النهايات

الكفاءات المستهدفة

1 – حساب نهايات دالة.

2 – دراسة السلوك التقاربي لدالة باستعمال النهايات .

3 – تمثيل الدوال المرجعية .

4 – تمثيل دوال مجموع و جداء و قسمة دوال مرجعية.

تصميم الدرس

- تعاريف
- تمـاريـن و مشكلات
- الحلول

تعاريف

- **مفهوم نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 :**

f دوال معرفة على مجال يشمل x_0 لكنها غير معرفة عند x_0 .

نقول ان الدالة f تتناهى الى عدد l عندما يتناهى x نحو x_0 إذا كانت قيم $f(x)$ تقترب من l بالقدر الذي نريد عندما يقترب x من العدد x_0 .

أو بعبارة أخرى تكون المسافة بين $f(x)$ و l أصغر من أي عدد حقيقي موجب ε عندما تكون المسافة بين x و x_0 أصغر من أي عدد حقيق موجب α أي :

كلما كان : $|x - x_0| < \alpha$ كانت : $|f(x) - l| < \varepsilon$

ونكتب : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

- **النهاية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:**

مثال 1 :

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \dfrac{4}{x}$ و المعرفة على $[0 ; +\infty[$.

1) أكمل الجدول الآتي :

X	10	10^2	10^4	10^5
$f(x)$				

2) ماذا تستنتج ؟

الحل :

1)إكمال الجدول :

x	10	10^2	10^4	10^5
$f(x)$	0,4	0,04	0,0004	0,00004

2) الاستنتاج:

نلاحظ انه كلما كانت x كبيرة بقدر كاف فان $f(x)$ تأخذ قيما قريبة من الصفر أكثر فأكثر ونقول أن :

لما : $x \to +\infty$ فإن : $f(x) \to 0$

مثال 2 :

نعرف الدالتين العدديتين f وg على $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = x^2 \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x}$$

1 – أكمل الجدول الآتي :

x	10^2	10^4	10^6	10^8
$f(x)$				
$g(x)$				

الحل :

1) إكمال الجدول :

x	10^2	10^4	10^6	10^8
$f(x)$	10^4	10^8	10^{12}	10^{16}
$g(x)$	10	10^2	10^3	10^4

2) الاستنتاج :

كلما كانت قيم x كبيرة بقدر كاف فإن $f(x)$ و $g(x)$ تأخذان بالمقابل قيما كبيرة .

ونقول :

لما : $x \to +\infty$ فإن : $f(x) \to +\infty$ وكذلك

لما : $x \to +\infty$ فإن : $g(x) \to +\infty$.

- النهاية عند $+\infty$ او $-\infty$:

تعريف 1 :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على مجال $]a ; +\infty[$

- نقول أن $f(x)$ تتناهى نحو $+\infty$ عندما يتناهى x نحو $+\infty$ إذا وافق إذا كانت قيم $f(x)$ كبيرة جدا عندما يكون x موجب تماما و كبيرا جدا بقدر كاف ونكتب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

مثال 1: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

مثال 2: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

- نقول أن $f(x)$ تتناهى نحو $-\infty$ عندما يتناهى x نحو $-\infty$ إذا وافق إذا كانت قيم $f(x)$ صغيرة جدا عندما كوم x موجبا تماما وكبيرا جدا بقدر كاف ونكتب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

مثال1 : $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-\sqrt{x}) = -\infty$

تعريف 2 :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على مجال $]-\infty ; b[$

- نقول أن $f(x)$ تتناهى نحو $+\infty$ عندما يتناهى x نحو $-\infty$ إذا وافق إذا كانت قيم $f(x)$ كبيرة جدا عندما كوم x سالبة تماما وصغيرا جدا بقدر كاف ونكتب : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

مثال : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

- نقول أن $f(x)$ تتناهى نحو $-\infty$ عندما يتناهى x نحو $-\infty$ إذا وافق إذا كانت قيم $f(x)$ كبيرة جدا عندما تكون x سالبة تماما وصغيرا جدا بقدر كاف ونكتب :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

مثال : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

2- النهاية المنتهية :

l عدد حقيق ثابت . نقول أن f تتناهى نحو l عندما يتناهى x نحو $+\infty$ (أو نحو $-\infty$) إذا كانت قيم $f(x)$ قريبة جدا من l بالقدر الكافي عندما تكون x كبيرة جدا (أو صغيرة جدا) ونكتب :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ أو $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$

مثال1 : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

مثال2 : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 يقيم أكبر (بقيم أصغر)

مثال : نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \frac{1}{x}$

1)أكمل الجدول الآتي :

x	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$f(x)$				

2) ماذا تستنتج ؟

3) أكمل الجدول الآتي :

x	-0,01	-0,001	-0,0001	-0,00001
$f(x)$				

4) ماذا تستنتج ؟

الحل :

1) إكمال الجدول :

x	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$f(x)$	100	1000	10000	100000

2) نستنتج أن كلما كانت قيم x صغيرة جدا و موجبة كانت قيم $f(x)$ كبيرة جدا ونكتب : $\lim\limits_{x \to 0^{>}} \frac{1}{x} = +\infty$

3) إكمال الجدول :

x	-0,01	-0,001	-0,0001	-0,00001
$f(x)$	-100	-1000	-10000	-100000

4) نستنتج أنه كلما كانت قيم x قريبة من الصفر و سالبة فإن $f(x)$ صغيرة جدا و سالبة ونكتب : $\lim\limits_{x \to 0^{<}} f(x) = -\infty$

- المستقيم المقارب الأفقي :

إذا كانت : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ أو $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

فإن المستقيم الذي معادلته : $y = 1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) الذي معادلته : $y = f(x)$ عند $+\infty$ أو عند $-\infty$.

- المستقيم المقارب العمودي :

إذا كانت $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ أو $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

نقول أن المستقيم الذي معادلته : $x = a$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) الذي معادلته : $y = f(x)$

.

(*) - المستقيم المقارب المائل :

نقول عن مستقيم (Δ) انه مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) الذي معادلته : $y = f(x)$ عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ عندما تكون :

$$\lim_{x \to -\infty}\left[f(x) - (ax+b)\right] = 0 \quad \text{أو} \quad \lim_{x \to +\infty}\left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$$

تطبيق1 :

عين المستقيمات المقاربة لبيان الدالة f حيث : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

الحل :

الدالة f معرفة على : $D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ و منه :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

تعيين المستقيمات المقاربة :

بما أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ وَ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

فإن : $y = 0$ معادلة مستقيم مقارب عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

و بما أن : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ وَ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

فإن : $x = 0$ معادلة مستقيم مقارب عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

(*) تطبيق 2 :

نعتبر f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x حيث :

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$$

1 - عين مجموعة تعريف الدالة f .

2 - احسب نهايات الدالة f على أطراف مجموعة التعريف .

3- عين المستقيمات المقاربة لمنحنى (C_f) بواسطة معادلاتها .

الحل :

1) $D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

2) حساب النهايات عند أطراف D_f :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

3) تعيين المستقيمات المقاربة :

- بما أن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) = -\infty$ وَ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

فإن $x = 0$ معادلة مستقيم مقارب عند $+\infty$ وعند $-\infty$

و بما أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(x + 2 \right) \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

و $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - \left(x + 2 \right) \right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

فإن : $y = x + 2$ معادلة المستقيم المقارب المائل.

مبرهنات على النهايات :

- نهاية المجموع :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	l أو $+\infty$	l أو $-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)$	$l'+l$	$+\infty$	$-\infty$	حالة عدم التعيين

- نهاية الجداء :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	$l>0$ أو $+\infty$	$l<0$ أو $-\infty$	$l>0$ أو $+\infty$	$l<0$ أو $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)$	$l'\times l$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	حالة عدم التعيين

- نهاية المقلوب :

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$l\ ;\ l\neq 0$	$l=0$ $g(x)>0$	$l=0$ $g(x)<0$	$+\infty$ أو $-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{g}\right)(x)$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

ملاحظة :

تبقى المبرهنات السابقة صحيحة من أجل :

$$x \to -\infty \quad \text{أو} \quad x \to +\infty$$

- نهاية الدوال المثلثية :

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = x_0 \quad ; \quad \lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- حالات عدم التعيين :

1) إذا كانت : $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ وَ $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ فإن :

$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x)$ في حالة عدم التعيين .

مثال :

$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x + 3)$ في حالة عدم التعيين وتحسب هكذا :

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x + 3) = \lim_{x \to +\infty} x\left[x - 1 + \frac{3}{x}\right] = +\infty$$

2) إذا كانت : $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ و كانت : $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

فإن : $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ في حالة عدم التعيين .

مثال :

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$ في حالة عدم التعيين .

تحسب هكذا :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x_2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x-3}{x+1} = -1$$

3) إذا كانت : $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

وَ $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

فإن : $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ في حالة عدم التعيين .

مثال :

$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2}{2x+3}$ هي في حالة عدم التعيين و تحسب هكذا :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2x+3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2+\frac{3}{x}} = +\infty$$

4) إذا كانت :

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

وَ $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

فإن : $\lim_{x \to x_0} (f \times g)(x)$ في حالة عدم التعيين

مثال :

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \times \frac{1}{x}$ في حالة عدم التعيين وتحسب هكذا :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{x \cdot \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

ملاحظات :

تبقى حالات عدم التعيين صحيحة من أجل :

$x \to +\infty$ أو $x \to -\infty$

نهايات بعض الدوال المألوفة :

عندما يؤول x إلى $+\infty$ (أو إلى $-\infty$) فإن كثير الحدود هي نهاية حده الأعلى درجة .

2) عندما يؤول x إلى $+\infty$ (أو إلى $-\infty$) فإن نهاية دالة ناطقة نهاية حاصل قسمة الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام.

تمـاريـن و مشكلات

التمرين 1 .

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x + 4}{x - 1}$$

1) عين الأعداد الحقيقية a , b , c بحيث :

$$x^3 - 5x + 4 = (x - 1)(a x^2 + b x + c)$$

2) احسب : $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

التمرين 2 .

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}$$

1) احسب : $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

2) احسب : $f(2 + h)$ من أجل $h \neq 0$

احسب $\lim\limits_{h \to 0} f(2 + h)$. ماذا تستنتج ؟

(*) **التمرين 3** .

f دالة معرفة على المجال $I = [-1 ; 1]$ حيث : $f(x) = x^2 + 1$

1 استنتج مجال J من I بحيث : $|f(x) - 1| < 10^{-8}$ حيث n عدد طبيعي.

2) استنتج نهاية $f(x)$ عندما يتناهى x نحو 0 .

التمرين 4 .

1) عين I مجموعة تعريف الدالة f حيث : $f\ (x) = \sqrt{x}$

2) باستعمال آلة بيانية أنشئ (C_f) .

3) نعتبر الدالة g حيث : $g\ (x) = \dfrac{\sqrt{(x-1)^2 \cdot x}}{x-1}$

- بين أن g معرفة على $\mathbf{I} - \{1\}$
- بين كيف يمكن إنشاء (C_g) إنطلاقا من من (C_f) .
- هل تقبل الدالة g نهاية عند 1 .

التمرين 5 .

نعتبر الدالة g المعرفة على $\Re - \{0\}$ بالعبارة : $g\ (x) = \dfrac{|x|}{x}$

1- أنشئ التمثيل البياني للدالة g باستعمال آلة بيانية ثم علل ذلك

2- هل تقبل الدالة g نهاية عند 0 .

التمرين 6 .

احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x}{x}$ ؛ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x+2}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 1}{x+1}$ ؛ 4) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x - 4}{x^2 + x - 6}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 2}$.

التمرين 7 .

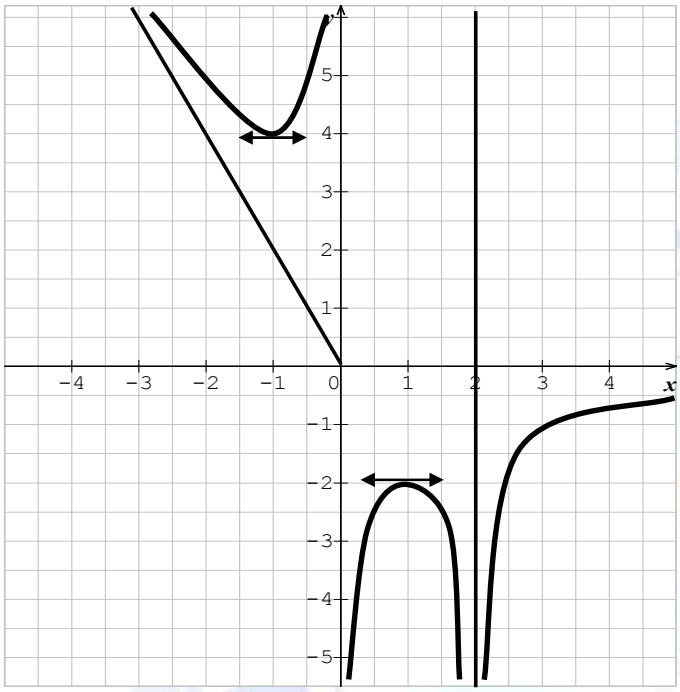
نعتبر f دالة عددية لمتغير حقيقي x بحيث :

$$f(x) = \frac{|x^2 - x|}{x} \quad ; \quad x \neq 0$$

1- اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

2- هل الدالة f تقبل نهاية عند 0 .

التمرين 8 .



إليك التمثيل البياني للدالة f

1- عين مجموعة تعريف الدالة f .

2- استنتج من البيان النهايات عند أطراف مجموعة التعريف .

3- عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

التمرين 9 .

احسب النهايات الآتية :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^2 - x + 2)$ ؛ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - x$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x - 3}{-x + 4}$ ؛ 4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2 - 5x + 4}$

5) $\lim\limits_{x \to 1} x - 5 + \frac{1}{x - 1}$ ؛ 6) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{5x + 4}{4 - x^2}$

التمرين 10 .

أذكر صحة أم خطأ ما يلي :

1) إذا كانت : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ وَ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

فإن : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f+g)(x) = 0$

2) إذا كانت : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = +\infty$

فإن : $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = -1$

3) إذا كانت : $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 0$

فإن : $\lim\limits_{x \to 3} (f+g)(x) = 0$

4) إذا كانت : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ فـــإن $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)]^2 = +\infty$

5) إذا كانت : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = 0$

6) إذا كانت : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ فإن : $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{l}$

حيث l عدد حقيقي .

7) إذا كانت : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ وَ $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 5$ فإن :

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3}{5}$$

التمرين 11 .

احسب نهاية الدوال الآتية عند $+\infty$ ثم عند $-\infty$:

1) $f(x) = -5x^2 + 4x - 3$ ؛ 2) $f(x) = 5 - \frac{2}{x}$

3) $f(x) = (3x-1)^3$ ؛ 4) $f(x) = (5x-2)(x^2-3)$

5) $f(x) = \left(5 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)$ ؛ 6) $f(x) = \frac{5x}{x-2}$

7) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ ؛ 8) $f(x) = \frac{x^3-3x}{x^2+1}$

9) $f(x) = \frac{x^2}{(x-2)(x+3)}$ ؛ 10) $f(x) = \frac{x^4}{x^3-1}$

التمرين 12 .

احسب نهايات الدوال الآتية عند x_0 :

1) $f(x) = 1 - x - \frac{2}{x}$ حيث : $x_0 = 0$

2) $f(x) = \frac{x+2}{x-5}$ حيث : $x_0 = 5$

3) $f(x) = \frac{x^2+3x-10}{-x+5}$ حيث : $x_0 = 5$

4) $f(x) = \frac{5x}{2x+1}$ حيث : $x_0 = -\frac{1}{2}$

5) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ حيث : $x_0 = 1$

6) $f(x) = \frac{x^2}{(x-6)^2}$ حيث : $x_0 = 6$

(*) التمرين 13 .

عين مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة مما يلي وأحسب النهايات عند أطرافها ثم أذكر معادلات المستقيمات المقاربة .

1) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 2}$ 2) $f(x) = \dfrac{x}{(2x - 1)^2}$

3) $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{5}{x + 1}$ 4) $f(x) = \dfrac{6x^2 - 3}{x - 3x^2}$

5) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x - 1}}$ 6) $f(x) = x - \dfrac{5}{\sqrt{x - 2}}$

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 7} - 3}{x + 2}$ 8) $f(x) = x^2 + x\sqrt{x}$

التمرين 14 .

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x - 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب النهايات عند أطرافها .

استنتج معادلات المستقيمات المقاربة

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f

3) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة 2 . أنشئ (Δ) و (C_f)

4) نعتبر الدالة g حيث : $g(x) = a x^2 + bx - 1$

a و b عددان حقيقيان.

- عين a و b بحيث يكون لـ (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا عند A

- عين مجموعة تعريف g ثم احسب النهايات عند مجموعة تعريفها.

- أدرس اتجاه تغير g ثم أنشئ (C_g) في نفس المعلم السابق بعد تعيين نقط تقاطع (C_f) و (C_g) .

5) حل بيانيا المتراجحة : $f(x) < g(x)$

(*) التمرين 15 .

نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re - \{1\}$ بالعبارة :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

1) احسب نهاية الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها

2) - عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث من أجل عدد حقيقي x من $\Re - \{1\}$ فإن : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$

- احسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{c}{x - 1}$ ثم $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{c}{x - 1}$.

- استنتج أن $y = ax + b$ معادلة المستقيم المائل.

- عين المستقيم المقارب الآخر .

3) (Δ) مستقيم معادلته : $y = x + 2$

M نقطة من (C_f) فاصلتها x وN نقطة من (Δ) فاصلتها x

نضع : $d(x) = f(x) - (x + 2)$

- ما هو التفسير الهندسي لـ $|d(x)|$.
- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x)$ وَ $\lim\limits_{x \to -\infty} d(x)$
- ماذا تستنتج بالنسبة إلى (C_f) و (Δ)
- أدرس إشارة $d(x)$ من أجل : $x \in \Re - \{1\}$ استنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ)
- عين عدد طبيعي n بحيث :

إذا كان $x > n$ فـــإن : $MN < 0,01$ ما هو التفسير الهندسي .

التمرين16 .

إليك الدالة f حيث : $f\ (x) = 1 - \frac{1}{x}$

1- أدرس تغيرات الدالة f على $]0\ ;\ +\infty[$.

2- بين أنه من أجل كل عدد x من $]0\ ;\ +\infty[$ فإن : $f\ (x) < 1$

3- لتكن M نقطة من (C_f) حيث : $M\ (x\ ;\ f(x))$ و N نقطة حيث $N\ (x\ ;\ 1)$

- أكتب المسافة MN بدلالة x .

- عين عدد حقيقي a بحيث إذا كان $x > a$ فإن : $MN < 0{,}01$

- عين عدد حقيقي b بحيث إذا كان $x > b$

فإن : $MN < 10^{-n}$ حيث n عدد طبيعي أكبر من 1 .

وعليه من أجل n كبيرة جدا يمكن جعل $1 - f(x)$ قريبة من o وذلك إذا كان x كبير جدا استنتج أن

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

يعني أن : $y = 1$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f)

التمرين 17 .

f دالة معرفة على المجال $]0\ ;\ +\infty[$ بالعبارة : $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2x}$

1- عين الأعداد الحقيقية $a\ ,\ b\ ,\ c$ بحيث من أجل عدد x من $]0\ ;\ +\infty[$ فإن : $f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+2}$

2- أحسب النهايات عند أطراف المجال $]0\ ;\ +\infty[$ ثم استنتج معادلات المستقيمات المقاربة.

3- أدرس وضعية (C_f) التمثيل البياني للدالة والمستقيم المقارب الأفقي.

التمرين 18 .

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كمايلي : $f(x) = x^2 - x$

1) أدرس تغيراتها ثم أنشئ (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(o ; i , j)$. وحدة الطول 2cm .

2) نعتبر كثير حدود $p(x)$ حيث : $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$

احسب $p(1)$ ثم اكتب $p(x)$ على شكل جداء عاملين ثم ادرس إشارته.

3) نعتبر الدالة g حيث : $g(x) = \dfrac{x^3 - x + 4}{x + 1}$

أ- بين أنه من أجل كل عدد x من $\mathbb{R} - \{-1\}$ فإن :

$$g'(x) = \frac{p(x)}{(x+1)^2}$$

ب- ادرس تغيرات الدالة g .

4) بين أنه من أجل كل عـدد x من $\mathbb{R} - \{-1\}$:

$f(x) = g(x) + \dfrac{a}{x+1}$ حيث a عدد حقيقي يطلب تعيينه.

- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} (f-g)(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} (f-g)(x)$

استنتج وضعية (C_f) و (C_g)

أنشئ (C_g) في نفس المعلم السابق.

الحلـول

التمرين 1 .

1) تعيين : a , b , c :

لدينا : $x^3 - 5x + 4 = (x - 1)(ax^2 + bx + C)$

$$x^3 - 5x + 4 = ax^3 + bx^2 + Cx - ax^2 - bx - C$$

$$x^3 - 5x + 4 = ax^3 + (b - a)x^2 + (C - b)x - C$$

ومنه : $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ C - b = -5 \\ -C = 4 \end{cases}$ وعليه : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ C = -4 \end{cases}$

إذن : $x^3 - 5x + 4 = (x - 1)(x^2 + x - 4)$

2) حساب النهاية:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x - 4)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^2 + x - 4) = -2$$

التمرين 2 .

1) لدينا : $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 1)}{x - 2}$

$$= \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 1) = 9$$

2) لدينا : $f(2 + h) = \frac{(2 + h)^3 - 3(2 + h) - 2}{2 + h - 2}$

$$f(2+h) = \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 6 - 3h - 2}{h}$$

$$= \frac{h^3 + 6h^2 + 9h}{h} = \frac{h(h^2 + 6h + 9)}{h}$$

وعليه : $f(2+h) = h^2 + 6h + 9$

$$\lim_{h \to 0} f(2+h) = \lim_{h \to 0} (h^2 + 6h + 9) = 9$$

النتيجة : $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{h \to 0} f(2+h)$

(*) التمرين 3 .

1) استنتاج J : لدينا : $|f(x) - 1| < 10^{-8}$

وعليه : $|x^2 + 1 - 1| < 10^{-8}$ ومنه : $|x^2| < 10^{-8}$

إذن : $x^2 < 10^{-8}$ وعليه $\sqrt{x^2} < \sqrt{10^{-8}}$

إذن : $|x| < 10^{-4}$ أي: $-10^{-4} < x < 10^{-4}$

و بالتالي : $-0,0001 < x < 0,0001$

وعليه : $J =]-0,0001 \; ; \; 0,0001[$

2) استنتاج $\lim_{x \to 0} f(x)$

نلاحظ أنه من أجل : $-0,001 < x < 0,0001$

وعليه : $|f(x) - 1| < 10^{-8}$

كلما كان x قريبا من 0 فإن المسافة بين $f(x)$ و 1 صغيرة جدا

و موجبة وعليه : $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

التمرين 4 .

1) $I = \{x \in \Re : x \geq 0\}$ وعليه : $I = [0 \; ; \; +\infty[$