}{2x-8}$ تكون معرفة على $]-\infty ; 4[$ و $]4 ; +\infty[$

فهي متناقصة على $]-\infty ; 4[$ و متناقصة على $]4 ; +\infty[$.

التمرين 9 .

1) لنحسب : $f(x) - \left(-\frac{1}{2}\right)$ أي : $\frac{x+5}{-2x+4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{-2x+4}$

إذن : $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{-2x+4}$

2) الدالة f متناقصة على المجال $]2 ; +\infty[$

التمرين 10 .

$$(VoU)(x) = V[U(x)] = \frac{3}{x} + 5$$

$$(UoV)(x) = U[V(x)] = \frac{3}{3x+5}$$

لدينا : $(VoV)(x) = 9x + 20 \quad ; \quad (UoU)(x) = x$

التمرين 11 .

1) صحيح ، 2) خطأ ، 3) خطأ ، 4) خطأ

5) صحيح ، 6) خطأ ، 7) خطأ .

التمرين 12 .

لنتحقق أنه يوجد p و q بحيث يكون من أجل عدد حقيقي x :

$$(x^2 + Px + q)^2 = x^4 + 6x^2 + 7x^2 - 6x + 1$$

بعد النشر و المطابقة نجد الجملة :

$$\begin{cases} 2p = 6 \\ p + 2q = 7 \\ 2pq = -6 \\ q^2 = 1 \end{cases}$$

و منه الحلان هما : $P = 3 \;;\; q = -1$

إذن : كثير الحدود المعطى هو مربع : $x^2 + 3x - 1$

التمرين 13 .

1) $x = 1$

2) $A\,(1\;;\;-2)$ ومنه : $\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}$

3) بالتعويض في المعادلة و بعد الاختصار نجد :

$$y' = x'^2 = g(x')$$

g دالة زوجية . ومنه المستقيم ذو المعادلة : $x = 1$ هو محور تناظر للمنحنى (C) .

التمرين 14 .

أ) باستعمال مجدول إكسال : " Exel" نحصل على جدول القيم التالي :

	A	B	C
1	x	$f(x)$	$g(x)$
2	0,1	0,909	0,90909091
3	0,09	0,917371	0,91743119
4	0,08	0,925888	0,92592593
5	0,07	0,934557	0,93457944
6	0,06	0,943384	0,94339623
7	0,05	0,952375	0,95238095
8	0,04	0,961536	0,69153846
9	0,03	0,970873	0,97087379
10	0,02	0,980392	0,98039216
11	0,01	0,990099	0,99009901

ب) بعد الحساب نجد : $d(x) = \dfrac{x^4}{1+x}$

نلاحظ أن $d(x)$ موجب من أجل x قريب من O .

من جهة أخرى إذا كان $x = 10^{-2}$ فإن $d(x)$ قريب من 10^{-8}

ومنه الفارق بين $g(x)$ و $f(x)$ صغير جدا. في الحالة العامة إذا

كان $x = 10^{-n}$ (مع n طبيعي. $n \geq 1$) فإن $d(x)$ يكون قريب

من $x = 10^{-4n}$ بجوار $x = 0$. الدالة التناظرية g " قريبة " من

الدالة كثيرة الحدود f مع $g(x) > f(x)$

التمرين 15

1- نتيجة الخلية B_1 تستعمل محتوى A_4 و محتوى A_4 نتحصل عليه

من A_2 إذن : قيمة x *تحجز في* A_2 .

2- أ) الدالة h التي تمر من A_2 إلى A_4 هي : $h : x \mapsto x^2 + 1$

(A_2 يلعب دور x)

الدالة g التي تمر من A_4 إلى B_2 هي : $g : x \mapsto \sqrt{x}$

ب) $f = goh$

ج) $h(x) = x^2 + 1 \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

التمرين 16 .

أ) يمكن حساب $g(x)$ بشرط أن يكون :

$x^2 - 1 \neq 0$ أي : $x \neq 1$ و $x \neq -1$

مجموعة التعريف هي : $D =]-\infty \,;\, -1[\cup]-1 \,;\, 1[\cup]1 \,;\, +\infty[$

ب) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

باستعمال جدول الإشارة للجداء : $(x + 1)(x - 1)$ نجد :

x	$-\infty$ -1	1	$+\infty$
$x - 1$	-	-	+
$x + 1$	-	+	+
$x^2 - 1$	+	-	+

ومنه : $x^2 - 1 < 0$ من أجل $x \in]-1 \,;\, 1[$

$x^2 - 1 > 0$ من أجل $x \in]-\infty \,;\, -1[\cup]1 \,;\, +\infty[$

ج) يمكن كتابة : $g(x) = \dfrac{x^2 - 1 + 2}{x^2 - 1}$

أي : $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 1} + \dfrac{1}{x^2 - 1}$

$$g(x) = 1 + \frac{2}{x^2 - 1}$$

(يمكن كذلك تحويل العبارة المعطاة و إيجاد $g(x)$)

حسب إشارة : $x^2 - 1$ يكون المنحنى فوق أو تحت المستقيم (d)

ذو المعادلة $y = 1$ إذا كان : $x \in]-1 \,;\, 1[$ فإن $g(x) < 1$

ومنه : $\left(C\right)$ تقع تحت (d). إذا كان $x \in]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$

فإن $g\,(x) > 1$ ومنه $\left(C\right)$ تقع فوق (d) .

التمرين 17 .

لحساب $f\,(2x)$ يكفي تعويض x بـ $2x$ في عبارة $f\,(x)$ فنجد :

$$f\,(2x) = 2\,(2x)^3 - (2x)^2 + 1 = 16\,x^3 - 4x^2 + 1$$

و هي دالة جديدة g حيث $g\,(x) = f\,(2x)$

و بالمثل :

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left(\frac{x}{2}\right)^3 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{4} + 1$$

و كذلك :

$$f\,(-x) = 2\,(-x)^3 - (-x)^2 + 1$$

$$f\,(-x) = -2x^3 - x^2 + 1$$