الهندسة في الفضاء

الكفاءة المرحلية :

تنمية تصور الأشكال في الفضاء

استعمال المنظور المتساوي القياس لتمثيل الأشكال في الفضاء.

التعرف على الأوضاع النسبية في الفضاء

ممارسة الحساب الشعاعي

ممارسة الحساب الشعاعي في الهندسة التحليلية

تصميم الدرس

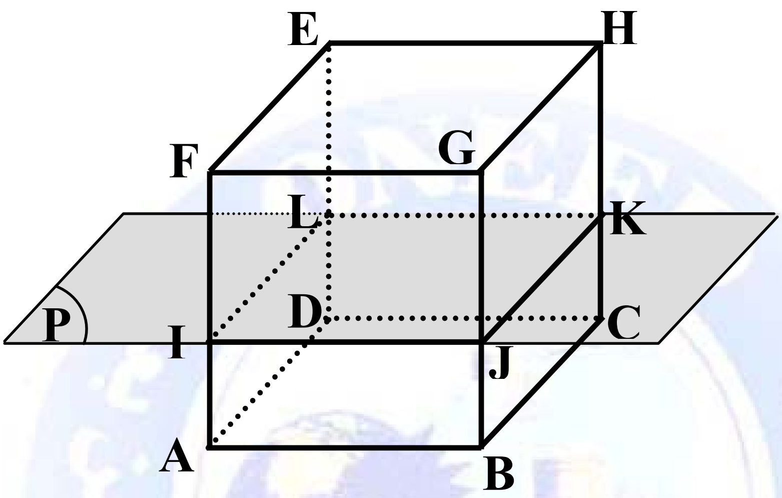
- تعاريف
- تمارين
- الحلول

تعاريف

(*)   I – المقاطع المستوية :

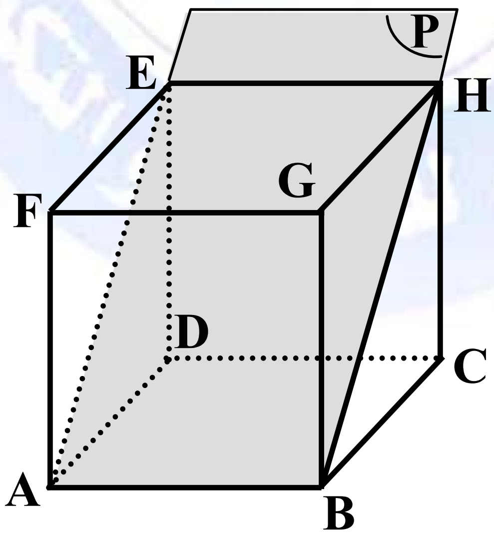
1- إنشاء مقطع مكعب بمستو :

مثال 1 :



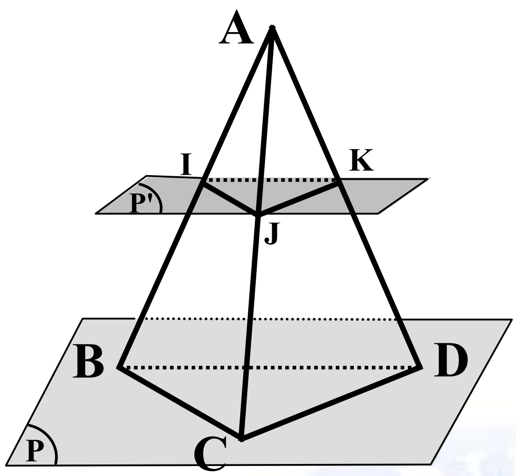
المستوي **(P)** يقطع المكعب ABCDEFGH وفق   المربع IJKL.

مثال 2 :



المستوي (p) يقطع المكعب ABCDEFGH وفق المستطيل ABHE.

2- إنشاء مقطع رباعي وجوه بمستو :



مثال 1 :

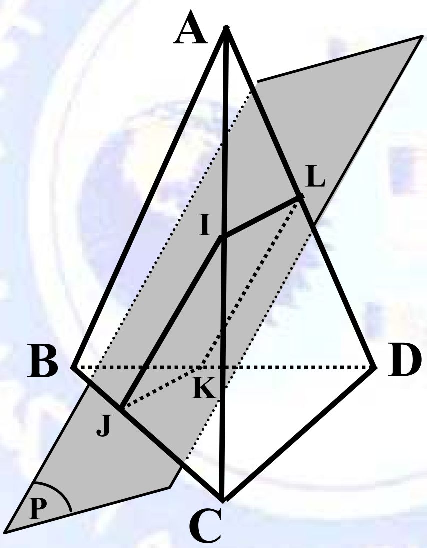
المستوي (p') يقطع رباعي

الوجوه (ABCD) وفق

المثلث IJK .

مثال 2 :

المستوي (p) يقطع رباعي الوجوه (ABCD) وفق متوازي الأضلاع (IJKL) .



II - الحساب الشعاعي في الفضاء :

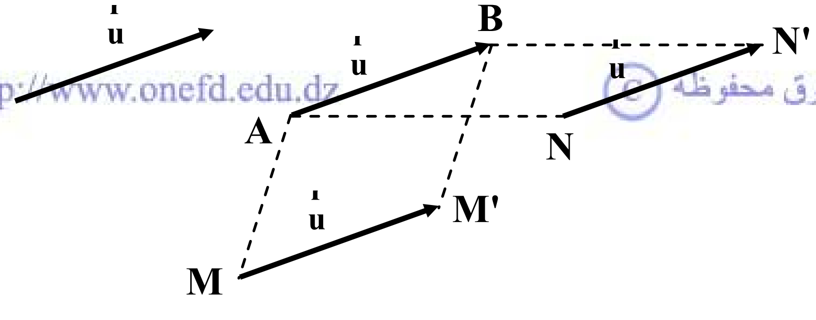
1- أشعة الفضاء : A وB نقطتان من الفضاء .

* كل نقطة M من الفضاء يمكن إرفاقها بالنقطة M' بحيث

يكون : $MABM'$ متوازي أضلاع .

الثنائية (M , M') المحصل عليها تمثل نفس الشعاع $\vec{u}$ من الفضاء .

ونكتب : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = ...$



* إذا انطبقت A وB فإن الشعاع $\vec{u}$ يسمى الشعاع المعدوم .

ونكتب : $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{NN} = \ldots$

2- تمييز شعاع : $\vec{u}$ شعاع غير معدوم من الفضاء حيث :

$\vec{U} = \overrightarrow{AB}$ مع $A \neq B$. لدينا :

* منحنى الشعاع $\vec{u}$ هو منحنى المستقيم (AB) .

* اتجاه الشعاع $\vec{u}$ من A إلى B .

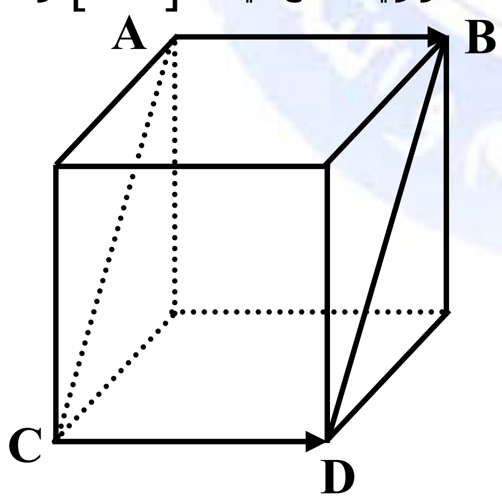
* معيار الشعاع $\vec{u}$ هو $\|\vec{u}\|$ و هو المسافة بين A وB .

ملاحظة :

من أجل كل نقطة من الفضاء و شعاع $\vec{u}$ توجد نقطة وحيدة M بحيث : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

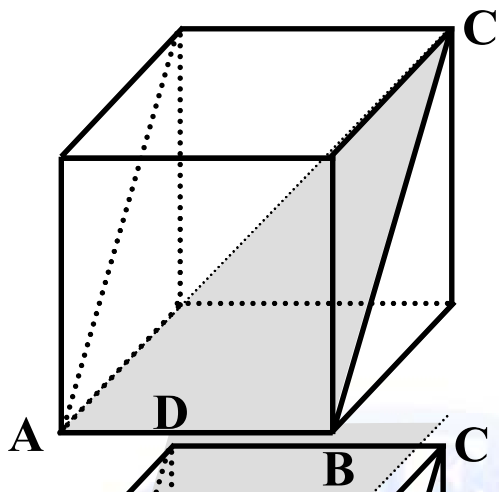
3- تساوي شعاعين :

يتساوي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان ABCD متوازي أضلاع أي أن $[AD]$ و $[BC]$ لها نفس المنتصف .

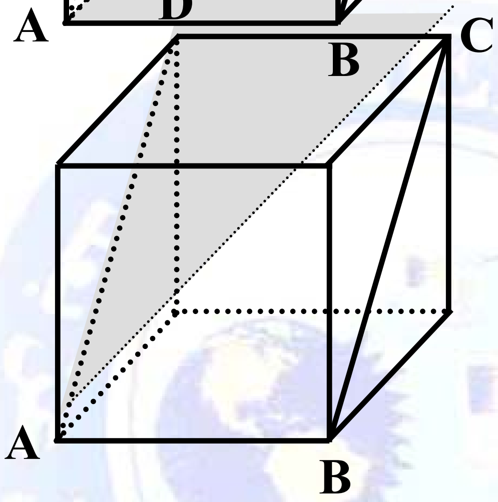


4- الجمع الشعاعي :

ويعتمد على علاقة شكل :



* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

خواص :

$\vec{u} , \vec{v} , \vec{w}$ ثلاثة أشعة في الفضاء :

1) $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$ (2 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

3) $\vec{u} + \left(-\vec{u}\right) = \vec{o}$ (4 $\left(\vec{u}+\vec{v}\right) + \vec{w} = \vec{u} + \left(\vec{v}+\vec{w}\right)$

5- جداء شعاع بعدد حقيقي :

λ عدد حقيقي غير معدوم ، $\vec{u}$ شعاع في الفضاء .

* إذا كان $\vec{u} \neq \vec{o}$ فان الشعاع $\lambda\vec{u}$ هو الشعاع المعرف كما يلي :

- الشعاعان $\vec{u}$ و $\lambda\vec{u}$ لهما نفس المنحى .

- الشعاعان $\vec{u}$ و $\lambda\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه إذا كان $0 < \lambda$ و مختلفان في الاتجاه إذا كان : $\lambda < 0$.

- $\left\|\lambda\vec{u}\right\| = \left|\lambda\right| . \left\|\vec{y}\right\|$

* إذا كان : $\lambda \vec{u} = \vec{0}$ فإن : $\lambda = 0$ أو $\vec{u} = \vec{0}$

إذا كان : $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\lambda = 0$ فإن : $\lambda \vec{u} = \vec{0}$.

خواص :

من أجل كل عددان حقيقيان α و β و كل شعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من الفضاء لدينا:

1) $\alpha\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ 2) $(\alpha + \beta)\, \vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

3) $\alpha\, (\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

6- الأشعة التي لها نفس الحامل :

نقول عن الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أن لهما نفس الحامل إذا وجدت ثلاث نقط A , B , C على استقامة واحدة بحيث : $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ و $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

خاصية :

نقول أن الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لهما نفس الحامل إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي λ بحيث : $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

7- تحديد المستوى :

لتكن A نقطة من الفضاء $\vec{u}$, $\vec{v}$ شعاعان ليس لهما نفس الحامل في الفضاء.

α و β عددان حقيقيان متغيران .

المجموعة (p) للنقطة M من الفضاء بحيث :

$\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ هي مستو في المعلم $\left(A \,;\, \vec{u} \,,\, \vec{v}\right)$.

حيث $M\left(\alpha \,;\, \beta\right)$ في المعلم $\left(A \,;\, \vec{u} \,,\, \vec{v}\right)$.

(*) 8- أشعة في مستو واحد :

نقول عن ثلاثة أشعة $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ من الفضاء أنها في مستو واحد إذا وجدت أربعة نقط D و C و B و A من نفس المستوي بحيث : $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ و $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

مبرهنة_:

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ثلاث أشعة من الفضاء بحيث $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليس لهما نفس الحامل.

نقول أن الأشعة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ من نفس المستوى إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان α و β

بحيث : $\vec{w} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$

III- المعالم في الفضاء :

1- تعريف :

إذا كانت O نقطة في الفضاء . $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ثلاث أشعة ليست في مستو واحد فإنه من أجل كل نقطة M من الفضاء توجد ثلاثية وحيدة (x, y, z) من الأعداد الحقيقية بحيث :

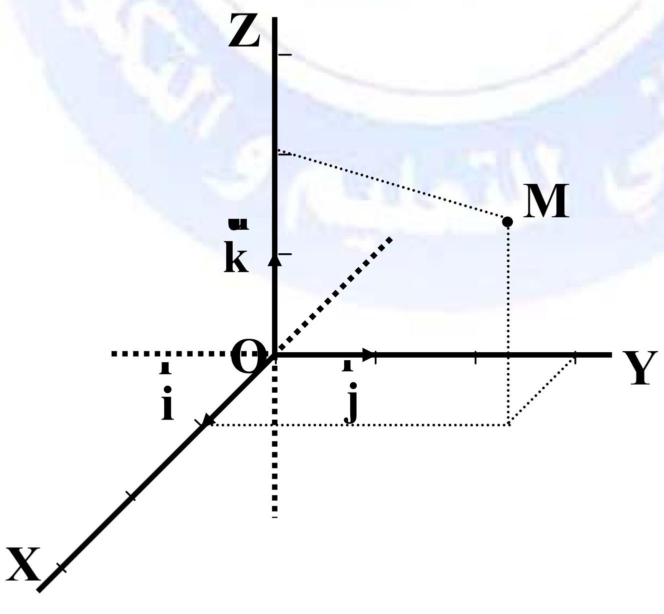
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

(x, y, z) تسمى إحداثيات النقطة M في المعلم $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

x : فاصلة M ، y ترتيب M ، z راقم M .

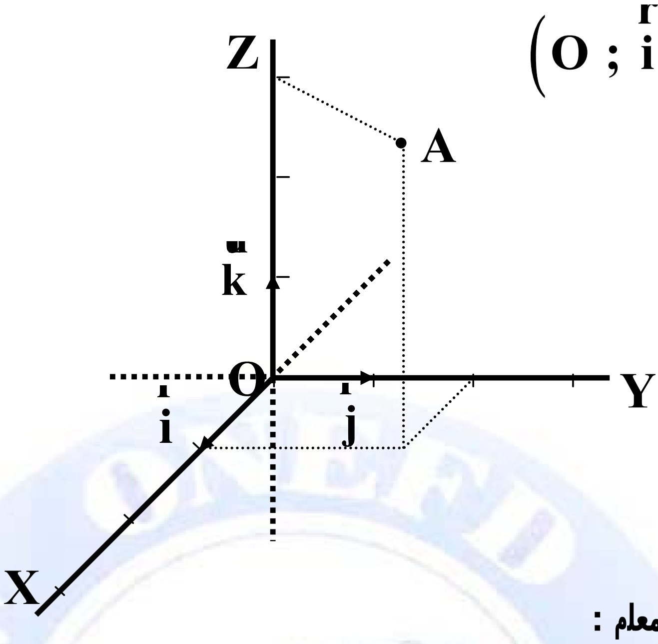
ونقول أيضا أن (x, y, z) هي أيضا مركبات الشعاع $\overrightarrow{OM}$

نكتب : $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



مثال :

عين النقطة $A\ (1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ في المعلم $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}\right)$



2- الحساب في المعلم :

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}\right)$

* إذا كانت : $B\ (x_B\ , y_B\ , z_B)$ ، $A\ (x_A\ , y_A\ , z_A)$

فإن : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

* إذا كان $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ Z \end{pmatrix}$ ، λ عدد حقيقي

فإن : $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$; $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda\ x \\ \lambda\ y \\ \lambda\ z \end{pmatrix}$

مثال 1 :

عين مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ حيث : $B\ (-2\ ;\ 5\ ;\ 1)$, $A\ (3\ ;\ 4\ ;\ 2)$

الحل : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-3\\5-4\\1-2\end{pmatrix}$ ومنـه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\1\\-1\end{pmatrix}$

مثال 2 :

عين مركبات الأشعة : $2\vec{u}$, $\alpha\,\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}$

حيث $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\6\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$. α عدد حقيقي .

الحل : $2\vec{u}\begin{pmatrix}2\times 1\\2\times(-2)\\2\times 4\end{pmatrix}$ ومنه : $2\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\\8\end{pmatrix}$

$\alpha\,\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha\,(-5)\\\alpha\times 6\\\alpha\times(-1)\end{pmatrix}$ ومنه : $\alpha\,\vec{v}\begin{pmatrix}-5\,\alpha\\6\,\alpha\\-\alpha\end{pmatrix}$

$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}1-5\\-2+6\\4-1\end{pmatrix}$ ومنه : $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\4\\3\end{pmatrix}$

III- المسافة بين نقطتين :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$

1- إذا كانت $A\,(x_A\,,y_A\,,z_B)$, $B\,(x_B\,,y_B\,,z_B)$

فإن : $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

مثال :

احسب المسافة بين النقطتين A و B

حيث : $A\,(-3\,;\,4\,;\,1)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,3)$

لدينا : $AB = \sqrt{(0+3)^2 + (1-4)^2 + (3-1)^2}$

ومنه : $AB = \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + (2)^2} = \sqrt{22}$

إذن : $AB = \sqrt{22}$

2- إذا كان $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ فإن : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

مثال :

احسب طويلة الشعاع : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$

الحل :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{16}$ أي : $\|\vec{u}\| = 4$

3- تعيين معادلة لمستو مواز لأحد مستويات الإحداثيات :

- كل مستو يوازي المستوي $(x\,o\,y)$ يقبل معادلة من الشكل : $z = \alpha$
  حيث α عدد حقيقي .
- كل مستو يوازي المستوي $(x\,o\,z)$ يقبل معادلة من الشكل : $y = \beta$
  حيث β عدد حقيقي .
- كل مستو يوازي المستوي $(y\,o\,z)$ يقبل معادلة من الشكل : $z = \delta$
  حيث δ عدد حقيقي .

مثال :

اكتب معادلة المستوي الذي يوازي المستوي $(y\,o\,z)$ ويشمل النقطة $B(3\,;-2\,;5)$.

الحل :

معادلة هذا المستوي هي : $x = \alpha$

لكن المستوي يشمل B وعليه معادلة هذا المستوي هي : $x = 3$

4- تعيين معادلات مستقيم يشمل نقطة و يوازي شعاع معلوم :

$A(x_0 , y_0 , z_0)$ نقطة من الفضاء . $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \delta\end{pmatrix}$ شعاع غير معدوم

(D) مستقيم يشمل A و $\vec{u}$ شعاع توجيه له .

لتكن M نقطة من الفضاء حيث : $M(x , y , z)$

تكون M نقطة من (D) إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{AM} // \vec{u}$

ولدينا : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x - x_0\\ y - y_0\\ z - z_0\end{pmatrix}$ ، $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \delta\end{pmatrix}$ ومنه : $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$

حيث λ عدد حقيقي غير معدوم .

وعليه : $\begin{cases} x - x_0 = \lambda\alpha \\ y - y_0 = \lambda\beta \\ z - z_0 = \lambda\delta \end{cases}$ ومنه : $\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\delta}$

إذا كان : $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$ و $\delta \neq 0$

ومنه : $\begin{cases} \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} \\ \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\delta} \end{cases}$ هي معادلات المستقيم (D) .

مثال :

اكتب معادلات المستقيم (AB) حيث : $A(1 ; 3 ; -5)$, $B(4 ; -2 ; 5)$

الحل :

لتكن $M(x , y , z)$ نقطة من (AB)

لدينا : $\overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB}$ أي $\overrightarrow{AB}$ هو شعاع التوجيه

ومنه : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$

$$\lambda\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\lambda\\-5\lambda\\10\lambda\end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-5\\10\end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-3\\z+5\end{pmatrix}$$

ومنه : $\begin{cases} x-1=3\lambda \\ y-3=-5\lambda \\ z+5=10\lambda \end{cases}$ أي : $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{-5}=\dfrac{z+5}{10}$

و بالتالي معادلات (AB) هي : $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{-5} \\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{z+5}{10} \end{cases}$

5- معادلات سطح الكرة التي مركزها O :

ليكن R نصف قطرها .

معادلة الكرة من الشكل : $x^2+y^2+z^2=R^2$

مثال :

اكتب معادلة الكرة التي مركزها O و نصف قطرها 5 .

الحل :

معادلة الكرة هي : $x^2+y^2+z^2=25$

(*) 6- معادلة الاسطوانة الدورانية :

ليكن R نصف قطرها .

* إذا كان $(z'z)$ محورها : $x^2+y^2=R^2$

* إذا كان $(y'y)$ محورها : $x^2+z^2=R^2$

* إذا كان $(x'x)$ محورها : $x^2+z^2=R^2$

مثال :

اكتب معادلة الأسطوانة التي محورها $(z'z)$ ونصف قطرها 2 .

الحل :

$$x^2 + y^2 = 4$$

(*) 7- معادلة المخروط الدوراني :

o رأسه

* إذا كان $(z' z)$ محوره : $x^2 + y^2 - \alpha z^2 = 0$

* إذا كان $(y' y)$ محوره : $x^2 + z^2 - \beta y^2 = 0$

* إذا كان $(x' x)$ محوره : $y^2 + z^2 - \delta x^2 = 0$

مثال :

اكتب معادلة المخروط الدوراني الذي محوره $(y' y)$ ويشمل $A(0 ; 1 ; 2)$

الحل :

$x^2 + z^2 - \beta y^2 = 0$. لكن A نقطة من المخروط

و منه : $0 + 4 - \beta = 0$ و عليه : B = 4 .

إذن معادلة المخروط : $x^2 + z^2 + -4y^2 = 0$.

تمـاريـن و مشكلات

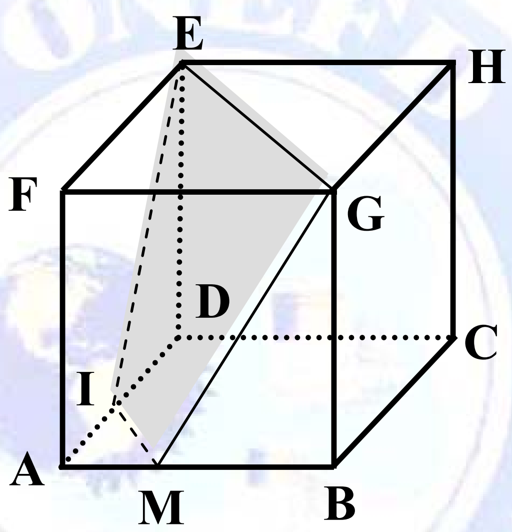
(*) التمرين 1 .

ABCDEFGH مكعب .

M نقطة من $[AB]$.

المستوي (GEM) يقطع (DA) في I .

- برهن أن المستقيمان (GE) و(MI) متوازيان .



(*) التمرين 2 .

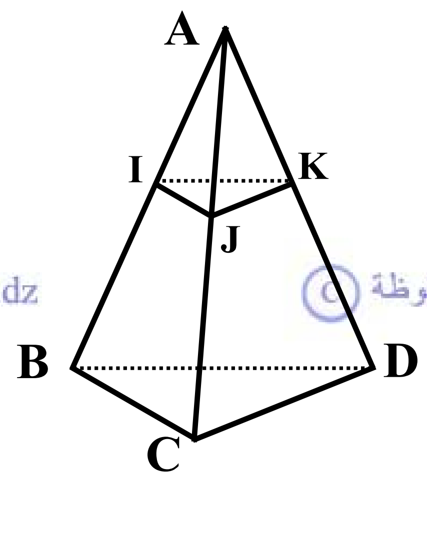
ABCD رباعي وجوه . أوجهه متقايسة و طول كل حرف منه 5 cm

I , J , K ثلاث نقط من $[AD]$, $[AC]$, $[AB]$ على الترتيب

حيث : AI = AJ = AK = 2 cm

1- احسب أطوال أضلاع المثلث IJK .

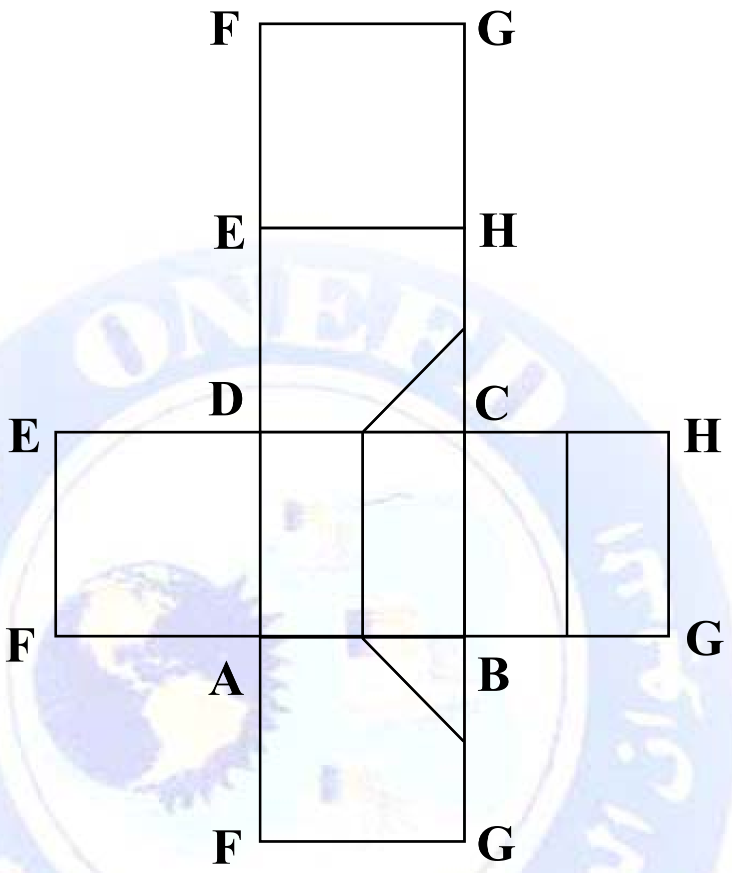
2- عين تصميم للمجسم ABCD مبرزا عليه أثر تقاطع المستوي الذي يشمل **I , J , K** معه .



(*) **التمرين 3** .

إليك تصميما لمكعب مرسوم عليه أثر تقاطع مستو مع هذا المكعب .

- أنجز تمثيلا بالمنظور المتساوي القياس للشكل .



التمرين 4 .

A , B , C ثلاث نقط في الفضاء ليست على استقامة واحدة .

1- أنشئ النقطة D بحيث : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2- أنشئ النقطة E نظيرة D بالنسبة إلى C .

3- أنشئ النقطة H بحيث : $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AE}$.

4- برهن أن النقط C , E , H , D على استقامة واحدة .

التمرين 5 .

A , B , C ثلاث نقط في الفضاء ليست على استقامة واحدة .

I منتصف $[BC]$. E , F نقطتان متناظرتان بالنسبة إلى I .

- برهن أن : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

التمرين 6 .

A , B , C , D أربعة نقط من الفضاء .

1- أنشئ النقط I , J , K , L بحيث :

$$\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{LC} \;;\; \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0} \;;\; \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AJ} \;;\; \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

2- بين أن : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ و أن : $\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{LK} = \vec{0}$

3- بين أن IJLK متوازي أضلاع .

التمرين 7 .

ABCD شبه منحرف قاعدتاه $[AB]$ و $[CD]$.

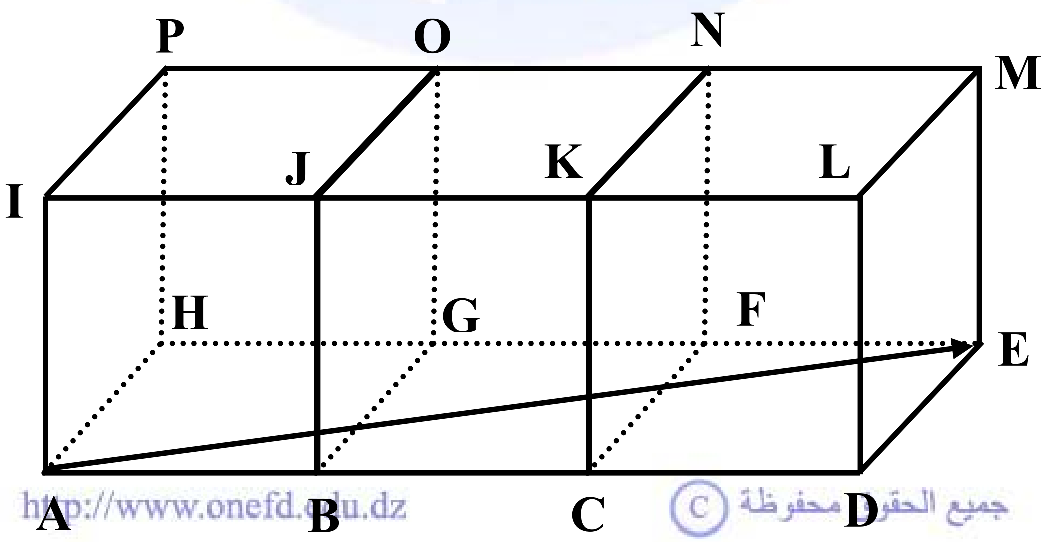
1- أنشئ النقطة I حيث : $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$.

2- المستقيم الذي يشمل I و يوازي (AB) يقطع المستقيمات $(DB) , (AC) , (BC)$ على الترتيب في النقط J , K , L .

أ) بين أن : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

ب) بين أن : $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ ثم استنتج أن : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KL}$.

التمرين 8 .



إليك الشكل الذي يمثل ثلاث مكعبات متقايسة .

1) احسب ما يلي : $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{IJ}$.

2) عين العددان α , β بحيث : $\overrightarrow{FG} = \beta\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AD}$.

3) برهن أن : $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$.

4) احسب : $\overrightarrow{HD} - \overrightarrow{FD}$, $2\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC}$.

التمرين 9 .

ABCDEFGH مكعب .

1- أنشئ النقطتان I , M حيث : $\overrightarrow{FM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FH}$ و $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

2- أنشئ النقط J , K , L حيث :

$\overrightarrow{BL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BG}$; $\overrightarrow{DK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{EJ} = 2\overrightarrow{EF}$ ثم اكتب

$\overrightarrow{Jk}$ و $\overrightarrow{JL}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$ واستنتج أن النقط J , K , L

على استقامة واحدة .

التمرين 10 .

ABCDEFGH متوازي المستطيلات .

لتكن I منتصف $[AB]$. J نقطة حيث : $\overrightarrow{HJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

O نقطة بحيث : $\overrightarrow{GO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$

- أنشئ O ثم بين أن (IH) و (JO) متوازيان .

التمرين 11 .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}\right)$.

1- علّم النقط $A (2 ; 1 ; 3) , B (-1 ; 2 ; 1) , C (+1 ; 3 ; 2)$ -2

عين مركبات كل من : $\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{AC}$.

3- عين إحداثيات النقطة I منتصف $[AB]$.

4- عين إحداثيات النقطة D بحيث يكون الرباعي ABCD

متوازي أضلاع .

التمرين 12 .

في الفضاء المنسوب إلى المعلم $\left(O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}\right)$.

نعتبر النقطتان $A (1 ; 3 ; -2) \; , \; B (2 ; 1 ; 1)$.

1) عين إحداثيات النقطة I نظيرة A بالنسبة إلى O .

2) عين إحداثيات النقطة J نظيرة A بالنسبة إلى B .

3) تحقق من أن : $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{OB}$.

4) عين إحداثيات النقطة C بحيث : $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IJ}$

التمرين 13 .

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}\right)$ نعتبر النقط

$A (1 ; -1 ; 1) \; , \; B (-1 ; 1 ; -1) \; , \; C (1 ; -1 ; -1)$

1- علّم النقط A , B , C .

2- بين أن النقط A , B , C ليست على استقامة واحدة .

التمرين 14 .

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}\right)$ نعتبر النقط

$A (1 ; -2 ; 3) \; , \; B (-3 ; -3 ; 4) \; , \; C (-7 ; -4 ; 5)$

- أثبت أن النقط A , B , C على استقامة واحدة .

(*) **التمرين 15** .

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$.

نعتبر النقطتان $B\,(8\,;-2\,;4)$, $A\,(1\,;2\,;-1)$.

و الأشعة $\vec{w}\begin{pmatrix}-5\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

1- بين أن الأشعة $\vec{w}\,,\vec{v}\,,\vec{u}$ من نفس المستوي .

2- استنتج أن B تنتمي إلى المستوي الذي يشمل A وشعاعي توجيهه $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

التمرين 16 .

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط : $D(3;-1;0)$, $C(1;2;2)$, $B(4;-3;1)$, $A(3;-2;1)$

- برهن أن النقط $A\,,B\,,C\,,D$ هي رؤوس معين .

التمرين 17 .

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط : $A\,(0\,;1\,;4)$, $B\,(2\,;1\,;2)$, $C\,(1\,;0\,;2+\sqrt{2})$

$D\,(0\,;1\,;2)$, $E\,(1\,;1\,;2+\sqrt{3})$

برهن أن النقط $A\,,B\,,C\,,E$ تنتمي إلى سطح الكرة ذات المركز D
ونصف القطر R الذي يطلب تعيينه .

(*) **التمرين 18** .

- اكتب معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها O وتشمل النقطة $A\,(3\,;4\,;2\sqrt{6})$

- اكتب معادلة الاسطوانة (C) التي محورها $(z\,z')$ ونصف قطرها $2\sqrt{6}$.

- عين نقط تقاطع (C) و (S).

(*) **التمرين 19** .

- اكتب معادلة المخروط الدوراني (C) الذي رأسه O ومحوره $(y'y)$ و يشمل النقطة $A(1 ; -1 ; 3)$.
- اكتب معادلة المستوي (P) الذي يشمل النقطة $B(0 ; 4 ; 0)$ ويوازي المستوي (xoz) .
- عين مجموعة نقط تقاطع (C) و(P) .

التمرين 20 .

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}\right)$.

نعتبر النقط : $C(2 ; 3 ; -1)$, $B(5 ; -1 ; 2)$, $A(-1 ; 2 ; 4)$.

- اكتب معادلة سطح الكرة (S) ذات المركز A و نصف القطر 4 .
- اكتب معدلات المستقيم (BC) .
- عين نقط تقاطع (S) و (BC) .

الحــلــول

(*) التمرين 1 .

الوجهان (ABCD) و (FGHE) في المكعب متوازيان .

المستوي (EMG) يقطع المستوي (FGHE) وفق المستقيم (EG) و يقطع المستوي (ABCD) وفق المستقيم (MI) .

ومنه المستقيمان (EG) و(MI) متوازيان لأنهما مستقيمي تقاطع المستوي (EMG) و المستويين المتوازيين (FGHE) و (ABCD)

(*) التمرين 2 .

* في المثلث ABC لدينا : (IJ) // (BC) وعليه : $\frac{AI}{AB} = \frac{IJ}{BC}$

ومنه : $\frac{IJ}{5} = \frac{2}{5}$ أي : IJ = 2

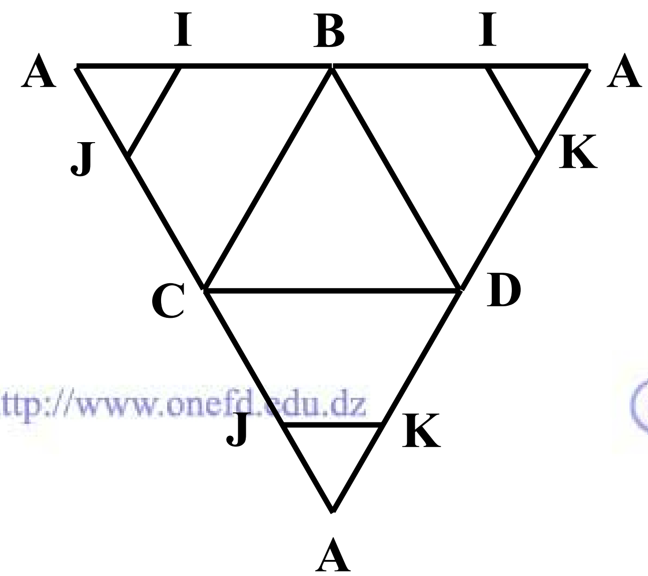
* في المثلث ACD لدينا : (JK) // (CD) وعليه : $\frac{AJ}{AC} = \frac{JK}{CD}$

و بالتالي : $\frac{JK}{5} = \frac{2}{5}$ أي : JK = 2

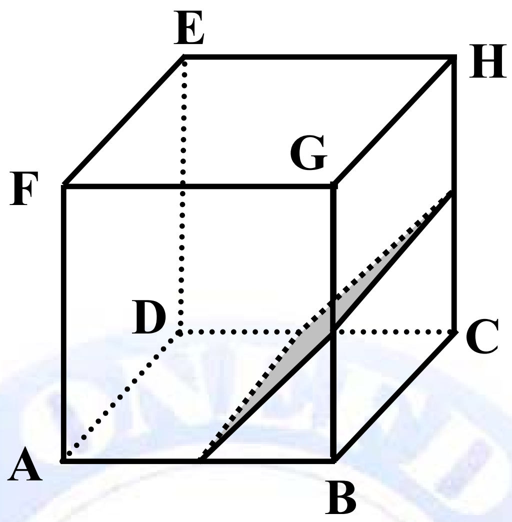
* في المثلث ABD لدينا : (IK) // (BD) وعليه : $\frac{AI}{AB} = \frac{IK}{BD}$

ومنه : $\frac{IK}{5} = \frac{2}{5}$ وبالتالي : $IK = 2$

2- تصميم ABCD :



(*) التمرين 3 .



التمرين 4 .

1- إنشاء D بحيث $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

لدينا : الرباعي ABCD متوازي أضلاع. وعليه المستقيم الذي يشمل C و يوازي (AB) و المستقيم الذي يشمل A ويوازي (BC) يتقاطعان في النقطة D .

2- إنشاء النقطة E نظيرة D بالنسبة إلى C :

على المستقيم (CD) نعين نقطة E بحيث يكون C منتصف $[ED]$

3- إنشاء النقطة H بحيث : $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AE}$

الرباعي ABHE متوازي أضلاع و عليه : $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB}$

ولدينا : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ ومنه : $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{CE}$

4- نبرهن أن النقط D , C , E , H على استقامة واحدة :

لدينا C منتصف $[ED]$ وعليه النقط D , C , E على استقامة واحدة . و بالتالي النقط D , C , E , H على استقامة واحدة .

التمرين 5 .

البرهان أن : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

لدينا : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IF}$

وعليه : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}$

لكن I منتصف $[FE]$ ومنه : $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{0}$

و بالتالي : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AI}..........(1)$

ولدينا : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$

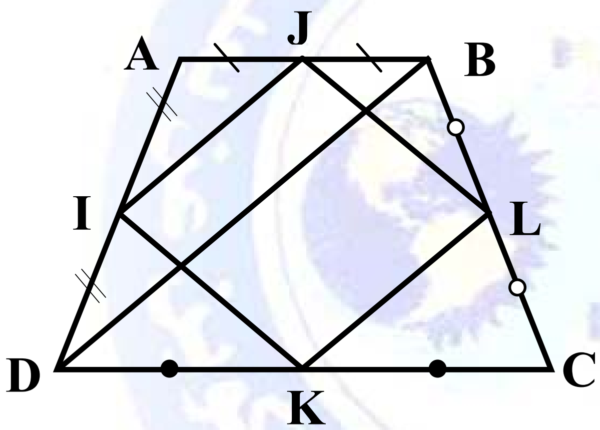
ومنه : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$

لكن I منتصف $[BC]$ و عليه : $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

ومنه : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}..........(2)$

من (1) و (2) : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

التمرين 6 .



1) إنشاء النقط : $I ; J ; K ; L$

* لدينا : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

وعليه I منتصف $[AD]$.

* ولدينا : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AJ}$

وعليه : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

ومنه J منتصف $[AB]$.

* ولدينا : $\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$ ومنه K منتصف $[CD]$.

* $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BC}$ ومنه : L منتصف $[BC]$.

2) نبين أن : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$:

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right)$$

ومنه : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

- نبين أن : $\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{LK} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LK}$$
$$= \overrightarrow{KC} - \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{CL} + 2\overrightarrow{LK}$$
$$= \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CL} - \overrightarrow{LK} + 2\overrightarrow{LK}$$
$$= \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{KK} = \vec{0}$$

3)نبين أن IJLK متوازي أضلاع :

لدينا : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

ولدينا : $\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{LK} = \vec{0}$ ومنه : $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

وعليه : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KL}$ ومنه : $IJ = KL$ و $(IJ) // (KL)$

إذن الرباعي IJKL متوازي أضلاع .

التمرين 7 .

1) إنشاء I : $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$

$$\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DI} - \overrightarrow{DA}\right)$$
$$\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$$

و منه : $-\overrightarrow{ID} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

أي : $-\frac{3}{2}\overrightarrow{DI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

وعليه : $3\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA}$ ومنه : $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

2- أ) نبين أن $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

في المثلث DAB لدينا : $(IJ) // (AB)$ و $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$

أي : $\frac{DI}{DA} = \frac{1}{3}$ وعليه : $\frac{DJ}{DB} = \frac{IJ}{AB} = \frac{1}{3}$

ومنه : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3} . \overrightarrow{AB}$

ب) نبين أن $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CA}$:

- في المثلث DBC لدينا : (JL) // (DC) و $\frac{DJ}{DB} = \frac{1}{3}$

ومنه : $\frac{CL}{CB} = \frac{1}{3}$

- في المثلث CAB لدينا : $(KL) // (AB)$ و $\frac{CL}{CB} = \frac{1}{3}$

وعليه : $\frac{KL}{AB} = \frac{CK}{CA} = \frac{1}{3}$ ومنه : $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CA}$

* استنتاج أن : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KL}$:

لدينا : $\frac{KL}{AB} = \frac{1}{3}$ ومنه : $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$

ومن أ) لدينا : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ ومنه : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KL}$

التمرين 8 .

1) حساب : * $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{IJ}$

$= \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IJ}$

و منه : $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IO}$

* $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{DM}$

2) تعيين β , α : $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{FG} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$

ومنه : $\alpha = -\frac{1}{3}$

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} = 2 \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ ومنه : $\beta = \frac{2}{3}$.

3) البرهان أن : $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

في المثلث ADE لدينا : $\frac{AB}{AD} = \frac{1}{3}$ و $(BS) // (DE)$

ومنه : $\frac{AS}{AE} = \frac{BS}{DE} = \frac{1}{3}$ إذن : $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

4) $\overrightarrow{HD} - \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FD} - \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{HF}$

$$2\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC}$$
$$= \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF}$$

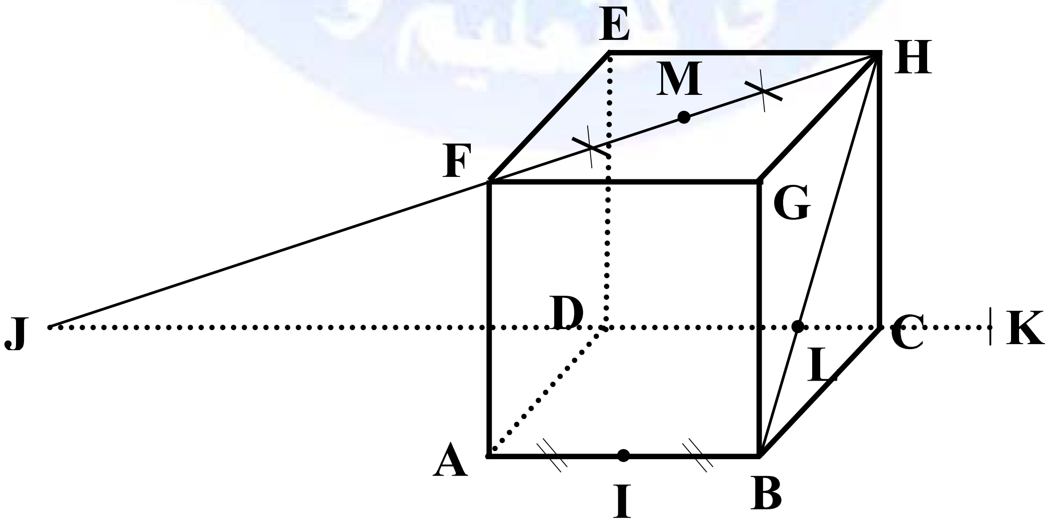
التمرين 9 .

ABCDEFGH مكعب .

1) إنشاء النقطتان I , M :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ وعليه I منتصف $[AB]$.

$\overrightarrow{FM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FH}$ وعليه M منتصف $[FH]$.



2) إنشاء J , K , L :

- لدينا : $\overrightarrow{EJ}=2\overrightarrow{EF}$ وعليه J نقطة من المستقيم (EF) حيث :
$\overrightarrow{EJ}=2\overrightarrow{EF}$.

- لدينا : $\overrightarrow{DK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$ و عليه K نقطة من (DC) بحيث :
$\overrightarrow{DK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$.

- لدينا : $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BG}$ ومنه :
$\overrightarrow{BL} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BG}\right)$ إذن : $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$

و عليه L نقطة من (BH) بحيث : $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.

3) كتابة $\overrightarrow{JL}$ و $\overrightarrow{JK}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$:

$$* \ \overrightarrow{JL} = \overrightarrow{JF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL}$$

$$\overrightarrow{JL} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BG}$$

$$\overrightarrow{JL} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$$

$$\overrightarrow{JL} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB}$$

$$* \ \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}$$

$$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$$

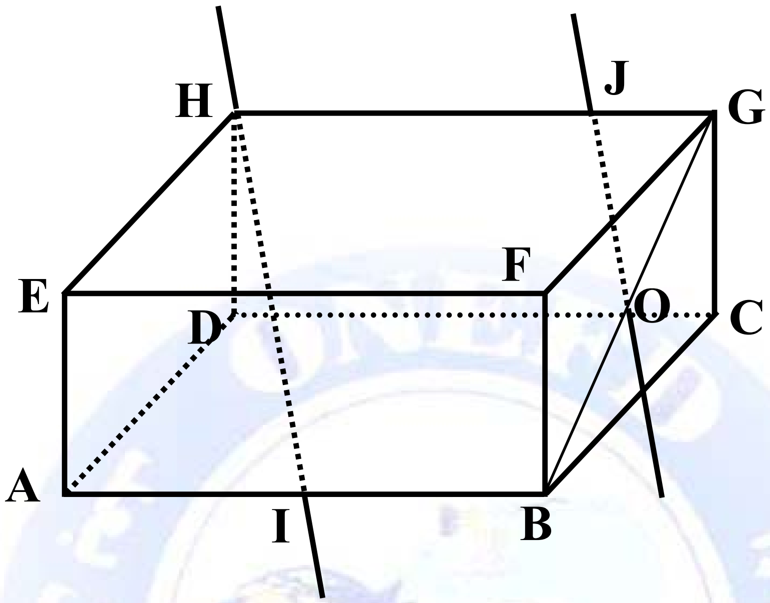
$$\overrightarrow{JK} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

- استنتاج أن J , K , L على استقامة واحدة

لدينا $\overrightarrow{IK} = \frac{2}{3}\left(2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right)$ ومنه : $\overrightarrow{JL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{JK}$

ومنه النقط J , K , L على استقامة واحدة .

التمرين 10 .



- إنشاء O :

لدينا : $\overrightarrow{GO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$

و منه : $\overrightarrow{GO} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC}\right)$ أي : $\overrightarrow{GO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$

- تبيين أن (IH) و (JO) متوازيان :

لدينا : $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HJ} + \overrightarrow{JO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI}$

ومنه : $\overrightarrow{HI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JO} + \overrightarrow{GO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JO} + \overrightarrow{GO} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JO} + \overrightarrow{GO}$$

$$= \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{JO}$$

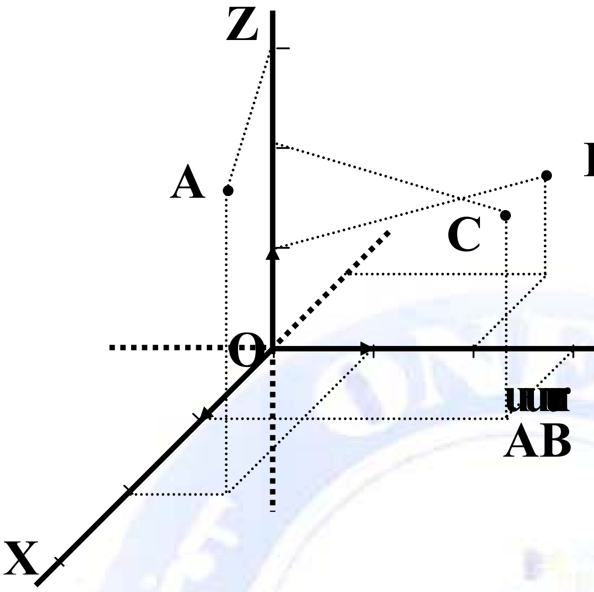
$$= \overrightarrow{JO} + \overrightarrow{JO}$$

ومنه : $\overrightarrow{HI} = 2\overrightarrow{JO}$

إذن المستقيمان (HI) و (JO) متوازيان .

التمرين 11 .

1- تعليم النقط A , B , C



2- تعيين الإحداثيات :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-2 \\ 2-1 \\ 1-3 \end{pmatrix}$ ومنه : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1-2 \\ 3-1 \\ 2-3 \end{pmatrix}$ ومنه : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1+1 \\ 3-2 \\ 2-1 \end{pmatrix}$ ومنه : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3- تعيين إحداثيات C :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad , \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \quad , \quad z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

ومنه :

$$x_I = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \quad , \quad y_I = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \quad , \quad z_I = \frac{3+1}{2} = 2$$

إذن : $I\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2} ; 2\right)$

4- تعيين إحداثيات D :

نفرض $D(x , y , z)$

يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 1 - x \\ 3 - y \\ 2 - z \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ +1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

وعليه : $\begin{cases} 1 - x = -3 \\ 3 - y = 1 \\ 2 - z = -2 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$

وعليه : D (4 ; 2 ; 4)

التمرين 12 .

1) تعيين إحداثيات I :

بما أن نظيرة A بالنسبة إلى O فإن O منتصف (AI)

وعليه : $\begin{cases} 0 = \dfrac{x_A + x_I}{2} \\ 0 = \dfrac{y_A + y_I}{2} \\ 0 = \dfrac{z_A + z_I}{2} \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x_I = -x_A \\ y_I = -y_A \\ z_I = -z_A \end{cases}$

إذن : I (-2 ; -1 ; -3)

2) تعيين إحداثيات J :

بما أن J نظيرة A بالنسبة إلى B فإن : B منتصف $[JA]$

وعليه : $\begin{cases} -1 = \dfrac{x_J + 2}{2} \\ 2 = \dfrac{y_J + 1}{2} \\ 1 = \dfrac{z_J + 3}{2} \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x_J + 2 = -2 \\ y_J + 1 = 4 \\ z_J + 3 = 2 \end{cases}$

أي: $\begin{cases} x_J = -4 \\ y_J = 3 \\ z_J = -1 \end{cases}$ إذن : $J(-4 ; 3 ; -1)$

3) التحقق من أن : $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{OB}$

لدينا : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -4+2 \\ 3+1 \\ -1+3 \end{pmatrix}$ وعليه : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

ولدينا : $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ وعليه : $2\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

ومنه : $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{OB}$

4) تعين إحداثيات C حيث : $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IJ}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IJ} + 3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

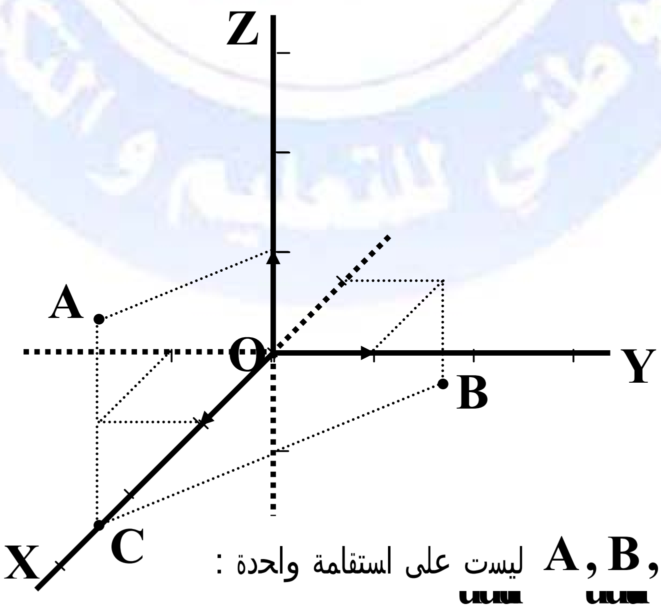
نفرض $C(x, y, z)$ ومنه : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \\ z+2 \end{pmatrix}$

لكن : $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IJ}$ ومنه : $\begin{cases} x-1=1 \\ y-3=-2 \\ z+2=11 \end{cases}$

أي أن : $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=9 \end{cases}$ إذن : $C(2;1;9)$

التمرين 13 .

1) تعليم النقط : A, B, C



2) تبيين أن النقط A, B, C ليست على استقامة واحدة :

نبين أن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير متوازيين .

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AC} = -2\vec{k}$ و $\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

وعليه : $\overrightarrow{AB} = \vec{V} + \overrightarrow{AC}$

حيث : $\vec{V} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 0.\vec{k}$

ومنه لا يوجد عدد λ بحيث : $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$

إذن : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير متوازيين .

وبالتالي A , B , C ليست على استقامة واحدة .

التمرين 14 .

- إثبات أن A , B , C على استقامة واحدة :

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-1\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-8\\-2\\2\end{pmatrix}$

ومنه : $\overrightarrow{AB} = -4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

$\overrightarrow{AC} = -8\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ أي : $\overrightarrow{AC} = 2\left(-4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

ومنه : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

وعليه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متوازيان .

و بالتالي : A , B , C على استقامة واحدة .

(*) **التمرين 15** .

1) تكون الأشعة $\vec{w}$, $\vec{v}$, $\vec{u}$ من نفس المستوي إذا وجد عددان حقيقيان α , β بحيث : $\vec{w} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$

$$\alpha\,\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\-2\alpha\\\alpha\end{pmatrix}\quad,\quad \beta\,\vec{v}\begin{pmatrix}3\beta\\-\beta\\2\beta\end{pmatrix}\quad,\quad \left(\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}\right)\begin{pmatrix}\alpha+3\beta\\-2\alpha-\beta\\\alpha+2\beta\end{pmatrix}$$

ومنه بما أن $\vec{w}=\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}$ فإن :
$$\begin{cases}\alpha+3\beta=-5\\-2\alpha-\beta=0\\\alpha+2\beta=-3\end{cases}$$

وعليه :
$$\begin{cases}\alpha+3\beta=-5\\\beta=-2\alpha\\\alpha+2\beta=-3\end{cases}$$
ومنه :
$$\begin{cases}\alpha-6\alpha=-5\\\beta=-2\alpha\\\alpha-4\alpha=-3\end{cases}$$

إذن :
$$\begin{cases}-5\alpha=-5\\\beta=-2\alpha\\-3\alpha=-3\end{cases}$$
أي أن :
$$\begin{cases}\alpha=1\\\beta=-2\end{cases}$$

وعليه : $\vec{w}=\vec{u}-2\vec{v}$

ومنه : $\vec{u}\,,\,\vec{v}\,,\,\vec{w}$ تنتمي إلى نفس المستوي .

2) الاستنتاج :

تعيين عددان x و y بحيث : $\overrightarrow{AB}=x\,\vec{u}+y\,\vec{v}$

لدينا :
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-4\\5\end{pmatrix}\quad;\quad x\,\vec{u}\begin{pmatrix}x\\-2x\\x\end{pmatrix}\quad;\quad y\,\vec{v}\begin{pmatrix}3y\\-y\\2y\end{pmatrix}$$

$$x\vec{u}+y\vec{v}\begin{pmatrix}x+3y\\-2x-y\\x+2y\end{pmatrix}$$
وعليه :
$$\begin{cases}x+3y=7\\-2x-y=-4\\x+2y=5\end{cases}$$

ومنه :
$$\begin{cases}x+3y=7\\y=-2x+4\\x+2y=5\end{cases}$$
وبالتالي :
$$\begin{cases}x-6x+12=7\\y=-2x+4\\x-4x+8=5\end{cases}$$

إذن : $\begin{cases} -5x = -5 \\ y = -2x + 4 \\ -3x = -3 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

وعليه : $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + 2\vec{v}$

إذن الأشعة $\overrightarrow{AB}\ ,\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}$ من نفس المستوي و عليه B هي نقطة من المستوي الذي يشمل A و الشعاعين $\vec{u}\ ,\ \vec{v}$.

التمرين 16 .

لكي نبرهن أن A, B, C, D هي رؤوس معين يكفي أن نبرهن أن :

AB = AC = BC = CD

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \ ,\ \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \ ,\ \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \ ,\ \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

وعليه : $AB = \sqrt{2}\ ,\ AD = \sqrt{2}\ ,\ BC = \sqrt{2}\ ,\ CD = \sqrt{2}$

وعليه : $AB = AC = BC = AD = \sqrt{2}$

ولدينا : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$ ومنه الرباعي ABCD فيه ضلعان متقابلان ومتوازيان و أضلاعه الأربعة متقايسة فهو إذن معين .

التمرين 17 .

تكون النقط A , B , C , E من نفس سطح الكرة إذا وفقط إذا كان

DA = DB = DC = DE = R

$$\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \ ,\ \overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \ ,\ \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix} \ ,\ \overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

ومنه : DA = 2 , DB = 2

$$DC = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$DE = \sqrt{(1)^2 + (\ 0\ )^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

ومنه : DA = DB = DC = DE = 2

وعليه : النقط A , B , C , E تنتمي إلى سطح **الكرة ذات المركز D** ونصف القطر R = 2 .

(*) **التمرين 18** .

- معادلة سطح الكرة (S) : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

ولدينا : $A \in (S)$ ومنه : $(3)^2 + (4)^2 + \left(2\sqrt{6}\right)^2 = R^2$

وعليه : $R^2 = 49$ وبالتالي : R = 7

إذن : $(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 49$

- معادلة الأسطوانة (C) التي محورها $(z z') : x^2 + y^2 = R'^2$

إذن : $x^2 + y^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2$ وعليه : $(C) : x^2 + y^2 = 24$

إذن معادلة الأسطوانة هي : $x^2 + y^2 = 24$

- تعيين نقط تقاطع (S) و (C) :

نحل الجملة : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 49 \\ \text{و} \\ x^2 + y^2 = 24 \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 24 \\ \text{و} \\ 24 + z^2 = 49 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 24 \\ \text{و} \\ z^2 = 25 \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 24 \\ z = -5 \quad \text{أو} \quad z = 5 \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 24 \\ \text{و} \\ z = 5 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x^2 + y^2 = 24 \\ \text{و} \\ z = -5 \end{cases}$

وعليه مجموعة نقط التقاطع هما دائرتين :

الأولى مركزها $I(0;0;5)$ ونصف قطرها $2\sqrt{6}$

والثانية مركزها $J(0;0;-5)$ ونصف قطرها $2\sqrt{6}$

(*) **التمرين 19** .

- معادلة المخروط (C) : $x^2 + z^2 - \alpha y^2 = 0$

و بما أن : $A \in (S)$ فإن : $(1)^2 + (3)^2 - \alpha (-1)^2 = 0$

وعليه : $10 - \alpha = 0$ أي أن : $\alpha = 10$

ومنه : $(C) : x^2 + z^2 - 10 y^2 = 0$

- معادلة المستوي (P) من الشكل : $y = \beta$

وبما أن $B \in (p)$ فإن : $y = 3$

إذن : $(p) : y = 3$

- تعيين مجموعة نقط تقاطع (C) و (P) :

وهي معينة بالجملة :

$$\begin{cases} x^2 + z^2 - 10 y^2 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

وعليه :

$$\begin{cases} x^2 + z^2 - 10 (3)^2 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

إذن :

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 90 \\ y = 3 \end{cases}$$

ومنه مجموعة النقط هي دائرة مركزها $\omega(0;0;3)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{90}$.

التمرين 20 .

- معادلة (S) :

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من S

لدينا $AM = R$ ومنه $AM^2 = R^2$

وبالتالي : $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=16$ وهي معادلة (S) .

- معادلات المستقيم (BC) :

لتكن $M(x\,;\,y\,;\,z)$ نقطة من (BC) .

لدينا : $\overrightarrow{BM} \,//\, \overrightarrow{BC}$

إذن يوجد على الأقل عدد حقيقي λ بحيث : $\overrightarrow{BM}=\lambda\,\overrightarrow{BC}$

لكن : $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-5 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\lambda\overrightarrow{B}\begin{pmatrix} -3\lambda \\ 4\lambda \\ -3\lambda \end{pmatrix}$

ومنه : $\begin{cases} x-5=-3\lambda \\ y+1=4\lambda \\ z-2=-3\lambda \end{cases}$ و بالتالي : $\dfrac{z-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{x-5}{-3}$

- نقط تقاطع (S) و (BC) :

لدينا : $(BC) : \begin{cases} x-5=-3\lambda \\ y+1=4\lambda \\ z-2=-3\lambda \end{cases}$

ولدينا: $(S) : (x+1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=16$

ومنه : $(5-3\lambda+1)^2+(-1+4\lambda-2)^2+(2-3\lambda-4)^2=16$

وعليه : $(-3\lambda+6)^2+(4\lambda-3)^2+(-3\lambda-2)^2=16$

وبالتالي: $34\lambda^2-48\lambda+33=0$

حل المعادلة : $34\lambda^2-48\lambda+33=0$

$\Delta'=(-24)^2-33\times 34$ ومنه : $\Delta'=-546$

وعليه : $\Delta<0$

إذن ليس للمعادلة حلول .

ومنه : $(S)\cap(BC)=\phi$