الاشتقـاقية

الكفاءات المستهدفة

التعرُّف على اشتقاقية دالة عند قيمة

حساب الدالة المشتقة

دراسة اتجاه تغير دالة باستعمال الدالة المشتقة

حل مسائل الإستمثال باستعمال المشتقات

تصميم الدرس

- تعاريف
- مشاكل و تمارين
- الحلول

تعاريف

I- العدد المشتق :

1- النهاية عند عدد a :

مثال 1 : لتكن الدالة f المعرفة بالعبارة: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

والدالة g المعرفة بالعبارة : $g(x) = x + 1$.

- باستعمال آلة بيانية أنشئ التمثيل البياني $\left(C_f\right)$ للدالة f .

هل الدالة f معرفة عند 1 .

ماذا تلاحظ عندما يقترب x من 1 .

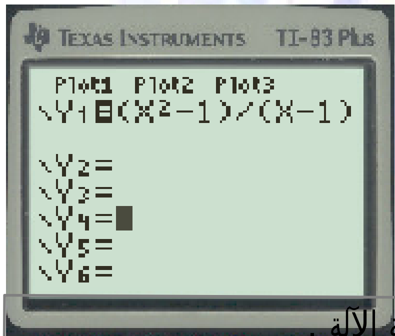
- أنشئ تمثيلا بيانيا $\left(C_g\right)$ للدالة g في معلم آخر. ما هي قيمة g(1)
- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\Re - \{1\}$ فإن :

$f(x) = g(x)$ ماذا تستنتج ؟

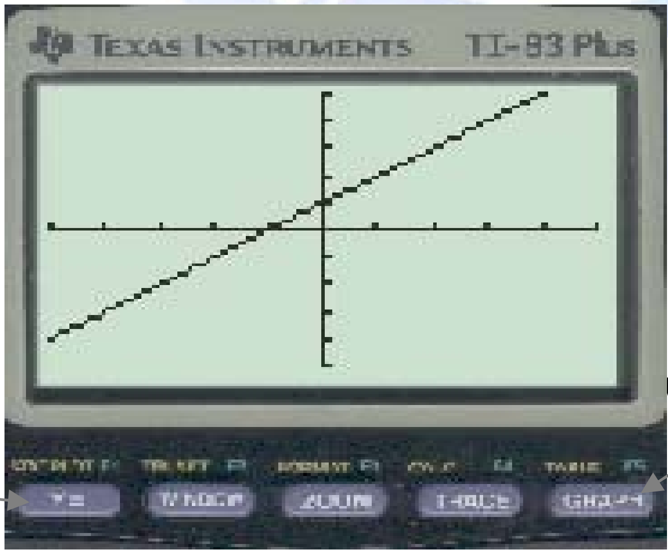
الحل:

- إنشاء $\left(C_f\right)$: باستعمال آلة بيانية و بعد

الضغط على الزر Y= نكتب :



باستعمال الزر GRAPH نرسم المنحنى كما يظهر على شاشة الآلة .



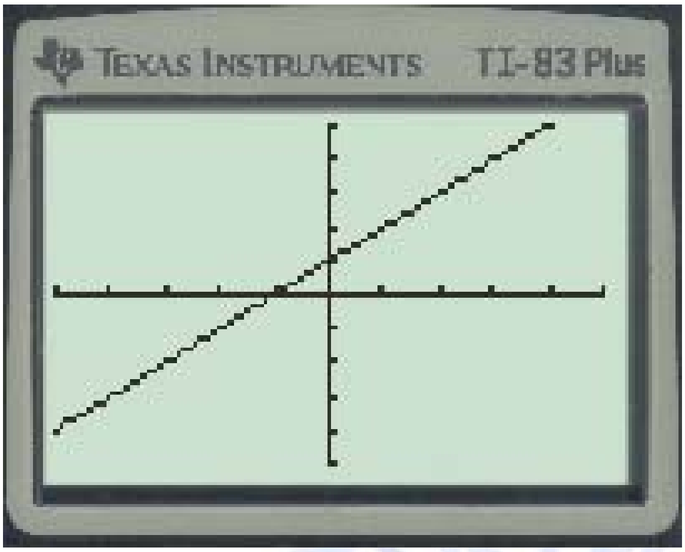
الدالة f غير معرفة عند1.

نلاحظ أنه عندما يقترب x من 1 فإن $f(x)$ تقترب من 2 .

أي أنه لما يتناهى x نحو 1فإن $f(x)$ تتناهى نحو 2 ونكتب : $x) = 2$

- إنشاء (C_g):

باستعمال نفس الآلة نجد :



لدينا : $g(1) = 2$.

- لدينا $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

- وعليه : $f(x) = \dfrac{(x-1)\ (x+1)}{x-1}$

وبالتالي : $f(x) = x + 1$ من أجل $x \neq 1$

النتيجة :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2 = g(1)$$

مثال 2 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-4x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-4)}{x} = \lim_{x\to 0}(x-4) = -4$$

2- العدد المشتق :

h عدد حقيقي حيث $x_0 + h$ عنصر من مجال I .

إذا كان $h \neq o$ فإن النسبة : $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ هي نسبة تزايد الدالة بين x_0 و $x_0 + h$.

بوضع $x = x_0 + h$ فإن النسبة تكتب : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

نقول أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا اقتربت النسبة

$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ من عدد ثابت l عندما يقترب h من العدد 0

أي : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$

وبعبارة أخرى : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$

نرمز للعدد l بالرمز $f'(x_0)$ ويسمى العدد المشتق للدالة f عند العدد x_0 .

مثال 1 :

ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f حيث : $f(x)=x^2$ عند العدد 4

حـل :

لدينا : $f(4)=16\ ;\ D_f=\Re$

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}(x+4)=8$$

وعليه الدالة f تقبل الاشتقاق عند 4 حيث : $f'(4)=8$.

مثال 2 :

ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f حيث : $f(x)=-4x+5$ عند العدد 3- .

حـل:

لدينا : $f(-3)=17\quad ;\quad D_f=\Re$

لدينا : $$\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{-4x+5-17}{x+3}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{-4x-12}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{-4(x+3)}{x+3}=-4$$

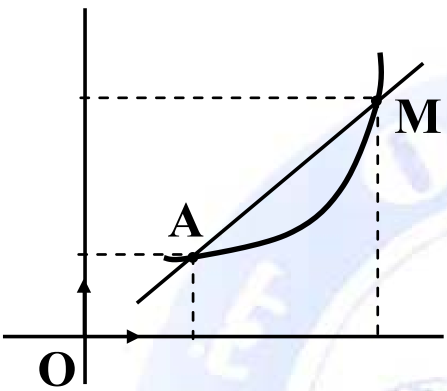
وعليه الدالة f تقبل الاشتقاق عند 3- حيث : $f'(-3)=-4$.

- التفسير الهندسي للعدد المشتق :

$\left(C_f\right)$ التمثيل البياني لدالة f في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A وM نقطتان من $\left(C_f\right)$ حيث : $A\left(x_0\ , f(x_0)\right)$

و $M\left(x_0 + h\ , f(x_0 + h)\right)$.



من أجل $h \neq 0$: معامل توجيه المستقيم

(AM) هو : $\dfrac{f(x_0 + h)\ - f(x_0)}{h}$

إذا كانت f قابلة الاشتقاق عند x_0 فإن :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

بيانيا عندما يؤول h إلى 0 فإن M تقترب من A وعليه المستقيم

(AM) يصبح مماسا للمنحنى $\left(C_f\right)$ في النقطة A .

- **معادلة المماس عند A :** $y = f'(x_0) \times x + b$

وبما أن A نقطة من المماس فإن : $y_0 = f(x_0)$ و منه :

$y_0 = f'(x_0) \times x_0 + b$ وعليه : $b = y_0 - f'(x_0) \times x_0$

إذن : $y = f'(x_0)\ .\ x + y_0 - f'(x_0)\ .\ x_0$

وعليه : $y - y_0 = f'(x_0)\ .(x - x_0)$ هي معادلة المماس للمنحنى

$\left(C_f\right)$ عند النقطة $A\ (x_0\ ; y_0)$ حيث : $y_0 = f(x_0)$

مثال : f دالة معرفة بالعبارة: $f(x) = x^2 - 2x$

- ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 4 .
- اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى $\left(C_f\right)$ الممثل لتغيرات الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 4 .

الحل :

- قابلية الاشتقاق عند 4 : $f(4) = (4)^2 - 2(4) = 8\ \ ;\ \ D_f = \Re$

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-2x-8}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+2)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 4}(x+2)=6$$

وعليه الدالة f تقبل الاشتقاق عند 4 حيث : $f'(4)=6$

- معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 4

لدينا معادلة المماس (Δ) هي : $y-y_0=f'(x_0).(x-x_0)$

و منه : $y-8=6(x-4)$

إذن : $\boxed{(\Delta):y=6x-16}$.

3 - الدالة المشتقة :

تعريف : f دالة قابلة للاشتقاق عند كل عدد x من مجال I من مجموعة تعريفها D_f .

الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد المشتق للدالة f عند x تسمى الدالة المشتقة للدالة f ويرمز لها بالرمز f' حيث : $f':x\mapsto f'(x)$

مثال :

ادرس قابلية الاشتقاق للدالة $f:x\mapsto x^2$ عند عدد x_0 من $\Re$.

استنتج دالتها المشتقة.

حـل :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2x_0h+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x_0+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x_0+h)=2x_0$$

وعليه f تقبل الاشتقاق عند x_0 حيث : $f'(x_0)=2x_0$

ومنه الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة f' حيث :

$$f':x\mapsto f'(x)=2x$$

4 - مشتقات الدوال المألوفة :

1) مشتقة الدالة f حيث : $f : x \mapsto a$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a - a}{x - x_0} = 0$$

وعليه : $\boxed{f' : x \mapsto 0}$.

2) مشتقة الدالة f حيث :

$$D_f = \Re^* \; ; \; f : x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{x x_0}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-(x - x_0)}{x x_0} \times \frac{1}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-1}{x x_0} = \frac{-1}{x_0^2}$$

و عليه : $\boxed{f' : x \mapsto \frac{-1}{x^2}}$.

3) مشتقة الدالة f حيث : $f : x \mapsto x^n$ مع $n \in \Re$ ؛ $D_f = \Re$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + x_0^2 x^{n-3} + \dots + x_0^{n-1})}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + x_0^2 x^{n-3} + \dots + x_0^{n-1})$$

$$= x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1}$$ (n مرة)

$$= n \, . \, x_0^{n-1}$$

وعليه : $\boxed{f' : x \mapsto n . x^{n-1}}$.

4) مشتقة الدالة f حيث : $f : x \mapsto \sqrt{x}$

$D_f = [0 ; +\infty[$ ، الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0 ; +\infty[$

لدينا :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}$$

و منه :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

وعليه : $\boxed{f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}}$.

5) مشتقة الدالة f حيث : $f : x \mapsto Sin\, x$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{Sin\, x - Sin\, x_0}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{2Sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) Cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{2Sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{x - x_0} \times Cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$$= \cos x_0$$

و عليه : $\boxed{f' : x \mapsto Cos\, x}$.

6) مشتقة الدالة f حيث : $f : x \mapsto Cos\ x$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{Cos\ x - Cos\ x_0}{x-x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{-2Sin\left(\dfrac{x-x_0}{2}\right)Sin\left(\dfrac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} -Sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right).\frac{Sin\left(\dfrac{x-x_0}{2}\right)}{\dfrac{x-x_0}{2}} = -Sin\ x_0$$

و عليه : $\boxed{f' : x \mapsto -Sin\ x}$.

5 - حساب مشتقات الدوال :

f و g دالتان تقبلان الاشتقاق على مجال I .

1) مشتقة الدالة $f+g$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

وعليه الدالة $f+g$ تقبل الاشتقاق على I حيث :

$\boxed{(f+g)' = f' + g'}$.

2) مشتقة الدالة $f \cdot g$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f.g)(x)-(f.g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x).g(x)-f(x_0).g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x).g(x)-f(x).g(x_0)+f(x).g(x_0)-f(x_0).g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0} f(x)\frac{\left[g(x)-g(x_0)\right]}{x-x_0}+g(x_0)\frac{\left[f(x)-f(x_0)\right]}{x-x_0}$$

$$=f(x_0).g'(x_0)+g(x_0).f'(x_0)$$

و عليه الدالة $f.g$ تقبل الاشتقاق على I حيث :

$$\boxed{(f.g)'=f'.g+f.g'}\ .$$

3) مشتقة الدالة $\frac{1}{g}$ **:** حيث g لا تنعدم على I

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{-\left(g(x)-g(x_0)\right)}{g(x).g(x_0)}\times\frac{1}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{-1}{g(x).g(x_0)}.\frac{\left(g(x)-g(x_0)\right)}{x-x_0}$$

$$=\frac{-1}{\left[g(x_0)\right]^2}\times g'(x_0)=\frac{-g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}$$

وبالتالي الدالة $\frac{1}{g}$ تقبل الاشتقاق على I حيث :

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{-g'}{g^2}}\ .$$

4) مشتقة الدالة $\dfrac{f}{g}$:

لدينا : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \left(f \times \dfrac{1}{g}\right)' = f'.\dfrac{1}{g} + f.\left(\dfrac{1}{g}\right)'$

أي : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'}{g} + f\left(\dfrac{-g'}{g^2}\right)$

و عليه : $\boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'.g - f.g'}{g^2}}$.

5) مشتقة الدالة : $g : x \mapsto f(ax+b)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(ax+b) - f(ax_0+b)}{x - x_0}$$

بوضع : $u = ax + b$ ، نجد $u_0 = ax_0 + b$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \times \frac{u - u_0}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \times \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \times \frac{a(x - x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} a \times \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0}$$

$$= a.f'(u) = a.f'(ax+b)$$

إذن مشتقة الدالة : $g : x \mapsto f(ax+b)$

هي الدالة : $\boxed{g' : x \mapsto a.f'(ax+b)}$.

مثال : عين مشتق كل من الدوال :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x+1} \quad ; \quad g : x \mapsto (x+2)^3$$
$$h : x \mapsto \sqrt{x-2}$$

حـل :

- $D_f = \Re - \{-1\}$. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

و منه : $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$

- $D_g = \Re$ ؛ $g(x) = (x+2)^3$

و منه : $g'(x) = 3 \times 1\,(x+2)^2 = 3\,(x+2)^2$

- $D_h = [2 ; +\infty[$, $h(x) = \sqrt{x-2}$

الدالة h تقبل الاشتقاق على $]2 ; +\infty[$ حيث :

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

6 - الربط بين إشارة المشتق و اتجاه التغير :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .

- إذا كانت الدالة المشتقة معدومة على I فإن الدالة f ثابتة على I .
- إذا كانت الدالة المشتقة موجبة تماما على I فإن الدالة f متزايدة تماما على I .
- إذا كانت الدالة المشتقة سالبة تماما على I فان الدالة f متناقصة تماما على I .

7 - القيمة الحدية لدالة :

f دالة تقبل الاشتقاق على مجال I . x_0 عنصر من I .

إذا انعدمت الدالة f' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة

حدية للدالة f على I .

x		x_0	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

في هذه الحالة $f(x_0)$ قيمة حدية عظمى للدالة f .

x		x_0	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

في هذه الحالة $f(x_0)$ قيمة حدية صغرى للدالة f .

تمـاريـن و مشكلات

التمرين 1 .

f دالة معرفة كما يلي : $f(x) = 4x^2 + x - 5$.

- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 3 .

التمرين 2 .

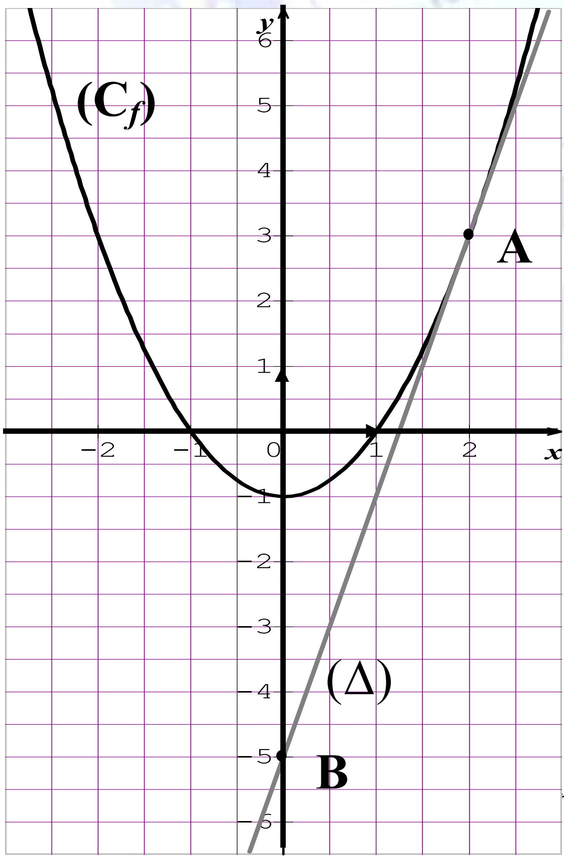
- أدرس قابلية الإشتقاق عند x_0 للدالة f في كل حالة مما يلي :

1) $f(x) = x^4 \quad ; \quad x_0 = 1$

2) $f(x) = x^3 + 1 \quad ; \quad x_0 = -1$

3) $f(x) = \dfrac{2}{x} \quad ; \quad x_0 = 3$

التمرين 3 .



نعتبر (C_f) التمثيل البياني لدالة f معرفة على $\mathfrak{R}$ وليكن (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) كما هو مبين في الشكل المقابل :

- احسب من خلال الشكل $f'(2)$.
- ثم إستنتج معادلة المماس (Δ)

التمرين 4 .

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \sqrt{-x+4}$

1) ادرس قابلية الإشتقاق للدالة f عند العدد 4- .

2) اكتب معادلة المماس للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة 4- .

التمرين 5 .

1) اكتب معادلة المماس للمنحنى $\left(C_f\right)$ الذي معادلته :

$y = -x^2 + 5$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

2) اكتب معادلة المماس للمنحنى $\left(C_g\right)$ الذي معادلته :

$y = -\frac{5}{x}$ عند النقطة ذات الفاصلة 5- .

3) عين نقطة تقاطع المماسين.

التمرين 6 .

أثبت أن المستقيم الذي معادلته : $y = -x + 2$ هو مماس للمنحنى $\left(C_f\right)$ الذي معادلته :

$y = \frac{1}{x}$ في النقطة التي فاصلتها 1 .

التمرين 7 .

نعتبر العبارة الجبرية : $p(x) = -4x^3 + 6x^2 - 2$

1) احسب $p(1)$ ثم إستنتج تحليلا لـ $p(x)$.

2) نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كما يلي :

$$f(x) = -4x^2 + 6x \quad \text{وَ} \quad g(x) = \frac{2}{x}$$

- عين نقط تقاطع $\left(C_f\right)$ وَ $\left(C_g\right)$ المنحنيين الممثلين للدالتين f وَg.

3) بين أن $\left(C_f\right)$ وَ $\left(C_g\right)$ يقبلان مماسا مشتركا في النقطة B ذات الفاصلة 1 .

التمرين 8 .

f دالة معرفة على $\left[0\,;\,+\infty\right[$ بالعبارة : $f(x) = x^3$

$\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

A نقطة من المنحنى $\left(C_f\right)$ فاصلتها x_0 .

1) أنشئ $\left(C_f\right)$ بآلة بيانية . H المسقط العمودي للنقطة A على محور

التراتيب . I نقطة حيث : $\overrightarrow{HI} = 3\,\overrightarrow{HO}$.

2) أنشئ المستقيم (AI) .

3) عين بدلالة x_0 إحداثيي النقط A , H , I .

4) بين أن (AI) هو مماس $\left(C_f\right)$ في A .

5) استعمل هذه الطريقة لإنشاء المماس للمنحنى $\left(C_f\right)$ في النقطة ذات

الفاصلة 1 .

التمرين 9 .

عين مجموعة تعريف و مجموعة قابلية الاشتقاق للدوال المعرفة

كما يلي واحسب دوالها المشتقة .

1) $f : x \mapsto -x^2 + 5x - 3$ ؛ 2) $f : x \mapsto (x-2)(x+5)$

3) $f : x \mapsto 4(x-5)^2$ ؛ 4) $f : x \mapsto \dfrac{1}{5+x}$

5) $f : x \mapsto \dfrac{-x^2 - x + 4}{-4x^2 + 5x - 1}$ ؛ 6) $f : x \mapsto x + 3 - \dfrac{2}{x+3}$

7) $f : x \mapsto \sqrt{2x-5}$ ؛ 8) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{2x-3}}{x-4}$

9) $f : x \mapsto \operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x$ ؛ 10) $f : x \mapsto \operatorname{Sin} x . \operatorname{Cos} x$

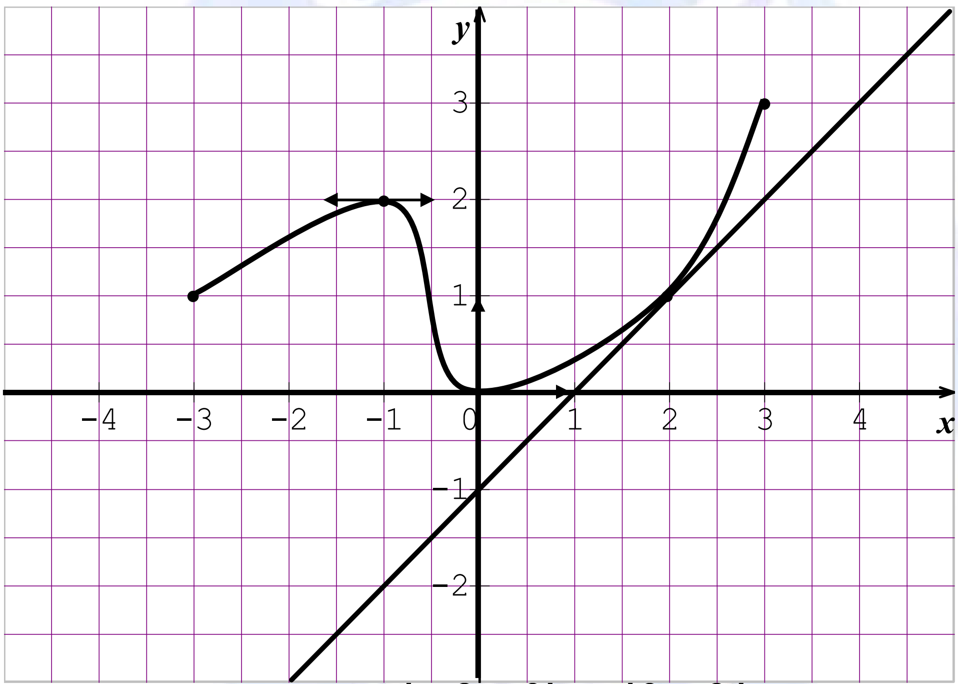
11) $f : x \mapsto 3\operatorname{Cos}\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ ؛ 12) $f : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Cos} x - 1}{\operatorname{Cos} x - 2}$

$$f : x \mapsto \frac{Sin\ x}{1 + \sqrt{2}\ Sin\ x} \quad (13$$

$$f : x \mapsto \ Sin\ x + \sqrt{3}\ Cos\ x \quad (14$$

التمرين 10 .

f دالة معرفة بتمثيلها البياني $\left(C_f\right)$ على المجال $[-3\ ;\ 3]$ وهي قابلة للاشتقاق على $[-3\ ;\ 3]$.



1) احسب كل

2) احسب :

3) نعتبر الدالة g المعرفة على $[-3\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ 3]$ بالعبارة :

$$g(x) = \left(\frac{1}{f}\right)(x) \ .$$

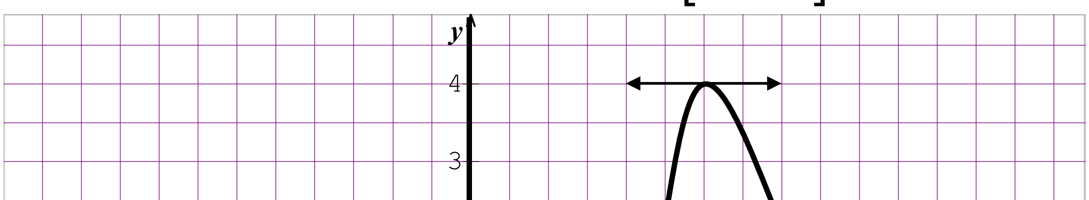
- احسب كل من : $g(3)$ ، $g(2)$ ، $g(-1)$ ، $g(-3)$

- احسب $g'(2)$.

- ادرس إتجاه تغير الدالة g . واكتب جدول التغيرات .

التمرين 11 .

f دالة تقبل الإشتقاق على $[-5\ ;\ 7]$ ومعرفة بتمثيلها البياني الآتي :



1) حل بيانيا في $[-5\ ;\ 7]$ المعادلة $f(x)=0$ ثم المعادلة $f'(x) = 0$.

2) حل بيانيا في $[-5\ ;\ 7]$ المتراجحة $f(x) \geq 0$ ثم المتراجحة $f'(x) \geq 0$.

3) عين جدول تغيرات الدالة f مُبرزا إشارة $f'(x)$.

(*) **التمرين 12** .

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x) = (x - 2)\sqrt{x - 2}$

1) عين مجموعة تعريف f .

2) عين الدالة المشتقة للدالة f على المجال $]2\ ;\ +\infty[$.

3) احسب $f(6)$ ثم إستنتج : $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{(x - 2)\sqrt{x - 2} - 8}{x - 6}$

4) ادرس إتجاه تغيرات الدالة f .

التمرين 13 .

ادرس إتجاه تغير الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 7}{x^2 - 2x + 1}$ معينا القيم الحدية للدالة f .

التمرين 14 .

ادرس إتجاه تغير الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x}$. معينا القيم الحدية للدالة f .

التمرين 15 .

ادرس إتجاه تغير الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x) = \frac{6(x - 1)}{x^2 - 2x + 4}$

معينا القيم الحدية للدالة f .

التمرين 16 .

ادرس إتجاه تغير الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x}$

معينا القيم الحدية للدالة f .

التمرين 17 .

- ادرس إتجاه تغير كل من الدوال الآتية على المجال $[-\pi ; \pi]$.

1) $f : x \mapsto Sin\ x$ ؛ 2) $g : x \mapsto Cos\ x$

3) $h : x \mapsto tan\ x$

- أنشئ تمثيلها البياني بإستعمال آلة بيانية .

التمرين 18 .

- ادرس تغيرات الدالة f حيث : $f(x) = Sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

- أنشئ تمثيلها البياني على $[0 ; 2\pi]$. عين القيم الحدية للدالة f .

التمرين 19 .

- ادرس تغيرات الدالة f حيث : $f(x) = Cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right)$.

- أنشئ التمثيل البياني الممثل لتغيراتها على $[-2\pi , 2\pi]$.

(*) **التمرين 20** .

- ادرس تغيرات الدالة f حيث : $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{x}$

(*) **التمرين 21** .

- ادرس إتجاه تغير الدالة f حيث : $f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{x - 2}}$

التمرين 22 .

1) أثبت أنه إذا كانت الدالة f زوجية وقابلة للإشتقاق على $\Re$ فإن دالتها المشتقة f' فردية .

2) إذا كانت f دالة فردية وقابلة للإشتقاق على $\Re$ فماذا يمكن القول عن دالتها المشتقة f' ؟

التمرين 23 .

ضع العلامة ✓ أمام كل جملة صحيحة والعلامة × أمام كل جملة خاطئة.

1) إذا كانت : $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h} = 0$

فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 . ☐.

2) إذا كان P هو العدد المشتق للدالة f عند العدد x_0

فإن (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه P . ☐.

3) إذا كانت : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ فإن (C_f)

يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل . □.

4) إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق على مجال مفتوح I

فإنها تقبل الاشتقاق عند كل عدد x_0 من I . □.

5) إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق عند x_0 فإنها

تقبل الاشتقاق على كل مجال يشمل x_0 . □.

6) كل دالة معرفة على مجال I تقبل الاشتقاق على I . □.

7) مشتق مجموع ثلاثة دوال هو مجموع مشتقات هذه الدوال. □.

8) إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند x_0 فإن

$f(x_0)$ قيمة حدية للدالة f . □.

التمرين 24 .

f دالة عددية معرفة على المجال $[1\ ;\ 2]$ بالعبارة :

$f(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{x+2}$ حيث : a , b , c أعداد حقيقية .

يعطى جدول تغيراتها كما يلي :

x	1	0	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frac{4}{3}$ ↘	1	↗ 2

- عين الأعداد a , b , c .

الحـــلـــول

التمرين 1 .

قابلية الاشتقاق عند 3 : لدينا $f(3) = 34$ و منه :

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{4x^2 + x - 5 - 34}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{4x^2 + x - 39}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(4x + 13)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} (4x + 13) = 25$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 3 حيث : $f'(3) = 25$.

التمرين 2 .

قابلية الاشتقاق عند x_0 في كل مما يلي :

1) لدينا : $f(x) = x^4 \quad ; \quad x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1)(x^2 + 1) = 4$$

إذن f تقـبل الاشتقاق عند 1 حيث : $f'(1) = 4$

2) لدينا : $f(x) = x^3 + 1 \quad ; \quad x_0 = -1$

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1 - 0}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1} (x^2 - x + 1) = 3$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 1- حيث : $f'(-1) = 3$.

3) لدينا : $f(x) = \frac{2}{x} \quad ; \quad x_0 = 3$

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{3}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{6 - 2x}{3x}}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{-2(x - 3)}{3x} \times \frac{1}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-2}{3x} = \frac{-2}{9}$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 3 حيث : $f'(3) = \frac{-2}{9}$.

التمرين 3 .

- حساب $f'(2)$:

بيانيا $f'(2)$ هو معامل توجيه المستقيم (AB) أي (Δ) :

وهو : $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$ أي : $\frac{3 - (-5)}{2} = 4$

إذن : $f'(2) = 4$

- معادلة المماس (Δ) عند A : $y - 3 = 4(x - 2)$

أي : $y = 4x - 5$.

التمرين 4 .

1) قابلية الاشتقاق عند 4- : $f(-4) = \sqrt{8}$

$$\lim_{x \to -4} \frac{f(x) - f(-4)}{x + 4} = \lim_{x \to -4} \frac{\sqrt{-x + 4} - \sqrt{8}}{x + 4}$$

$$= \lim_{x \to -4} \frac{\left[\sqrt{-x + 4} - \sqrt{8}\right]\left[\sqrt{-x + 4} + \sqrt{8}\right]}{(x + 4)\left[\sqrt{-x + 4} + \sqrt{8}\right]}$$

$$= \lim_{x \to -4} \frac{(-x + 4) - 8}{(x + 4)\left[\sqrt{-x + 4} + \sqrt{8}\right]}$$

$$= \lim_{x \to -4} \frac{-(x+4)}{(x+4)\left[\sqrt{-x+4} + \sqrt{8}\right]}$$

$$= \lim_{x \to -4} \frac{-1}{\sqrt{-x+4} + \sqrt{8}} = \lim_{x \to -4} \frac{-1}{2\sqrt{8}}$$

$$= \frac{-1(\sqrt{8})}{2\sqrt{8} \times \sqrt{8}} = \frac{-2\sqrt{2}}{16}$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 4- حيث : $f'(-4) = \frac{-\sqrt{2}}{8}$

2) معادلة المماس : $y - y_0 = f'(4) \times (x+4)$

و منه : $y - \sqrt{8} = \frac{-\sqrt{2}}{8}(x+4)$

أي : $y = \frac{-\sqrt{2}}{8}x - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}$

إذن : $y = \frac{-\sqrt{2}}{8}x + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

التمرين 5 .

1) قابلية الاشتقاق عند 1 : $f(1) = 4$

لدينا : $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-x^2 + 5 - 4}{x - 1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-x^2 + 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)(x+1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} -(x+1) = -2$$

إذن : $f'(1) = -2$.

- معادلة المماس : $y - f(1) = f'(1) \times (x - 1)$

و منه : $y - 4 = -2(x - 1)$ إذن : $y = -2x + 6$.

2) قابلية الاشتقاق عند 5- للدالة g : $g(-5) = 1$

$$\lim_{x \to -5} \frac{g(x) - g(-5)}{x+5} = \lim_{x \to -5} \frac{\frac{-5}{x} - 1}{x+5} = \lim_{x \to -5} \frac{\frac{-5-x}{x}}{x+5}$$

$$= \lim_{x \to -5} \frac{-(x+5)}{x} \times \frac{1}{x+5}$$

$$= \lim_{x \to -5} \frac{-1}{x} = \frac{1}{5}$$

- معادلة المماس : $y - g(-5) = g'(-5) \times (x + 5)$

و منه : $y - 1 = \frac{1}{5}(x + 5)$

إذن : $y = \frac{1}{5}x + 2$.

3) تعيين نقطة تقاطع المماسين :

نحل الجملة : $\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = \frac{1}{5}x + 2 \end{cases}$ ومنه : $-2x + 6 = \frac{1}{5}x + 2$

إذن : $-2x - \frac{1}{5}x = 2 - 6$ ومنه : $\frac{-11}{5}x = -4$

وبالتالي : $x = \frac{-4 \times 5}{-11}$ أي : $x = \frac{20}{11}$.

وعليه : $y = -2\left(\frac{20}{11}\right) + 6$ أي : $y = \frac{-40 + 66}{11}$

إذن : $y = \frac{26}{11}$.

نقطة تقاطع المماسين هي : $M\left(\frac{20}{11} ; \frac{26}{11}\right)$

التمرين 6 .

لدينا : $f(1) = 1$ و منه :

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{x} \times \frac{1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-(x - 1)}{x} \times \frac{1}{x - 1} = -1$$

إذن : $f'(1) = 1$ وهو معامل توجيه المستقيم .

وكذلك من أجل : $x = 1$ فإن : $y = 1$

إذن : $y = -x + 2$ معادلة المماس في النقطة $A\ (1\ ;\ 1)$.

التمرين 7 . .

1) حساب $p\ (1)$:

لدينا : $p\ (1) = -4\ (1)^3 + 6\ (1)^2 - 2 = 0$

ومنه : $p\ (x) = (x - 1)\ (a\ x^2 + bx + c)$

أي : $p\ (x) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$

$p\ (x) = ax^3 + (\ b - a\ )x^2 + (\ c - b\ )\ x - c$

وعليه : $\begin{cases} a = -4 \\ b - a = 6 \\ c - b = 0 \\ c = 2 \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$

ومنه : $p\ (\ \ )\ \ \ \ (\ \ \ -1\ \ \ \ \ ^2$