الجـداء السلمـي

الكفاءات المستهدفة

1- حساب الجداء السلمي لشعاعين في المستوي .
2- إثبات علاقات التعامد .
3- حساب مسافات .
4- حساب أقياس زوايا .
5- تعيين معادلة مستقيم علم ناظم له.
6- كتابة معادلة كرة.
7- دراسة مجموعات نقط .

تصميم الدرس

- تعاريف
- تمـاريـن و مشكلات
- الحلول

تعاريف

1- <u>تعريف</u> :

الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}$, $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي p حيث :

- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير معدومين فإن: $p = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
- إذا كان : $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن : $p = 0$.

و نرمز للجداء السلمي بالرمز $\vec{u} \cdot \vec{v}$

إذن: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

- إذن الجداء السلمي لشعاعين هو عدد حقيقي وليس شعاعا .
- إذا كان : $\vec{u} \perp \vec{v}$ فإن : $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\; k \in ¢$

وعليه $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ومنه : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

وإذا كان : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ وكان $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$ فإن :

$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ومنه : $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\; k \in ¢$

إذن : $\vec{u} \perp \vec{v}$.

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{u})$

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \times \cos 0 = \|\vec{u}\|^2 \times 1$ ومنه : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

و يسمى المربع السلمي.

<u>مثال</u> : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ثلاث أشعة حيث :

$$\|\vec{u}\| = 4 \;;\; \|\vec{v}\| = \sqrt{2} \;;\; \|\vec{w}\| = 2 \;;\; \overline{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\overline{(\vec{u}, \vec{w})} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\; k \in ¢$$

- احسب الجداءات السلامية الآتية : $\vec{u} \cdot \vec{v} \;;\; \vec{u} \cdot \vec{w} \;;\; \vec{u}^2$

<u>حـل</u> :

* لدينا : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\ \cos(\vec{u},\vec{v}) = 4 \times \sqrt{2}\ \cos\frac{\pi}{4}$

و منه : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4 \times \sqrt{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$

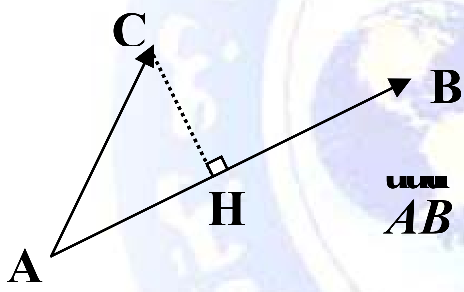
* لدينا : $\vec{u}\cdot\vec{w} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{w}\|\ \cos(\vec{u},\vec{w}) = 4 \times 2\ \cos\frac{\pi}{2}$

و منه : $\vec{u}\cdot\vec{w} = 4 \times 2 \times 0 = 0$

* لدينا : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = (4)^2 = 16$

2- <u>عبارة أخرى للجداء السلمي</u> :

إذا كانت A , B , C ثلاث نقط من المستوي حيث : $A \neq B$ وكانت H المسقط العمودي للنقطة C على (AB)



فإن : $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \vec{AB}\cdot\vec{AH}$

فإذا كان $\vec{AB}$ و $\vec{AH}$ من نفس الاتجاه فإن :

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB \cdot AH$$

وإذا كان $\vec{AB}$ و $\vec{AH}$ مختلفين في الاتجاه فإن :

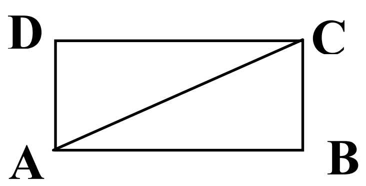
$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = -AB \cdot AH$$

<u>مثال</u> :

ABCD مستطيل .

- احسب الجداء السلمي : $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ علما أن : $AB = 4$

<u>حـل</u> :



لدينا : $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB \cdot AB = 4 \times 4$

و منه : $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 16$

3- <u>خواص</u> :

$\vec{u} , \vec{v} , \vec{w}$ أشعة في المستوي . λ عدد حقيقي.

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

2) $(\lambda\ \vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$

3) $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$

4) $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

5) $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

6) $\left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2 = \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}^2$

7) $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \left(\vec{u} - \vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

8) $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$

9) $\left\|\vec{u} - \vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$

10) $\left\|\lambda \vec{u}\right\| = |\lambda| \cdot \left\|\vec{u}\right\|$

مثال :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ شعاعان حيث : $\left\|\vec{u}\right\| = 4$, $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{2}$; $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

ليكن λ عدد حقيقي .

- احسب ما يلي : $\left(\lambda\vec{u} + \vec{v}\right)^2$; $\left(\lambda\vec{u} + \vec{v}\right) . \vec{v}$

$\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|$; $\left(\vec{u} - 3\vec{v}\right)^2$

حـل :

لدينا : $\left(\lambda\vec{u} + \vec{v}\right) . \vec{v} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

$$= \lambda \cdot \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) + \left\|\vec{v}\right\|^2$$

$$= \lambda \times 4 \times \sqrt{2} \times \cos\frac{\pi}{4} + (\sqrt{2})^2$$

$$= 4\lambda\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2$$

$$= 4\lambda + 2 \ .$$

لدينا :

$$\left(\lambda\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \lambda^2\vec{u}^{\,2} + 2\lambda\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$$

$$= \lambda^2(4)^2 + 2\,(4\lambda) + (\sqrt{2}\,)^2$$

$$= 16\lambda^2 + 8\lambda + 2 \ .$$

لدينا :

$$(\vec{u} - 3\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} - 6\vec{u}\,.\,\vec{v} + 9\,\vec{v}^{\,2}$$

$$= (4)^2 - 6\,.\,4 + 9\,(\sqrt{2}\,)^2$$

$$= 16 - 24 + 18 = 10 \ .$$

لدينا :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v}$$

$$= (4)^2 + (\sqrt{2}\,)^2 + 2 \times 4$$

$$= 16 + 2 + 8 = 26 \ .$$

4- ***العبارات التحليلية للجداء السلمي*** :

إذا كان : $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ فإن : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = x\,x' + y\,y'$

- يكون $\vec{u}$ عموديا على $\vec{v}$ إذا وفقط إذا كان : $x\,x' + y\,y' = 0$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- لدينا : $\cos(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{v}\|}$

وعليه :

$$\cos(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \frac{x\,x' + y\,y'}{\sqrt{x^2 + y^2}\,.\,\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

- إذا كانت M_1 , M_2 نقطتان حيث :

$$M_2\,(x_2\,;\,y_2)\,,\,M_1\,(x_1\,;\,y_1)$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال :

A , B , C ثلاث نقط في المستوي المزود بمعامل متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i} , \vec{j})$ حيث :

. A (2 ; -1) , B (-3 ; 4) , C (-2 ; -1)

1) احسب $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$.

2) احسب $\|\overrightarrow{AB}\| , \|\overrightarrow{AC}\|$.

3) احسب $cos(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC})$.

4) احسب المسافة بين B وC .

<u>حـل</u> :

1) لدينا : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$ و منه :

$$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = (-5)(-4) + 5(0) = 20$$

2)

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-5)^2 + (5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$$

3) حساب $cos(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC})$:

لدينا :

$$cos(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$$

ومنه :

$$cos(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}) = \frac{20}{5\sqrt{2} \times 4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

وعليه :

$$cos(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4) حساب المسافة بين B وC :

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$
$$= \sqrt{(-2 + 3)^2 + (-1 - 4)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

-5 <u>معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له ونقطة منه</u> :

ليكن (Δ) مستقيم $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستقيم (Δ) أي يعامده .

$A(x_0 ; y_0)$ نقطة من (Δ). لتكن $M(x ; y)$ نقطة كيفية من المستوي . تكون M نقطة من (Δ) إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AM} \perp \vec{u}$

و لدينا : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x - x_0\\ y - y_0\end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

ومنه : $\alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0) = 0$

إذن معادلة (Δ) هي : $\alpha x + \beta y + (-\alpha x_0 - \beta y_0) = 0$

وهي من الشكل : $\alpha x + \beta x + \delta = 0$

حيث : $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ هو الشعاع النظامي للمستقيم (Δ)

6- ***المسافة بين نقطة و مستقيم*** :

(Δ) مستقيم معادلته : $\alpha x + \beta y + \delta = 0$

لتكن $M_0 (x_0 ; y_0)$ نقطة من المستوي . تعطى المسافة بين M_0 و (Δ) بالعبارة :

$$\frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

تطبيق :

عين معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $M_0 (2 ; 3)$ و شعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\ 4\end{pmatrix}$ ناظمي له .

- احسب المسافة بين (Δ) و النقطة $H (4 ; 2)$.

حل :

- معادلة (Δ) من الشكل : $-x + 4y + \delta = 0$ وبما أن M_0 نقطة من (Δ) فإن: $-2 + 4(3) + \delta = 0$ ومنه : $\delta = -10$

إذن معادلة (Δ) هي : $-x + 4y - 10 = 0$

- المسافة بين H و (Δ) هي :

$$\frac{|-4 + 4(2) - 10|}{\sqrt{(-1)^2 + (4)^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{17}} = \frac{6}{\sqrt{17}} = \frac{6\sqrt{17}}{17}$$

7- <u>معادلة الدائرة</u> :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i} , \vec{j})$

- <u>معادلة دائرة عُلم مركزها و نصف قطرها</u> :

(C) دائرة مركزها $\omega(x_0 ; y_0)$ و نصف قطرها α حيث $\alpha > 0$.

$M(x ; y)$ نقطة من المستوى ؛ تكون M من الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان :

$$\omega M = \alpha \quad \text{أي :} \quad \omega M^2 = \alpha^2$$

إذن : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \alpha^2$ وهي معادلة الدائرة (C) .

وبنشر هذه العبارة نجد :

$$x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y + x_0^2 - \alpha^2 = 0$$

وهي من الشكل : $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \delta = 0$

<u>مثال</u> :

اكتب معادلة الدائرة ذات المركز $\omega(1 ; -3)$ ونصف القطر $r = 5$

<u>حـل</u> :

معادلة الدائرة هي : $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$

أي : $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$

- <u>معادلة دائرة عُلم قطرها</u> :

(C) دائرة قطرها $[AB]$ حيث $A(x_0 ; y_0)$, $B(x_1 ; y_1)$

لتكن $M(x , y)$ نقطة من المستوي . تكون النقطة M من (C) إذا وفقط إذا كان :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

لكن $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} x_0 - x \\ y_0 - y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \end{pmatrix}$

وعليه : $(x_0 - x)(x_1 - x) + (y_0 - y) + (y_1 - y) = 0$

إذن: $x_0\, x_1 - x_0\, x - x_1\, x + x^2 + y_0\, y_1 - y_0\, y + y_1\, y + y^2 = 0$

ومنه معادلة (C) هي :

$$x^2 + y^2 - (x_0 + x_1)\, x - (y_0 + y_1)\, y + x_0\, x_1 + y_0\, y_1 = 0$$

<u>مثال</u> :

اكتب معادلة الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$ حيث :

A (-1 ; 4) ; B (4 ; 2)

<u>حـل</u> :

M $(x ; y)$ نقطة من الدائرة (C) أي : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

لدينا : $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} -1 - x \\ 4 - y \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} 4 - x \\ 2 - y \end{pmatrix}$

ومنه : $(4 - x)(-1 - x) + (2 - y) + (4 - y) = 0$

أي : $-4 - 4x + x + x^2 + 8 - 2y + 4y + 4y + y^2 = 0$

إذن معادلة (C) هي : $x^2 + y^2 - 3x + 2y + 4 = 0$

- <u>مجموعة النقط</u> M $(x ; y)$ <u>حيث</u> :

$$x^2 + y^2 + \alpha\, x + \beta y + \delta = 0$$

وعليه : $\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4} + \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4} + \delta = 0$

إذن : $\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 4\delta}{4}$

بوضع $\alpha^2 + \beta^2 - 4\delta = \lambda$ نجد :

- لما : $\lambda < 0$ مجموعة النقط خالية .
- لما : $\lambda = 0$ مجموعة النقط هي النقطة $\omega\left(\frac{-\alpha}{2} ; \frac{-\beta}{2}\right)$.
- لما : $\lambda > 0$: مجموعة النقط هي الدائرة ذات المركز

ونصف القطر : $\omega\left(\frac{-\alpha}{2} ; \frac{-\beta}{2}\right)$ ونصف القطر : $\frac{\sqrt{\lambda}}{2}$.

أمثلة :

عين مجموعة النقط $M(x ; y)$ في كل حالة مما يلي :

1) $x^2 + y^2 - 4x + 3y + 4 = 0$

2) $2x^2 + 2y^2 + 2x - 4y + \frac{5}{2} = 0$

3) $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 40 = 0$

حـل :

1) لدينا : $x^2 + y^2 - 4x + 3y + 4 = 0$

و منه : $x^2 - 4x + y^2 + 3y + 4 = 0$

أي : $(x - 2)^2 - (2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 = 0$

أي : $(x - 2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4} - 4$

إذن : $(x - 2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

وعليه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $\omega\left(2 ; \frac{-3}{2}\right)$ و نصف قطرها $R = \frac{3}{2}$.

2) لدينا : $2x^2 + 2y^2 + 2x - 4y + \frac{5}{2} = 0$

و منه : $2\left(x^2 + y^2 + x - 2y + \frac{5}{4}\right) = 0$

إذن : $x^2 + y^2 + x - 2y + \frac{5}{4} = 0$

و منه : $x^2 + x + y^2 - 2y + \frac{5}{4} = 0$

و بالتالي : $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 - 1 + \frac{5}{4} = 0$

أي : $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 - \frac{1}{4} - 1 + \frac{5}{4} = 0$

أي : $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = 0$

إذن مجموعة النقط M هي النقطة $\omega\left(\frac{-1}{2} ; 1\right)$.

3) لدينا : $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 40 = 0$

و منه : $x^2 + 8x + y^2 + 4y + 40 = 0$

$$(x + 4)^2 - (4)^2 + (y + 2)^2 - (2)^2 + 40 = 0$$

$$(x + 4)^2 - 16 + (y + 2)^2 - 4 + 40 = 0$$

$$(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = -20$$

إذن مجموعة النقط خالية .

8- ***<u>العلاقات المترية في المثلث</u>*** :

ABC مثلث كيفي . I منتصف $[BC]$ لدينا العلاقات التالية :

1) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB . AC . \cos \hat{A}$

وكذلك : $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA . CB . \cos \hat{C}$

(وهي نظرية الكاشي)

2) $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2IB^2$

3) $\dfrac{BC}{\sin \hat{A}} = \dfrac{AC}{\sin \hat{B}} = \dfrac{AB}{\sin \hat{C}} = 2R$

حيث R نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - IB^2$

5) مساحة المثلث ABC هي S حيث :

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A} \quad \text{أو} \quad S = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin \hat{B}$$

$$\text{أو} \quad S = \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin \hat{C}$$

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{2S}$$

<u>مثال</u> :

ABC مثلث . I منتصف $[BC]$ حيث :

$AB = 3 \; ; \; AC = 4 \; ; \; BC = 6$ (وحدة الطول هي cm)

1) احسب $\cos \hat{A}$.

2) احسب AI .

3) احسب R نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

4) احسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

5) احسب مساحة المثلث ABC

<u>حـل</u> :

1) حساب $\cos \hat{A}$:

لدينا : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A}$

ومنه : $(6)^2 = (3)^2 + (4)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \hat{A}$

ومنه : $36 = 25 - 24 \cos \hat{A}$ أي : $11 = -24 \cos \hat{A}$

و بالتالي : $\cos \hat{A} = \dfrac{-11}{24}$.

2) حساب AI :

لدينا : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + + 2(3)^2$ و منه :

$(3)^2 + (4)^2 = 2AI^2 + 2(3)^2$ أي : $25 = 2AI^2 + 18$

ومنه : $2AI^2 = 7$ وعليه : $AI^2 = \dfrac{7}{2}$

ومنه : $AI = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ إذن : $AI = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

3) حساب R :

لدينا : $\dfrac{BC}{\sin \widehat{A}} = 2R$ ومنه : $\dfrac{6}{\sin \widehat{A}} = 2R$

لكن : $\cos \widehat{A} = \dfrac{-11}{24}$ و $\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A} = 1$

وعليه : $\sin^2 \widehat{A} = 1 - \cos^2 \widehat{A}$ و بالتالي :

$\sin^2 \widehat{A} = 1 - \left(\dfrac{-11}{24}\right)^2$ أي $\sin^2 \widehat{A} = \dfrac{455}{(24)^2}$

إذن : $\sin \widehat{A} = \dfrac{\sqrt{455}}{24}$ ومنه : $6 \times \dfrac{24}{\sqrt{455}} = 2R$

وعليه : $R = \dfrac{72}{\sqrt{455}}$ إذن : $R = \dfrac{72\sqrt{455}}{455}$.

4) حساب $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$:

لدينا : $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = AI^2 - IB^2$

ومنه : $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = \left(\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

$= \dfrac{14}{4} - \dfrac{9}{4} = \dfrac{5}{4}$

إذن : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{5}{4}$

5) مساحة المثلث ABC :

$$S = \frac{1}{2}\ AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{455}}{24}$$

و منه : $S = \frac{\sqrt{455}}{4}\ cm^2$.

تمـاريـن و مشكلات

في كل مما يلي المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i} , \vec{j})$

التمرين 1 .

x عدد حقيقي

$\vec{v}$, $\vec{u}$ شعاعان حيث : $\vec{u}\begin{pmatrix} x+3 \\ x+1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ x+1 \end{pmatrix}$

1) أحسب $\vec{v} . \vec{u}$

2) عين x بحيث يكون $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متعامدين

3) احسب $\|\vec{u}\| ; \|\vec{v}\|$.

4) عين x بحيث $\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|$

5) نفرض $x = 3$ عين قيمة مقربة لـ $(\vec{u} , \vec{v})$

التمرين 2 .

نعتبر الشعاعان $\vec{v}$, $\vec{u}$ حيث :

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j} \quad ; \quad \vec{v} = 3\vec{i} + \frac{6}{5}\vec{j}$$

1) احسب $\|\vec{u}\| ; \|\vec{v}\|$.

2) احسب $\vec{v} , \vec{u}$ ماذا تستنتج ؟

التمرين 3 .

نعتبر النقط :

$A(2 ; 2)$, $B(5 ; -2)$, $C(7 ; -1)$, $D(4 ; 3)$

1) احسب كل من: AB , AC , BC , AD .

2) ما هي طبيعة الرباعي ABCD ؟

التمرين 4 .

يعطى الشعاعان : $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ عين العدد الحقيقي λ بحيث يكون الشعاعان

: $\left(\lambda\vec{u} - \vec{v}\right)$ و $\left(\lambda\vec{u} + \vec{v}\right)$ متعامدين .

التمرين 5 .

يعطى الشعاعان : $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ حيث α , β عددان حقيقيان . عين

α , β في كل حالة مما يلي :

1) $\|\vec{v}\| = 1$ و $\vec{u} // \vec{v}$.

2) $\|\vec{v}\| = 2$ و $\vec{u} \perp \vec{v}$.

3) $\|\vec{v}\| = \sqrt{12}$ و $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$

التمرين 6 .

احسب $\left(\vec{u} , \vec{v}\right)$ في كل حالة مما يلي :

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$; 2) $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$; 3) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\sqrt{3}\end{pmatrix}$; 4) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{-\sqrt{3}}{4}\\\frac{\sqrt{5}}{4}\end{pmatrix}$

التمرين 7 .

نعتبر النقطتان : B (3 ; -4) ; C (-1 ; 2)

عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ثم أنشئها و أنشئ المستقيم (BC) ماذا تلاحظ ؟

التمرين 8 .

نعتبر النقطتان A (1 ; -4) , B (-2 ; -3)

عين مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -4$ ثم أنشئها

التمرين 9 .

ABC مثلث

احسب $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ إذا علمت أن :

AB = 4 ; AC = 5 ; BC = 10

التمرين 10 .

$\vec{u}, \vec{v}$ شعاعان حيث :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 5 \quad ; \quad \|\vec{u}\| = 1 \quad ; \quad \|\vec{v}\| = 5$$

احسب ما يلي : $3\vec{u}.(-\vec{v}) \quad ; \quad (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$

$$(\vec{u} - 3\vec{v})(\vec{u} + 2\vec{v}) \quad ; \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|$$

التمرين 11 .

$\vec{u}, \vec{v}$ شعاعان حيث :

$\|\vec{u}\| = 2$ و $\|\vec{v}\| = 5$ و $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, α عدد حقيقي

1- عين α بحيث يكون الشعاعان $\vec{u} - \vec{v}$ و $\vec{u} + \alpha\vec{v}$ متعامدان

2 – عين α بحيث يكون : $\|\vec{u} + \alpha\vec{v}\| = 5$

التمرين 12 .

$\vec{u}, \vec{v}$ شعاعان من المستوي حيث : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

أثبت أن : $\vec{u} + \vec{v}$ عمودي على $\vec{u} - \vec{v}$

التمرين 13 .

$\vec{u}, \vec{v}$ شعاعان من المستوي حيث :

$\|\vec{u}\| = 2$ و $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$

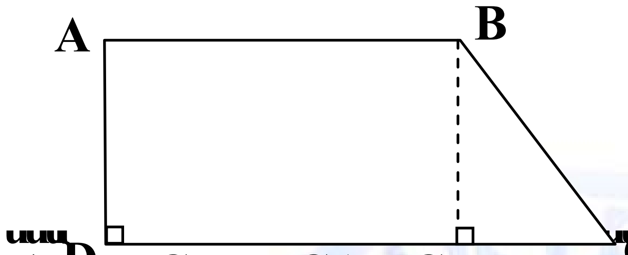
A , B , D ثلاث نقط حيث : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ و $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

1- أثبت أن $\vec{u}$ و $\vec{u} - \vec{v}$ متعامدين ثم استنتج نوع المثلث ABC .

2_ أنشئ C إذا علمت أن : $\left(\vec{v}, \vec{u}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \;;\; k \in ¢$

مع حساب BC , AC.

التمرين 14 .



ABCD شبه منحرف حيث :

AD = 2 , DC = 5

AB = 4 كما في الشكل .

احسب ما يلي :

$$\vec{AD} \cdot \vec{BC} \quad , \quad \vec{CA} \cdot \vec{CB} \quad , \quad \vec{DC} \cdot \vec{DB} \quad , \quad \vec{AB} \cdot \vec{BC}$$

التمرين 15 .

ABC مثلث

1) برهن أنه من أجل كل نقطة M من المستوي فإن :

$$\vec{MA} \cdot \vec{BC} + \vec{MB} \cdot \vec{CA} + \vec{MC} \cdot \vec{AB} = 0$$

2) برهن أن الارتفاعات الثلاثة في المثلث تتقاطع في نقطة واحدة.

التمرين 16 .

$\vec{u}, \vec{v}$ شعاعان غير معدومين . α قيس بالراديان للزاوية $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ حيث :

$$0 < \alpha < \pi$$

أحسب α في كل من الحالات الآتية :

1) $\|\vec{u}\| = 2 \;;\; \|\vec{v}\| = 3 \;;\; \vec{u} \cdot \vec{v} = -3\sqrt{3}$

2) $\|\vec{u}\| = \sqrt{6} \;;\; \|\vec{v}\| = 3 \;;\; \vec{u} \cdot \vec{v} = +3\sqrt{3}$

3) $\|\vec{u}\| = 5 \;;\; \|\vec{v}\| = 4 \;;\; \vec{u} \cdot \vec{v} = 10$

التمرين 17 .

$\vec{u}, \vec{v}$ شعاعان حيث :

$$\|\vec{u}\| = 3 \;;\; \|\vec{v}\| = 2 \;;\; \left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\; k \in ¢$$

وليكن الشعاعان $\vec{x}, \vec{y}$ حيث : $\vec{x} = 2\vec{u} - 3\vec{v} \;;\; \vec{y} = \vec{u} + \vec{v}$

1) أنشئ كل من $\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{x}\ ,\ \vec{y}$

2) احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ثم $\vec{y}^{2}$ ثم $\vec{x}^{2}$

3) استنتج $\|\vec{x}\|\ ,\ \|\vec{y}\|$

التمرين 18 .

ABCD مستطيل حيث : $AB = 4$ و $BC = 8$

M منتصف $[CD]$ ؛ K مرجح الجملة $(A , 3)$, $(D , 1)$.

I المسقط العمودي للنقطة K على (BM) .

1) أنشئ الشكل .

2) احسب $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BK}$.

3) احسب $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BM}$

4) استنتج BI ثم قيم مقربة لـ $\left(\overrightarrow{BM}\ ,\ \overrightarrow{BK}\right)$

التمرين 19 .

ABCD مستطيل مركزه O برهن أنه من أجل كل نقطة M من المستوي فإن :

$$MA^{2} + MC^{2} = MB^{2} + MD^{2}$$

التمرين 20 .

ABC مثلث .

احسب كل من : $\hat{C}$; AC ; BC علما أن :

$$AB = 16\ ,\ \hat{A} = 68^{o}\ ,\ \hat{B} = 25^{o}$$

تعطى المسافات بتقريب $0,01$ و الزوايا بتقريب $0,1$.

التمرين 21 .

ABC مثلث .

احسب كل من BC و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ علما أن :

$$\hat{A} = 100^{o}\ ,\ AC = 30\ ,\ AB = 20$$

ثم استنتج S مساحة المثلث .

التمرين 22 .

ABC مثلث كيفي .

1) بين أن :

$$\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C} - 2\sin \widehat{B} \cdot \sin \widehat{C} \cdot \cos \widehat{A}$$

2) بين أن المثلث ABC يكون قائما في A إذا وفقط إذا كان :

$$\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}$$

3) بين أن المثلث ABC يكون قائما إذا وفقط إذا كان :

$$\sin^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C} = 2$$

(*) $\boxed{\text{التمرين 23}}$.

A وB نقطتان حيث : AB = 6

1) عين و أنشئ (Δ_1) مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 18$

2) عين و أنشئ (Δ_2) مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -12$

3) عين و أنشئ (π_1) مجموعة النقط من المستوي بحيث : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} \geq 30$

(*) $\boxed{\text{التمرين 24}}$.

$[AB]$ قطعة مستقيمة حيث : AB = 4

1) عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $MA^2 - MB^2 = 12$

2) عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $MA^2 + MB^2 = 40$

3) عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \lambda$

(*) $\boxed{\text{التمرين 25}}$.

ABC مثلث كيفي نضع : AB = c , AC = b , BC = a

1) بين أن :

$$1 + \cos \widehat{A} = \frac{(a + b + c)(b + c - a)}{2bc}$$

$$1 - \cos \widehat{A} = \frac{(a + c - b)(a + b - c)}{2bc}$$

2) نضع : a + b + c = 2p (2p محيط المثلث)

استنتج من (1) أن :

$$\sin^2 \widehat{A} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2 c^2}$$

3) لتكن S مساحة المثلث ABC بين أن :

$$S = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$ (عبارة هيرون)

4) احسب مساحة المثلث ABC حيث :

$AB = 9$; $AC = 15$; $BC = 10$ (الوحدة هي cm)

التمرين 26 .

- نعتبر المستقيم (Δ) الذي معادلته : $3x + 3y - 5 = 0$

1- اكتب معادلة المستقيم (Δ_1) الذي يشمل $A(-1 ; 2)$ ويعامد (Δ) .

2- عين نقطة تقاطع (Δ) و (Δ_1) ولتكن B .

3- اكتب معادلة الدائرة ذات القطر $[AO]$.

التمرين 27 .

نعتبر النقط $A(-2 ; 2)$, $B(1 ; -4)$, $C(1 ; 2)$

1- عين مركز ثقل المثلث ABC.

2- عين معادلات المتوسطات الثلاثة للمثلث ABC .

3- عين نقطة تقاطع المتوسطات الثلاثة . ماذا تلاحظ؟

التمرين 28 .

نعتبر النقط : $A(1 ; 2)$, $B(-4 ; 0)$, $C(0 ; 3)$

1- اكتب معادلات أعمدة المثلث ABC .

2- عين نقطة تقاطع الأعمدة .

3- عين مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

التمرين 29 .

1) اكتب معادلة الدائرة (Γ_1) ذات المركز $\omega\ (1 ; -3)$ و تشمل النقطة $A(5 ; 2)$.

2) اكتب معدلة الدائرة ذات القطر $[\omega A]$.

3) اكتب معادلة الدائرة المحيطية بالمثلث $AB\omega$ حيث : $B(1 ; -2)$

4) اكتب معدلة الدائرة ذات المركز ω وتقبل المستقيم (Δ) الذي معادلته : $x - y + 2 = 0$ مماسا لها .

التمرين 30 .

عين مجموعة النقط $M(x ; y)$ من المستوي في كل حالة مما يلي :

1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$.

2) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + 10 = 0$.

3) $- x^2 - y^2 + 6x + 10y - 60 = 0$.

4) $y^2 + x^2 - 4xy + 5y^2 = 0$.

التمرين 31 .

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي **m** مجموعة النقط $M(x\,;\,y)$ حيث :

$$x^2 + y^2 - 2m\,x - 2\,(1 + m)\,y + 6m + 1 = 0$$

التمرين 32 .

لتكن (C_m) مجموعة النقط $M(x\,;\,y)$ حيث :

$$x^2 + y^2 - 2\,(1 - m)\,x + (1 + 6m)\,y + 5m - \frac{5}{4} = 0$$

M وسيط حقيقي .

1) أثبت أن (C_m) دائرة.

2) أنشئ في نفس المعلم (C_0) , (C_1)

3) لتكن ω_m مركز الدائرة (C_m) . ما هي مجموعة النقط ω_m عندما

يتغير m في $\mathbb{R}$.

4) أثبت أن (C_m) تشمل نقطتان ثابتتان A , B يطلب تعيينهما.

التمرين 33 .

أدرس وضعية الدائرة (C) التي معادلتها $x^2 + y + m = 0$ والمستقيم (Δ_m) الذي

معادلته : $x - y + m = 0$, m وسيط حقيقي.

التمرين 34 .

1) عين المجموعة (C_1) : $x^2 + y^2 + 2x - y = 5$

2)أكتب معادلة الدائرة (C_2) ذات المركز $\omega_2(4\,;\,3)$ ونصف قطرها 5.

3) أنشئ (C_1) و (C_2) معينا نقطتي تقاطعهما F وH حسابيا .

4) اكتب معادلة المماس عند F لكل من (C_1) و (C_2) و بين أنهما

متعامدان ؛ نفس السؤال عند H.

الحلـــــول

التمرين 1 .

1) حساب $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1\,(x+3) + (x+1)\,(x+1)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -x - 3 + x^2 + 2x + 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x^2 + x - 2$$

2) تعيين x بحيث يكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

وعليه : $x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4\,(1)\,(-2)$ وعليه : $\Delta = 9$

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \quad ; \quad x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

إذن : $x = -2$ أو $x = -1$

3) حساب $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{v}\|$:

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(x+3)^2 + (x+1)^2}$ أي: $\|\vec{u}\| = \sqrt{2x^2 + 8x + 10}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + (x+1)^2}$ ومنه : $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

4) تعيين x بحيث : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

أي : $\sqrt{2x^2 + 8x + 10} = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ ومنه :

$2x^2 + 8x + 10 = x^2 + 2x + 2$ و عليه : $x^2 + 6x + 8 = 0$

لدينا : $\Delta = (6)^2 - 4\,(8) = 4$ ومنه للمعادلة حلين متمايزين :

$$x_1 = \frac{-6-2}{2} = -4 \quad ; \quad x_2 = \frac{-6+2}{2} = -2$$

قيم x هي : -2 ; -4 .

5) قيمة مقربة لـ $\left(\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$:

من أجل $x = 3$ لدينا : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 10$

$$\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{17} \quad ; \quad \left\|\vec{u}\right\| = 2\sqrt{13}$$

ولدينا : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|\,.\,\left\|\vec{v}\right\|\ \cos\left(\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$

وعليه : $\cos\left(\vec{u}\,,\,\vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\,.\,\left\|\vec{v}\right\|}$ أي أن :

$$\cos\left(\vec{u}\,,\,\vec{v}\right) = \frac{10}{\sqrt{17}\,.\,2\sqrt{13}}$$

ومنه : $\cos\left(\vec{u}\,,\,\vec{v}\right) = \dfrac{5 \times \sqrt{221}}{221}$ أي : $\cos\left(\vec{u}\,,\,\vec{v}\right) \approx 0{,}34$

إذن : $\left(\vec{u}\,,\,\vec{v}\right) \approx 1{,}23 + 2k\pi \ ;\ k \in \mathbb{Z}$

التمرين 2 .

1) حساب $\left\|\vec{u}\right\|\,,\,\left\|\vec{v}\right\|$:

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2}$$

أي : $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{25}{4}}$ أي : $\left\|\vec{u}\right\| = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$

$\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{(3)^2 + \left(\dfrac{6}{5}\right)^2}$ أي : $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{9 + \dfrac{36}{25}}$

ومنه : $\left\|\vec{v}\right\| = \dfrac{\sqrt{261}}{5}$ أي : $\left\|\vec{v}\right\| = \dfrac{3\sqrt{29}}{5}$

2) حساب $\vec{u}\,.\,\vec{v}$: $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 3 \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{6}{5} \times \left(\dfrac{-5}{4}\right)$

ومنه : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}$ أي : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

ونستنتج أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين.

التمرين 3 .

1) أحسب AD , BC , DC , AB

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

وعليه : $AB = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$ أي : $AB = 5$

$DC = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$ أي : $DC = 5$

$BC = \sqrt{(2)^2 + (1)^2}$ أي : $BC = \sqrt{5}$

$AD = \sqrt{(2)^2 + (1)^2}$ أي : $AD = \sqrt{5}$

2) طبيعة الرباعي ABCD : لدينا : AB = DC و BC = AD ومنه الرباعيABCD متوازي أضلاع لأن فيه كل ضلعين متقابلين متقايسين

التمرين 4 .

تعيين λ :

يكون الشعاعان $(\lambda\vec{u} - \vec{v})$ و $(\lambda\vec{u} + \vec{v})$ متعامدين إذا وفق إذا كان :

$$(\lambda\vec{u} - \vec{v})(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = 0$$

أي : $\lambda^2\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0$

ولدينا : $\vec{u}^2 = (1)^2 + (2)^2$ أي : $\vec{u}^2 = 5$

$\vec{v}^2 = (3)^2 + (4)^2$ أي : $\vec{v}^2 = 25$

ومنه : $\lambda^2 x5 - 25 = 0$

و بالتالي : $\lambda^2 = \frac{25}{5}$ أي : $\lambda^2 = 5$

إذن : $\lambda = \sqrt{5}$ أو $\lambda = -\sqrt{5}$

λ له قيمتين هما : $\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$

التمرين 5 .

تعيين α في كل حالة :

1) لدينا : $\|\vec{v}\| = 1$ و $\vec{u} \parallel \vec{v}$:

وعليه : $\|\vec{v}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ومنه $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$ ومنه $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

لدينا : $\vec{u} \parallel \vec{v}$ وعليه : $\alpha\sqrt{2} + \beta = 0$

ومنه : $\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 1 \\ \alpha\sqrt{2} + \beta = 0 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} \beta = -\alpha\sqrt{2} \\ \alpha^2 + 2\alpha^2 = 1 \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} \alpha^2 = \dfrac{1}{3} \\ \beta = -\alpha\sqrt{2} \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \text{ أو } \alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \beta = -\alpha\sqrt{2} \end{cases}$

لما : $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$: $\beta = \dfrac{-\sqrt{6}}{3}$

لما : $\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$: $\beta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

2) لدينا : $\|\vec{v}\| = 2$ و $\vec{u} \perp \vec{v}$

لدينا : $\|\vec{v}\| = 2$ وعليه : $\alpha^2 + \beta^2 = 4$

و لدينا : $\vec{u} \perp \vec{v}$ وعليه : $-\alpha + \beta\sqrt{2} = 0$

و بالتالي : $\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 4 \\ \alpha = \beta\sqrt{2} \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} \alpha = \beta\sqrt{2} \\ 2\beta^2 + \beta^2 = 4 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} \alpha = \beta\sqrt{2} \\ 3\beta^2 = 4 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} \beta^2 = \dfrac{4}{3} \\ \alpha = \beta\sqrt{2} \end{cases}$

ومنه : $\beta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$ أو $\beta = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ وَ $\alpha = \beta\sqrt{2}$

لما : $\beta = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ فإن $\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

لما : $\beta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$ فإن $\alpha = \dfrac{-2\sqrt{6}}{3}$

3) $\|\vec{V}\| = 12$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$

وعليه : $\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 12 \\ -\alpha + \beta\sqrt{2} = 3 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 12 \\ \alpha = \beta\sqrt{2} - 3 \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} (\beta\sqrt{2} - 3)^2 + \beta^2 = 12 \\ \alpha = \beta\sqrt{2} - 3 \end{cases}$ أي أن :

$\begin{cases} 3\beta^3 - 6\beta\sqrt{2} - 3 = 0 \\ \alpha = \beta\sqrt{2} - 3 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \beta^3 - 2\beta\sqrt{2} - 1 = 0 \\ \alpha = \beta\sqrt{2} - 3 \end{cases}$

نحل المعادلة : $\beta^2 - 2\beta\sqrt{2} - 1 = 0$

لدينا : $\Delta = \left(-2\sqrt{2}\right)^2 - 4\,(-1)$ أي : $\Delta = 12$

للمعادلة حلين : $\beta_1 = \dfrac{2\sqrt{2} - \sqrt{12}}{2}$, $\beta_2 = \dfrac{2\sqrt{2} + \sqrt{12}}{2}$

$\beta_2 = \dfrac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2}$; $\beta_1 = \dfrac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2}$

$\beta_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3} \quad ; \quad \beta_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

لما : $\beta_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$: $\alpha = \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\sqrt{2} - 3$

أي : $\alpha = -1 - \sqrt{6}$.

ولما : $\beta_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$: $\alpha = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\sqrt{2} - 3$

أي : $\alpha = -1 + \sqrt{6}$.

التمرين 6 .

حساب $(\vec{i}, \vec{u})$ في كل حالة : لدينا $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$: $\vec{i}\cdot\vec{u} = 1 \times 0 + 0 \times 3 = 0$

وعليه : $(\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$: $\vec{i}\cdot\vec{u} = 1 \times (-5) + 0 \times 0 = -5$

ومنه : $\vec{i}\cdot\vec{u} = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{u}\| \cos(\vec{i}, \vec{u})$

إذن : $\vec{i}\cdot\vec{u} = 1 \times 5 \cos(\vec{i}, \vec{u})$ $\quad 5 \cos(\vec{i}, \vec{u}) = -5$

وبالتالي : $\cos(\vec{i}, \vec{u}) = -1$

ومنه : $(\vec{i}, \vec{u}) = \pi + 2k\pi \; , \; k \in \mathbb{Z}$

3) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\vec{i}\cdot\vec{u} = 1 \times 2 + 0(-2\sqrt{3}) = 2$

وكذلك : $\vec{i}\cdot\vec{u} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{i}, \vec{u}) = 4 \cos(\vec{i}, \vec{u})$

لأن : $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{i}\| = 1$ ومنه : $4 \cos(\vec{i}, \vec{u}) = 2$

إذن : $\cos(\vec{i} , \vec{u}) = \frac{1}{2}$ وعليه : $(\vec{i} , \vec{u}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \;\; ; \;\; k \in \mathbb{Z}$

4) لدينا : $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{5}}{4} \end{pmatrix}$, $\vec{i} \cdot \vec{u} = 1\left(\frac{-\sqrt{3}}{4}\right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{4}$

$\vec{i} \cdot \vec{u} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{i} , \vec{u})$ لكن : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{5}{16}}$

أي : $\|\vec{u}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ وعليه : $\vec{i} \cdot \vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\vec{i} , \vec{u})$

ومنه: $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\vec{i} , \vec{u}) = \frac{-\sqrt{3}}{4}$ وعليه : $\cos(\vec{i} , \vec{u}) = \frac{-\sqrt{6}}{4}$

وبالتالي : $(\vec{i} , \vec{u}) \approx 2,33 + 2k\pi \;\; ; \;\; k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\text{التمرين 7}}$.

تعيين مجموعة النقط M : نفرض $M(x ; y)$

لدينا : $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x - 3 \\ y + 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

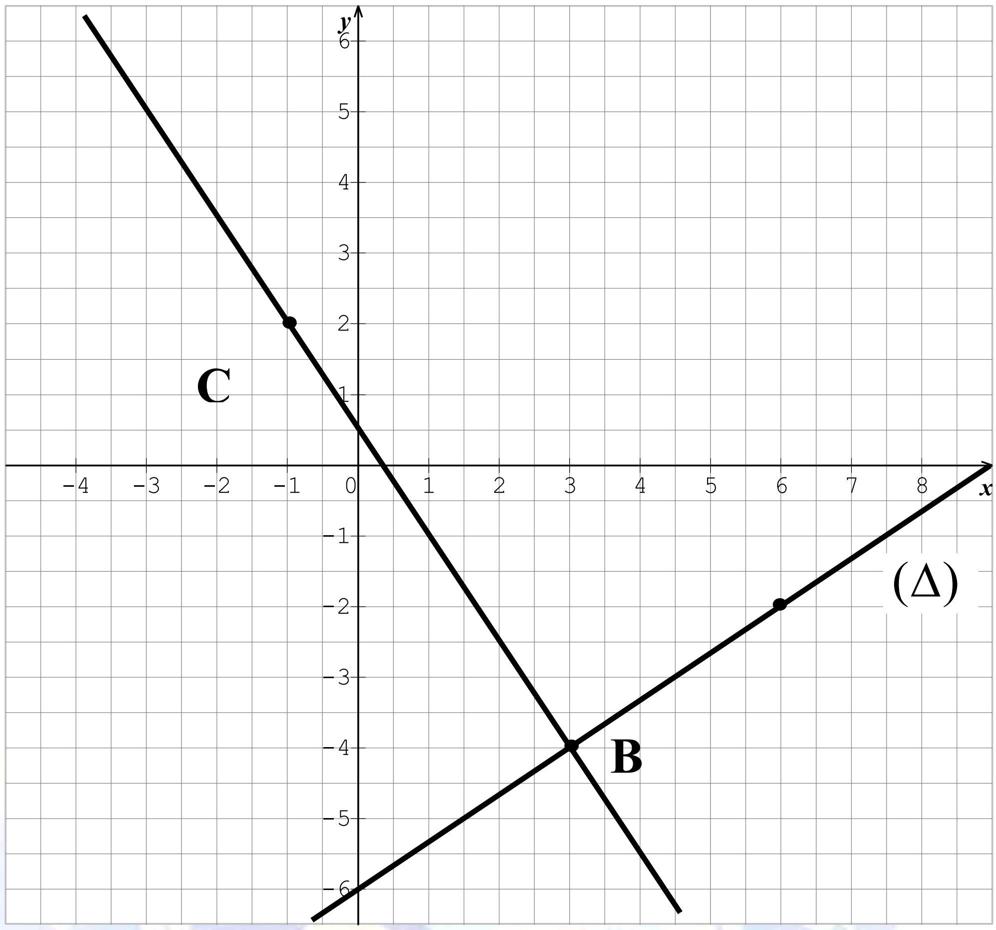
$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ وعليه : $-4(x - 3) + 6(y + 4) = 0$

إذن : $-4x + 6y + 36 = 0$ أي : $-2x + 3y + 18 = 0$

إذن مجموعة النقط M هي مستقيم (Δ) معادلته: $-2x + 3y + 18 = 0$

إنشاء المجموعة :

x	3	6
y	-4	-2



الملاحظة : المستقيم (Δ) عمودي على (BC) في النقطة B.

التمرين 8 .

تعيين مجموعة النقط M : نفرض $M(x\,;y)$

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\ y+4\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=-4$ وعليه : $-3\times(x-1)+1\times(y+4)=-4$

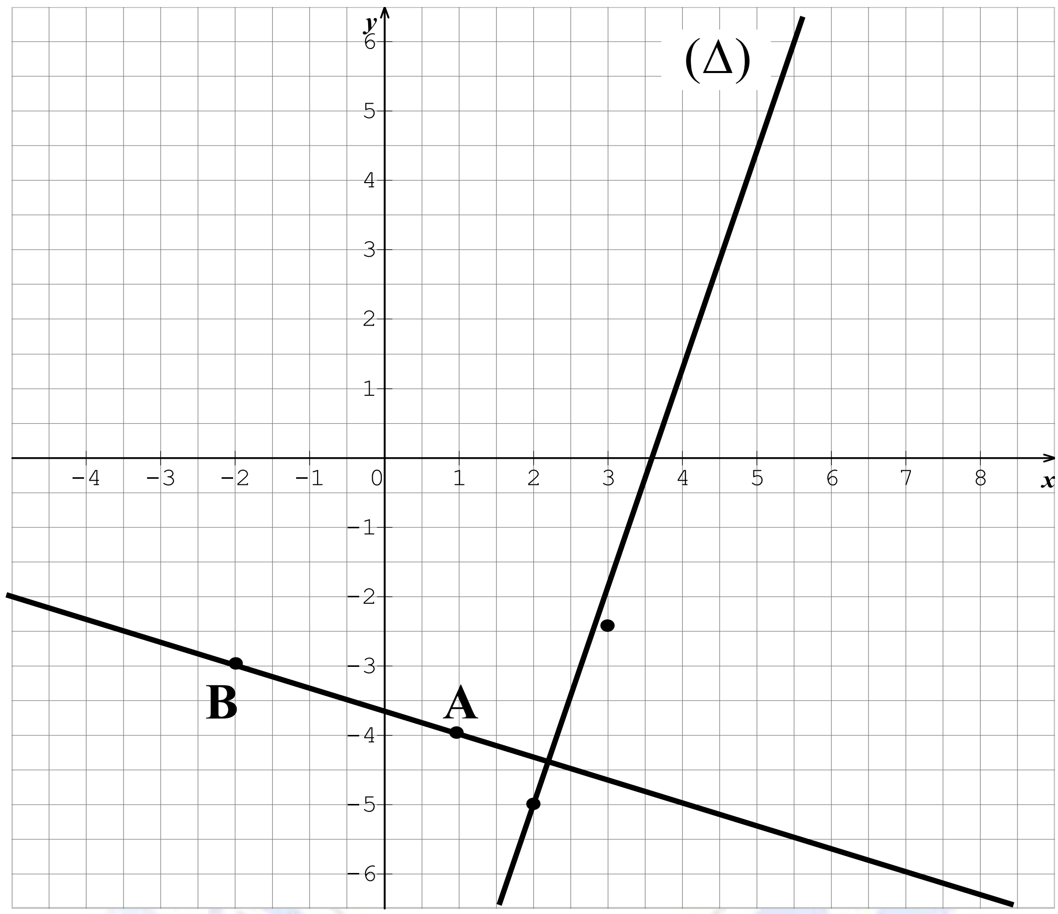
إذن : $-3x+y+11=0$

إذن مجموعة النقط M هي مستقيم (Δ)

- إنشاء (Δ) و (AB) : قيم مساعدة لرسم (Δ) :

x	2	3
y	5-	2-

نلاحظ أن (Δ) عمودي على (AB)



التمرين 9 .

حساب $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$

لدينا : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ وعليه : $\overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2$

إذن : $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

ومنه : $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$

إذن : $2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = AC^2 + CB^2 - AB^2$

وعليه : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(AC^2 + CB^2 - AB^2\right)$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(25 + 100 - 16\right)$$

إذن : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{109}{2}$

$\boxed{\text{التمرين 10}}$.

$$3\vec{u} \cdot (-\vec{v}) = -3 \times \vec{u} \cdot \vec{v} = -3 \times (5) = -15$$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = (1)^2 - (5)^2 = -24$$

$$(\vec{u} + 2\vec{v})(\vec{u} - 3\vec{v}) = \vec{u}^2 - 3\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{u} - 6\vec{v}^2$$

$$= 1 - \vec{u} \cdot \vec{v} - 30 = -29 - 5 = -34$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$= 1 + 25 + 10 = 36$$

وعليه : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 36$ ومنه : $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 6$

$\boxed{\text{التمرين 11}}$.

1- تعيين α بحيث يكون : $\vec{u} - \vec{v}$ و $\vec{u} + \alpha\vec{v}$ متعامدين.

أي : $(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \alpha\vec{v}) = 0$

ومنه : $\vec{u}^2 + \alpha\, \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \alpha\vec{v}^2 = 0$

$$4 + \alpha \times 12 - 12 - \alpha \cdot 25 = 0$$

وعليه : $-13\alpha - 8 = 0$ وبالتالي : $\alpha = \frac{-8}{13}$

2- تعيين α بحيث : $\|\vec{u} + \alpha\vec{v}\| = 2$

$$(\vec{u} + \alpha\vec{v})^2 = \vec{u} + 2\alpha\, \vec{u} \cdot \vec{v} + \alpha^2\, \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \alpha\vec{v})^2 = 4 + 2\alpha \cdot 12 + \alpha^2 \times 25$$

$$(\vec{u} + \alpha\vec{v})^2 = 25\alpha^2 + 24\alpha + 4$$

ولدينا : $\|\vec{u} + \alpha\vec{v}\|^2 = 4$ ومنه : $25\alpha^2 + 24\alpha + 4 = 4$

إذن : $25\alpha^2 + 24\alpha = 0$ وعليه : $\alpha(25\alpha + 24) = 0$

وبالتالي : $\alpha = 0$ أو $25\alpha + 24 = 0$

إذن : $\alpha = 0$ أو $\alpha = -\frac{24}{25}$

التمرين 12 .

إثبات أن : $(\vec{u} + \vec{v})$ عمودي على $(\vec{u} - \vec{v})$

لدينا : $(\vec{u} + \vec{v}) . (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

$(\vec{u} + \vec{v}) . (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\| = 0$

إذن : $(\vec{u} + \vec{v})$ عمودي على $(\vec{u} - \vec{v})$

التمرين 13 .

1- إثبات أن $\vec{u}$ و $\vec{v} - \vec{u}$ متعامدين :

لدينا : $\vec{u} (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{u} . \vec{v} - \|\vec{u}\|^2$

ومنه : $\vec{u} (\vec{v} - \vec{u}) = 4 - 4 = 0$

وعليه : $\vec{u}$ و $\vec{v} - \vec{u}$ متعامدين

استنتاج نوع المثلث ABC :

لدينا : $\vec{u} (\vec{v} - \vec{u}) = 0$ وعليه : $\overrightarrow{AB} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0$

إذن : $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{BC} = 0$ وعليه : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدين

ومنه المثلث ABC قائم في B .

إنشاء C : لدينا $(\vec{u} , \vec{v}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; k \in ¢$

وعليه : $(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; k \in ¢$

لدينا : $\|\vec{u}\| = 2$ ومنه : $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$ أي AB = 2

وعليه : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$4 = 2 \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\frac{\pi}{3}$ أي أن : $4 = 2\|\vec{v}\| \times \frac{1}{2}$

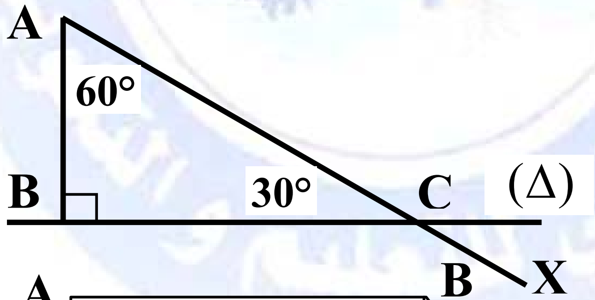
ومنه : $\|\vec{v}\| = 4$ وبالتالي : $AC = 4$.

حساب BC : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ومنه : $16 + 4 = BC^2$

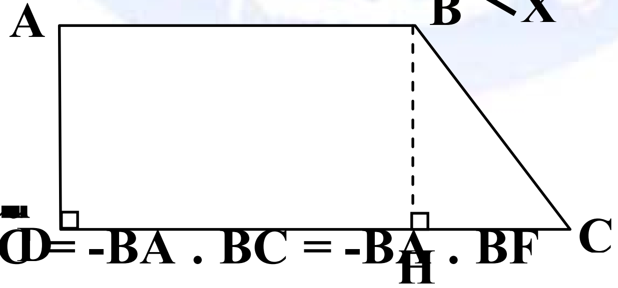
إذن : $BC^2 = 12$ ومنه : $BC = 2\sqrt{3}$

لإنشاء المثلث ABC نقوم بالخطوات التالية:

- نرسم قطعة مستقيمة $[AB]$ طولها 2 cm
- نرسم نصف مستقيم $[AX)$ بحيث : $(AX, AB) = \frac{\pi}{3}$
- نرسم مستقيما (Δ) عموديا على (AB) في النقطة B .
- يتقاطع نصف المستقيم $[AX)$ مع (Δ) في النقطة C فنحصل على المثلث ABC.



التمرين 14 .



- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF}$

حيث F المسقط العمودي للنقطة C على (AB)

ومنه: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -BA \cdot BF \cos\pi$ و $BF = DC - AB = 1$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -4 \times 1 \times (-1)$ أي : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 4$

- $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DH} = DC \cdot DH \cdot \cos 0$

حيث H المسقط العمودي للنقط B على (DC)

ومنه : $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = 5 \times 4 \times 1$ لأن : DH = AB = 4

وعليه : $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = 20$

- $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HB}\right)$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HB}\right)$$

لأن : $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{HB}$ وبالتالي :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AD}^2 \\ &= CD \cdot CH \cdot \cos 0 + 0 + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CH} + 4 \\ &= 5 \times 1 \times 1 + 0 + 0 + 4\end{aligned}$$

إذن : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 9$

- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BH}^2 = 4$

التمرين 15 .

1) نضع $K = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB}$ و منه :

$$K = \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{MB}.(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MC}.(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})$$

$$K = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$$

إذن : $K = 0$.

2) نفرض H نقطة تقاطع الارتفاعين المتعلقين بالضلعين $[BC]$ و $[AB]$. لدينا من (1) :

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

وهذا بوضع M = H

ولدينا : $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB}$

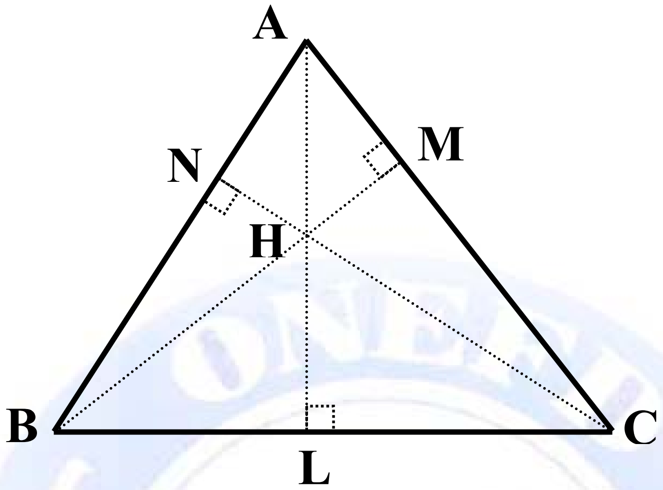
ومنه : $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ و $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

وعليه : $0 + 0 + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ ومنه : $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$

إذن : $(CA) \perp (HB)$ وعليه الارتفاع المتعلق بالضلع

$[AC]$ يشمل H .

إذن الارتفاعات الثلاثة في المثلث ABC تتقاطع في نقطة واحدة



التمرين 16 .

حساب قيس $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$

1) $\cos(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$ وعليه : $\cos(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \dfrac{-3\sqrt{3}}{3\times 2}$

إذن : $\cos(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

ومنه : $(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \;;\; k\in\mathbb{Z}$

2) $\cos(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$ و منه : $\cos(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \dfrac{+3\sqrt{3}}{3\sqrt{6}}$

$\cos(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ أي : $\cos(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

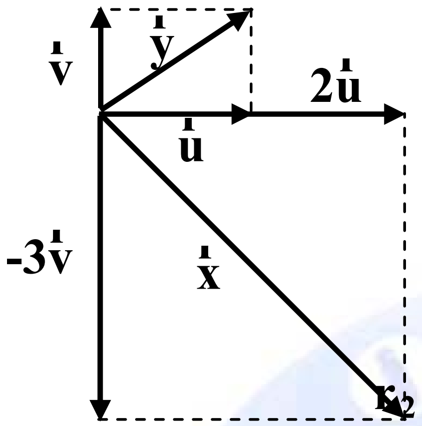
وعليه : $(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \;;\; k\in\mathbb{Z}$

3) $\cos(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$ ومنه : $\cos(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \dfrac{10}{4\times 5}$

إذن : $\cos(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \dfrac{1}{2}$

و منه : $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

التمرين 17 .



1) إنشاء $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\frac{\pi}{2} = 0$

لدينا :

$$\vec{y}^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v}$$

ومنه : $\vec{y}^2 = 9 + 4 + 0$ أي : $\vec{y}^2 = 13$

لدينا : $\vec{x}^2 = (2\vec{u} - 3\vec{v})^2 = 4\vec{u}^2 + 9\vec{v}^2 - 12\,\vec{u} \cdot \vec{v}$

$= 36 + 36 - 0$

إذن : $\vec{x}^2 = 72$

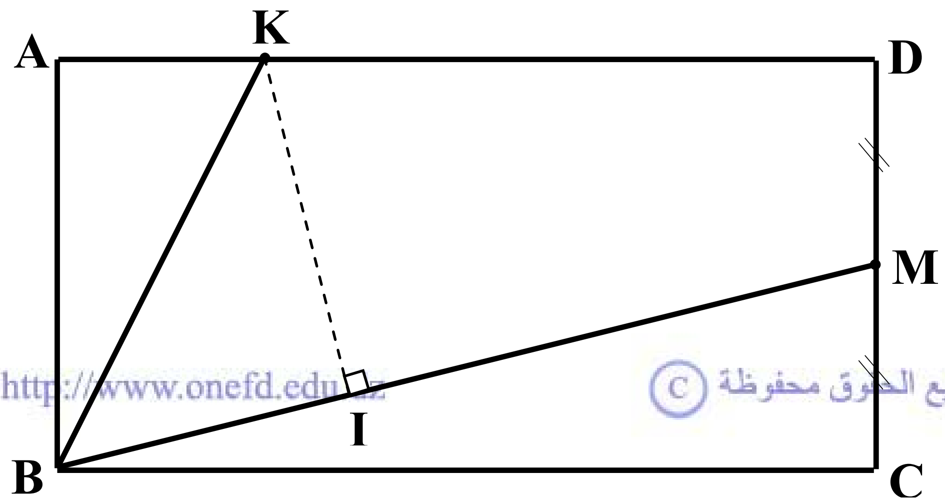
3) استنتاج $\|\vec{x}\| \;;\; \|\vec{y}\|$:

لدينا : $\vec{x}^2 = 72$ أي : $\|\vec{x}\|^2 = 72$ ومنه : $\|\vec{x}\| = 6\sqrt{2}$

ولدينا : $\vec{y}^2 = 13$ أي $\|\vec{y}\|^2 = 13$ ومنه : $\|\vec{y}\| = \sqrt{13}$

التمرين 18 .

1) إنشاء الشكل :



لدينا K مرجح الجملة (A ; 3) , (A ; 1) وعليه : $3\ \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KD}=\vec{o}$ ومنه :

$$3\ \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AD}=\vec{o}$$

أي : $4\ \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AD}=\vec{o}$ أي : $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\ \overrightarrow{AD}$

2) الحساب :

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}^{2}=64$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}^{2}=16$$

3) الحساب

$$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BM}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM})$$

$$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{CM}$$

$$=0+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\ \overrightarrow{AD}\cdot\frac{1}{2}\ \overrightarrow{DC}$$

$$=\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{CM}\right\|\ \cos 0+\left\|\overrightarrow{AK}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\ \cos 0$$

$$+\frac{1}{8}\cdot\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$$

ومنه : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BM}=4\times 2\times 1+2\times 8\times 1+\frac{1}{8}\times 0$

إذن : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BM}=24$

4) استنتاج BI :

لدينا : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BM}=24$

ومن جهة أخرى لدينا : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BK}$

و منه : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BI}$

أي : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BM}=\left\|\overrightarrow{BM}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BI}\right\|.\cos 0$

إذن : $BM\cdot BI=24$ و منه : $BI=\frac{24}{BM}$

لدينا : $BM^2=BC^2+CM^2$ وعليه : $BM^2=64+4=68$

إذن : $BM = \sqrt{68}$ أي $BM = 2\sqrt{17}$

و بالتالي : $BI = \dfrac{24}{2\sqrt{17}}$ أي : $BI = \dfrac{12\sqrt{17}}{17}$

- استنتاج قيمة مقربة لـ $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BK})$

لدينا : $\overrightarrow{BM} . \overrightarrow{BK} = \|\overrightarrow{BM}\| \times \|\overrightarrow{BK}\| \times \cos(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BK})$

ولدينا : $BK^2 = BA^2 + AK^2$ ومنه : $BK^2 = 16 + 4$

أي : $BK = \sqrt{20}$

وعليه : $\overrightarrow{BM} . \overrightarrow{BK} = 2\sqrt{17} \times 2\sqrt{5} \cos(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BK})$

$$= 4\sqrt{17} . \sqrt{5} \cos(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BK})$$

لكن : $\overrightarrow{BM} . \overrightarrow{BK} = 24$

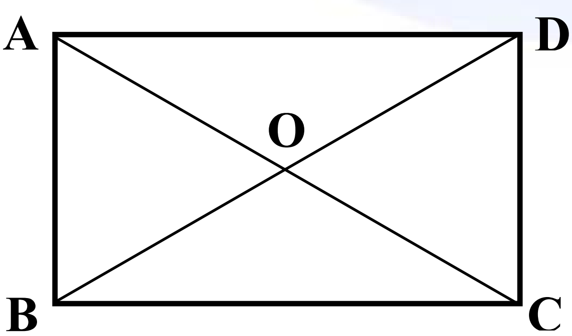
وعليه : $\cos(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BK}) = \dfrac{24}{4.\sqrt{17}.\sqrt{5}}$

أي أن : $\cos(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BK}) = \dfrac{6}{\sqrt{85}}$

وعليه : $\cos(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BK}) = \dfrac{6\sqrt{85}}{85}$

ومنه : $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BK}) \approx 0,87\ RAD$ أي : $\widehat{KBM} \approx 49,4^{o}$

التمرين 19 .



- إثبات أن :

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$$

لدينا :

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM})^2 + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM})^2$$

$$= \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OM}^2 - 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OM}^2 - 2\,\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OM}$$

$$= 2\overrightarrow{OA}^2 + 2\,\overrightarrow{OM}^2 - 2\,\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OM} + 2\,\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OM}$$

وعليه : $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 2\,\overrightarrow{OA}^2 + 2\,\overrightarrow{OM}^2$

ولدينا : $\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2 = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM}\right)^2$

$$= \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OM}^2 - 2\overrightarrow{OB}\,.\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD}^2 + \overrightarrow{OM}^2 - 2\,\overrightarrow{OD}\,.\overrightarrow{OM}$$

$$= \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OM}^2 - 2\overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OM}^2 + 2\,\overrightarrow{OB}\,.\overrightarrow{OM}$$

$$= 2\,\overrightarrow{OB}^2 + 2\,\overrightarrow{OM}^2$$

$$\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2 = 2\,\overrightarrow{OA}^2 + 2\,\overrightarrow{OM}^2$$

وعليه : $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2$

التمرين 20 .

لدينا : $\widehat{C} = 180^o - (68^o + 25^o)$ ومنه : $\widehat{C} = 87^o$.

ولدينا : $\dfrac{BC}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{AC}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{AB}{\sin \widehat{C}}$

وعليه : $\dfrac{BC}{\sin 68^o} = \dfrac{AC}{\sin 25^o} = \dfrac{16}{\sin 87^o}$

وعليه : $AC = \dfrac{16 \sin 25^o}{\sin 87^o}$ ومنه : $AC \simeq 6,77$

وكذلك لدينا : $BC = \dfrac{16 \sin 68^o}{\sin 87^o}$ ومنه : $BC \simeq 14,86$

التمرين 21 .

- حساب BC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\ AB\ .\ AC\ .\ cos\ \hat{A}$$

$$BC^2 = (20)^2 + (30)^2 - 2 \times 20 \times 30\ cos\ 100^o$$

وعليه : $BC^2\ ;\ 1508{,}38$ ومنه : $BC\ ;\ 38{,}84$

- حساب $\hat{B}$ و $\hat{C}$:

$$\frac{BC}{sin\ \hat{A}} = \frac{AC}{sin\ \hat{B}} = \frac{AB}{sin\ \hat{C}} = \frac{BC\ .\ AC\ .\ AB}{25}$$

إذن : $\frac{38{,}84}{sin\ 100^o} = \frac{30}{sin\ \hat{B}} = \frac{20}{sin\ \hat{C}}$

ومنه : $sin\ \hat{B} = \frac{30\ sin\ 100^o}{38{,}84}$ وَ $sin\ \hat{C} = \frac{20\ sin\ 100^o}{38{,}84}$

وعليه : $sin\ \hat{B}\ ;\ 0{,}76$ و $sin\ \hat{C}\ ;\ 0{,}51$

وبالتالي : $B\ ;\ 49{,}5^o$ و $\hat{C}\ ;\ 30{,}5^o$

- استنتاج مساحة المثلث : $\frac{AC}{sin\ \hat{B}} = \frac{BC\ .\ AC\ .\ AB}{2.S}$

إذن : $S = \frac{BC\ .\ AC\ .\ AB\ .\ sin\ \hat{B}}{2\ AC}$

إذن : $S = \frac{BC\ .\ AB\ .\ sin\ \hat{B}}{2}$

أي : $S\ ;\ \frac{33{,}84 \times 30 \times\ sin\ 49{,}5^o}{2}$

وعليه : $S\ ;\ 443{,}01\ cm^2$

التمرين 22 .

1) إثبات أن :

$$sin^2\ \hat{A} = sin^2\ \hat{B} + sin^2\ \hat{C} - 2\ sin\ \hat{B}\ .\ sin\ \hat{C}\ cos\ \hat{A}$$

ولدينا : $\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = r \quad ; \quad r \in \mathbb{R}$

وعليه : $AB = r \sin \widehat{C} \quad ; \quad AC = r \sin \widehat{B} \quad ; \quad BC = r \sin \widehat{A}$

ولدينا : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\, AB \,.\, AC \cos \widehat{A}$

ومنه :

$$r^2 \sin^2 \widehat{A} = r^2 \sin^2 \widehat{C} + r^2 \sin^2 \widehat{B} - 2 \,.\, r \sin \widehat{C} \,.\, r \sin \widehat{B} \cos \widehat{A}$$
$$= r^2 \left[\sin^2 \widehat{C} + \sin^2 \widehat{B} - 2 \operatorname{cin} \widehat{B} \,.\, \sin \widehat{C} \,.\, \cos \widehat{A} \right]$$

وعليه : $\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C} - 2 \sin \widehat{B} \,.\, \sin \widehat{C} \cos \widehat{A}$

2) إذا كان المثلث ABC قائم في A فإن $\cos \widehat{A} = 0$

ومما سبق : $\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}$

وإذا كان : $\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}$ فإن :

$-2 \sin \widehat{B} \,.\, \sin \widehat{C} \cos \widehat{A} = 0$ ومنه : $\cos \widehat{A} = 0$

أي : $\widehat{A} = 90^o$

3) – إذا كان المثلث ABC قائما في أي زاوية و لتكن $\widehat{A}$ فإن : $\cos \widehat{A} = 0$ ومنه :

$\sin \widehat{A} = 1$ أي : $\sin^2 \widehat{A} = 1$

ومن (2) فإن : $\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}$

أي أن : $\sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C} = 1$

وعليه : $\sin^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C} = 1 + 1 = 2$

- و إذا كان : $\sin^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C} = 2$

فمن العلاقة : $\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C} - 2 \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} \cos \widehat{A}$

و بالتعويض نجد :

$$\sin^2 \widehat{A} = 2 - \sin^2 \widehat{A} - 2 \sin \widehat{B} \quad \sin^2 \widehat{C} \operatorname{cis} \widehat{A}$$

وعليه : $2 \sin^2 \widehat{A} = 2 - 2 \sin \widehat{B} \,.\, \sin \widehat{C} \,.\, \cos \widehat{A}$

وعليه : $\sin^2 \widehat{A} = 1 - \sin \widehat{B} \,.\, \sin \widehat{C} \,.\, \cos \widehat{A}$

وعليه : $\sin \widehat{B} \,.\, \sin \widehat{C} \,.\, \cos \widehat{A} = 1 - \sin^2 \widehat{A}$

$$\sin \hat{B} \,.\, \sin \hat{C} \,.\, \cos \hat{A} = \cos^2 \hat{A}$$

ومنه : $\cos \hat{A} \,(\sin \hat{B} \,.\, \sin \hat{C} - \cos \hat{A}) = 0$

وعليه إما $\cos \hat{A} = 0$ أو $\sin \hat{B} \,.\, \sin \hat{C} - \cos \hat{A} = 0$

إذن $\cos \hat{A} = 0$ أي : $\hat{A} = 90^0$

(*) **التمرين 23** .

1) تعيين و إنشاء مجموعة النقط (Δ_1) : $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AM} = 18$

لتكن M نقطة من (Δ_1) ولتكن H مسقطها على (AB) وعليه :

$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AM} = AB \,.\, AH$ لكن : $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AM} > 0$

ومنه : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ من نفس الاتجاه . أي أن : $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AM} = AB \,.\, AH$

وعليه : AB . AH = 18

وعليه : $AH = \dfrac{18}{6}$ أي أن : $AH = 3$

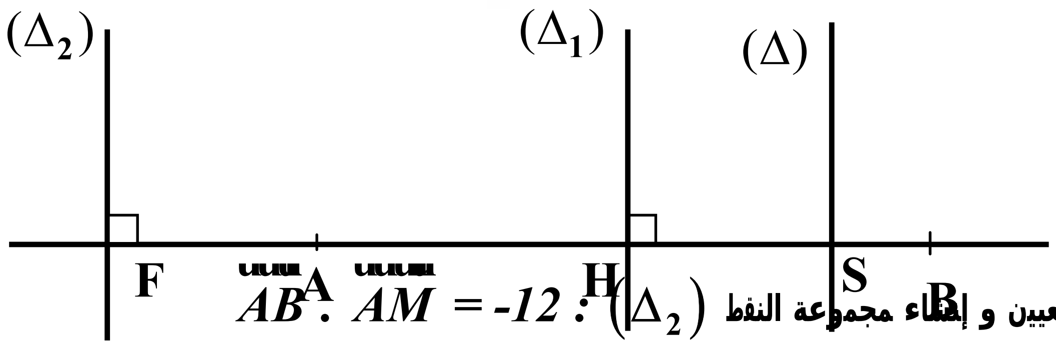
لدينا : $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AH}$

وعليه : $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AH} = 0$

ومنه : $\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}\right) = 0$

أي أن : $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{HM} = 0$ وعليه : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{HM}$

ومنه : مجموعة النقط M هي محور $[AB]$.



2) تعيين و إنشاء مجموعة النقط (Δ_2) : $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AM} = -12$

لتكن M نقطة من (Δ_2) ولتكن F مسقطها العمودي على (AB)

ومنه : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$

وبما أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AF}$ مختلفان في الاتجاه فإن :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -AB \cdot AF$$

وبالتالي : AB . AF = 12 وعليه : $AF = \frac{12}{6} = 2$

إذن : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$ ومنه :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$ أي أن : $\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AF}\right) = 0$

وعليه : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FM} = 0$

أي أن : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{FM}$ ومنه مجموعة النقط هي نقط المستقيم (Δ_2) العمودي على (AB) في F .

3) تعيين و إنشاء (π_1) : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} \geq 30$

لتكن S نقطة من (AB) بحيث : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AS} = 30$ وبما أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AS}$ من نفس الاتجاه فإن : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AS} = AB \cdot AS$ وعليه :

$AS = \frac{30}{6} = 5$ وليكن (Δ) المستقيم العمودي على (AB) في S.

يكون $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} \geq 30$ إذا وفقط إذا كان :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AS} \geq 30$ أي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AS} \geq 30$ وعليه $AS \geq 5$ وعليه :

$M \in [SB)$.

و منه (π_1) هو نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم (Δ)

و يشمل B.

(*) $\boxed{\text{التمرين 24}}$.

1) تعيين مجموعة النقط M: $MA^2 - MB^2 = 12$

لتكن I منتصف $[AB]$:

لدينا : $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=12$

$$\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)^2=12$$

وبالتالي :

$$\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}=12$$

ومنه : $4\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}=12$ وعليه : $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}=3$

أي أن : $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IM}=-3$

ليكن H المسقط العمودي للنقطة Mعلة (IA) فيكون :

$$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IH}$$

وبما أن : $\overrightarrow{IA}\,,\,\overrightarrow{IH}$ مختلفان في الاتجاه فإن :

$$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IM}=-IA\cdot IH$$

ومنه : $IA\cdot IH=3$ إذن : $IA=\dfrac{3}{2}$

ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل H و يعامد المستقيم (IA)

فتكون مجموعة النقط M هي نقطة (Δ) .

2) تعيين مجموعة النقط M : $MA^2+MB^2=40$

إذن : $MA^2+MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$$=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)^2$$

$$=MI^2+IA^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+MI^2+IA^2-2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}$$

$$=2MI^2+2IA^2$$

وعليه : $2MI^2+2IA^2=40$

وبالتالي : $2MI^2+8=40$ ومنه : $MI^2=16$

و عليه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها I ونصف قطرها 4 .

3) تعيين مجموعة النقط M : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\lambda$

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)$$
$$= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)$$
$$= MI^2 - IA^2 = MI^2 - 4$$

وعليه : $MI^2 - 4 = \lambda$ ومنه : $MI^2 = \lambda + 4$

إذن : $MI^2 = \lambda + 4$

- إذا كان $\lambda + 4 = 0$ أي $\lambda = -4$ فإن : $M \equiv I$
 مجموعة النقط هي I .
- إذا كان $\lambda + 4 < 0$ أي $\lambda < -4$ فإن مجموعة النقط خالية .
- إذا كان $\lambda + 4 > 0$ أي $\lambda > -4$ فإن مجموعة النقط هي دائرة
 مركزها I ونصف قطرها $\sqrt{\lambda + 4}$

(*) $\boxed{\text{التمرين 25}}$.

1) لدينا : $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC\cdot AB\cos\widehat{A}$

ومنه : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

وعليه : $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$

إذن : $1 + \cos\widehat{A} = 1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

و منه : $1 + \cos\widehat{A} = \dfrac{(b+c)^2 - a^2}{2\,bc}$

$$= \frac{(b + c - a)\,(b + c + a)}{2\,bc}$$
$$= \frac{(a + b + c)\,(b + c - a)}{2\,bc}$$

ولدينا :
$$1-\cos\widehat{A}=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}$$
$$=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2\,bc}$$
$$=\frac{a^2-(b^2+c^2-2bc)}{2\,bc}$$
$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{2\,bc}$$
$$=\frac{(a-b+c)\,(a+b-c)}{2\,bc}$$

وعليه :
$$1-\cos\widehat{A}=\frac{(a+c-b)\,(a+b-c)}{2\,bc}$$

2) نضع : $(1-\cos\widehat{A})\,(1+\cos\widehat{A})=L$ و منه :
$$L=\frac{(a+b+c)\,(b+c-a)}{2\,bc}\times\frac{(a+c-b)\,(a+b-c)}{2\,bc}$$

ومنه :
$$1-\cos^2\widehat{A}=\frac{2p\times(2p-2a)\times(2p-2b)\,(2p-2c)}{4b^2c^2}$$
$$\sin^2\widehat{A}=\frac{16\,p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{4\,b^2c^2}$$

وبالتالي :
$$\sin^2\widehat{A}=\frac{4\,p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{b^2c^2}$$

3) لدينا العبارة :
$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{abc}{2S}$$

وعليه : $S=\frac{1}{2}\,bc\sin\widehat{A}$ ومنه : $\sin\widehat{A}=\frac{2.S}{bc}$

وعليه :
$$\sin^2\widehat{A}=\frac{4S^2}{b^2c^2}$$

وبالتالي مما سبق : $\dfrac{4S^2}{b^2c^2} = \dfrac{4\,p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$

إذن : $S^2 = p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)$

ومنه : $S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$ (عبارة هيرون)

4) مساحة المثلث : S

نصف محيط المثلث هو : $p = \dfrac{10+15+9}{2}$

إذن : $p = 17$.

و منه : $S = \sqrt{17\,(17-10)\,(17-15)\,(17-9)}$

$S = \sqrt{17 \times 7 \times 2 \times 8}$

إذن : $S = 4\sqrt{119}$

$S \simeq 43{,}6\ cm^2$

التمرين 26 .

1) معادلة (Δ_1) : شعاع توجيه (Δ) هو : $\vec{V}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

لتكن $M\,(x\,;\,y)$ نقطة من المستوي .

تكون M نقطة من (Δ_1) إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{AM} \perp \vec{V}$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix}$, $\vec{V}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ وعليه : $-3\,(x+1) + 2\,(y-2) = 0$

إذن معادلة (Δ_1) هي : $-3\,x + 2y - 7 = 0$

2) نقط تقاطع (Δ_1) و (Δ) : نحل الجملة : $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 & 3\times \\ -3x + 2y - 7 = 0 & 2\times \end{cases}$

وهي تكافئ : $\begin{cases} 6x + 9y - 15 = 0 \\ -6x + 4y - 14 = 0 \end{cases}$ بالجمع نجد :

$13y - 29 = 0$ وعليه : $y = \dfrac{29}{13}$

بالتعويض في المعادلة $6x + 9y - 15 = 0$ نجد :

$6x + 9\left(\dfrac{29}{13}\right) - 15 = 0$ وعليه : $6x + \dfrac{66}{13} = 0$

ومنه : $x = \dfrac{\dfrac{-66}{13}}{6}$ ومنه : $x = \dfrac{-11}{13}$

ومنه : $B\left(\dfrac{-11}{13} ; \dfrac{29}{13}\right)$

3) معادلة الدائرة ذات القطر $[AO]$:

لتكن $M(x ; y)$ نقطة من هذه الدائرة : $\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MO} = 0$

ولدينا : $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} -1-x \\ 2-y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MO}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

وعليه : $(-1 - x)(-x) + (2 - y)(-y) = 0$

$$x + x^2 - 2y + y^2 = 0$$

ومنه معادلة الدائرة هي : $x^2 + y^2 + x - 2y = 0$

التمرين 27 .

1- ليكن G مركز ثقل المثلث ABC :

لدينا : $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x_G = \dfrac{-2+1+1}{3} \\ y_G = \dfrac{2-4+2}{3} \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \end{cases}$ إذن : $G \equiv O$

2- تعيين معادلات المتوسطات :

لتكن K , J , I منتصفات القطع $[BC] , [AC] , [AB]$ على الترتيب . و منه :

$$K\left(\frac{1+1}{2} ; \frac{-4+2}{2}\right) , \ J\left(\frac{-2+1}{2} ; \frac{2+2}{2}\right) , \ I\left(\frac{-2+1}{2} ; \frac{2-4}{2}\right)$$

إذن : $K(1 , -1) , \ J\left(\frac{-1}{2} , 2\right) , \ I\left(\frac{-1}{2} , -1\right)$

معادلة المتوسط (CI) : لتكن $M(x ; y)$ نقطة منه

لدينا : $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ -3 \end{pmatrix} , \ \overrightarrow{MI}\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} - x \\ -1 - y \end{pmatrix} , \ \overrightarrow{MI} \,//\, \overrightarrow{CI}$

ومنه : $\frac{-3}{2}(-1 - y) + 3\left(\frac{-1}{2} - x\right) = 0$

إذن : $-x + y = 0$ معادلة (CI)

<u>معادلة المتوسط (BJ)</u> : لتكن $M(x , y)$ نقطة منه

لدينا : $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ 6 \end{pmatrix} , \ \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 4 \end{pmatrix} , \ \overrightarrow{BM} \,//\, \overrightarrow{BJ}$

وعليه : $6(x - 1) + \frac{3}{2}(y + 4) = 0$

إذن : $6x + \frac{3}{2}y = 0$

معادلة (BJ) هي : $4x + y = 0$

معادلة المتوسط (AK) : لتكن $M(x , y)$ نقطة منه

لدينا : $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} , \ \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x + 2 \\ y - 2 \end{pmatrix} , \ \overrightarrow{AM} \,//\, \overrightarrow{AK}$

وعليه : $-3(x + 2) - 3(y - 2) = 0$

ومنه معادلة (AK) هي : $-3x - 3y = 0$

أي : $x + y = 0$

3) نقطة تقاطع المتوسطات : نعين نقط تقاطع (BJ) و (AK)

$$\begin{cases} 4x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$ بالطرح نجد $x = 0$ ومنه $y = 0$

إذن تتقاطع المتوسطات الثلاثة في النقطة $O\ (0\ ;\ 0)$

ملاحظة :

نقطة تقاطع المتوسطات الثلاثة هي مركز ثقل المثلث ABC

التمرين 28 .

1- معادلات الأعمدة :

لتكن I, J, K المساقط العمودية للنقط A, B, C على المستقيمات $(BC)\ ,\ (AC)\ ,\ (AB)$ على الترتيب .

- معادلة العمود (AI) :

لتكن $M\ (x\ ;\ y)$ نقطة من (AI) :

لدينا : $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

ومنه : $4\ (x - 1) + 3\ (y - 2) = 0$

إذن معادلة (AI) هي : $4x + 3y - 10 = 0$

- معادلة العمود (BJ) : لتكن $M\ (x\ .\ y)$ نقطة من (AJ)

- لدينا : $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x + 4 \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ومنه : $-1\ (x + 4) + 1\ .\ y = 0$ أي : $-x + y - 4 = 0$

هي معادلة (BJ)

- معادلة العمود (CK) :

لتكن $M\ (x\ ;\ y)$ نقطة من (CK)

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-0\\y-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{AB}$

ومنه $-5x-2(y-3)=0$ أي : $-5x-2y+6=0$

إذن معادلة (CK) هي : $5x+2y-6=0$

2- نقطة تقاطع الأعمدة :

نعين نقط تقاطع : (AI) و(BJ) :

$$\begin{cases}4x+3y-10=0\\-x+y-4=0 & 4\times\end{cases}$$

ومنه : $\begin{cases}4x+3y-10=0\\-4x+4y-16=0\end{cases}$ بالجمع : $7y-26=0$

ومنه : $y=\dfrac{26}{7}$ و بالتالي : $-x+\dfrac{26}{7}-4=0$

أي: $-7x+26-28=0$ إذن : $-7x-2=0$ وبالتالي : $x=\dfrac{-2}{7}$ إذن نقطة تقاطع كل الأعمدة هي : $W\left(\dfrac{-2}{7};\dfrac{26}{7}\right)$

3- تعيين مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

مركز الدائرة هو نقطة تقاطع محاور المثلث ABC .

لتكن I , J منتصفي $[BC]$, $[AB]$ على الترتيب .

$$\begin{cases}x_I=\dfrac{1-4}{2}=\dfrac{-3}{2}\\ y_I=\dfrac{2+0}{2}=1\end{cases} \quad , \quad \begin{cases}x_J=\dfrac{-4+0}{2}=-2\\ y_J=\dfrac{0+3}{2}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

- تعيين معادلة محور $[BC]$: لتكن M (x ; y) نقطة من المحور

لدينا : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x+2\\y-\dfrac{3}{2}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{BC}$

وعليه : $4\,(x+2)+3\left(y-\frac{3}{2}\right)=0$ أي : $8x+6y+7=0$

- تعيين معادلة محور $[AB]$: لتكن $M\,(x\,;\,y)$ نقطة من المحور

لدينا : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{JM}$, $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix} x+\frac{3}{2} \\ y-1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

ومنه : $-5\left(x+\frac{3}{2}\right)-2\,(y-1)=0$

أي : $-5x-2y-\frac{15}{2}+2=0$

وعليه معادلة المحور هي : $10x+4y+11=0$

- تعيين نقطة تقاطع المحوريين : $\begin{array}{l} 5\times \\ \\ 4\times \end{array}\begin{cases} 8x+6y+7=0 \\ 10x+4y+1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 40x+30y+35=0 \\ -40x-16y-44=0 \end{cases}$ بالجمع نجد : $14y-9=0$

إذن : $y=\frac{9}{14}$ ومنه : $8x+6\times\frac{9}{14}+7=0$

ومنه : $8x+\frac{152}{14}=0$ ومنه : $x=\frac{-19}{14}$

نقطة التقاطع هي $F\left(\frac{-19}{14}\,;\,\frac{9}{14}\right)$ وهي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

نصف قطر الدائرة هو FA :

$$FA=\sqrt{\left(1+\frac{19}{14}\right)^2+\left(2-\frac{9}{14}\right)^2}=\frac{\sqrt{1450}}{14}$$

التمرين 29 .

1) معادلة $\left(\Gamma_1\right)$ هي : $(x-1)^2+(y+3)^2=\alpha^2$

وبما أن : $A \in \left(\Gamma_1\right)$ فإن : $(5-1)^2+(2+5)^2=\alpha^2$

إذن : $\alpha^2=65$

ومنه معادلة $\left(\Gamma_1\right)$ هي : $(x-1)^2+(y+3)^2=65$

2) معادلة الدائرة ذات القطر $[\omega A]$:

لتكن $M(x\,;y)$ نقطة من هذه الدائرة : لدينا

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{M\omega}=0 \quad , \quad \overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}5-x\\2-y\end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{M\omega}\begin{pmatrix}1-x\\-3-y\end{pmatrix}$$

ومنه : $(1-x)(5-x)+(-3-y)(2-y)=0$ وعليه :

$$5-x-5x+x^2-6+3y-2y+y^2=0$$

وعليه معادلة الدائرة هي : $x^2+y^2-6x+y-1=0$

3) معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث $AB\omega$:

مركز الدائرة هو نقطة تقاطع المحاور.

لتكن I , J منتصفي $[AB]$, $[B\omega]$ على الترتيب

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{5+1}{2}=3 \\ y_I=\dfrac{2-2}{2}=0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x_J=\dfrac{1+1}{2}=1 \\ y_J=\dfrac{-2-3}{2}=\dfrac{-5}{2} \end{cases}$$

ومنه : $I\left(3\,;0\right) \quad , \quad J\left(1\,;\dfrac{-5}{2}\right)$

- معادلة محور $[AB]$:

لتكن $M(x\,;y)$ نقطة من محور $[AB]$: $\overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-3\\y\end{pmatrix}$

وعليه : $-4(x-3)-4y=0$

أي معادلة المحور هي : $x+y-3=0$

- معادلة المحور $[B\omega]$:

لتكن $M(x\,;y)$ نقطة من محور $[B\omega]$: $\overrightarrow{JM} \perp \overrightarrow{B\omega}$

$\overrightarrow{B\omega}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{JM}\begin{pmatrix}x-1\\y+\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

ومنه : $0(x-1)-\left(y+\frac{5}{2}\right)=0$

وعليه معادلة المحور هي : $2y+5=0$

- تقاطع المحورين :

نحل الجملة : $\begin{cases} x+y-3=0 \\ y=\frac{-5}{2} \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} x-\frac{5}{2}-3=0 \\ y=\frac{-5}{2} \end{cases}$ أي أن : $\begin{cases} x=\frac{11}{2} \\ y=\frac{-5}{2} \end{cases}$

وعليه نقطة التقاطع هي : $S\left(\frac{11}{2}\,;\frac{-5}{2}\right)$

إذن معادلة الدائرة هي : $\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\alpha^2$

وبما أن : B نقطة الدائرة فإن : $\left(1-\frac{11}{2}\right)^2+\left(-2+\frac{5}{2}\right)^2=\alpha^2$

وعليه : $\alpha^2=\frac{82}{4}$ أي $\alpha^2=\frac{41}{2}$

معادلة الدائرة هي : $\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)=\frac{41}{2}$

4) كتابة معادلة الدائرة: لتكن T نقطة التماس

لدينا : $\overrightarrow{\omega T}$ شعاع عمودي على (Δ) وشعاع توجيه (Δ) هو $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ومنه :

$\vec{V}\perp\overrightarrow{\omega T}$.

نفرض $T\,(x_0\,;\,y_0)$ وعليه : $\overrightarrow{\omega T}\begin{pmatrix}x_0-1\\y_0+3\end{pmatrix}$; $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

وبالتالي : $(x_0-1)+2\,(y_0+3)=0$

أي : $x_0+2y_0+5=0$

لدينا : $T\in(\Delta)$ ومنه : $x_0-y_0+2=0$

ومنه : $\begin{cases}x_0-y_0+2=0\\x_0+2y_0+5=0\end{cases}$ بالطرح نجد : $-3y_0-3=0$

إذن : $y_0=-1$ وعليه : $x_0=-1-2=-3$

إذن : $T\,(-3\,,-1)$

نصف قطر الدائرة هو $T\omega$:

$$\omega T^2=(-3-1)^2+(-1+3)^2=20$$

ومنه معادلة الدائرة هي : $(x-1)^2+(y+3)^2=20$

التمرين 30 .

تعيين مجموعة النقط

1) لدينا : $x^2+y^2-2x+4y-11=0$

$$(x-1)^2-(1)^2+(y+2)^2-(2)^2-11=0$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=16$$

مجموعة النقط هي دائرة مركزها $\omega(1\,;\,-2)$ ونصف قطرها $R=4$

2) لدينا : $2x+2y^2+4x+8y+10=0$

أي : $2\,(x^2+y^2+2x+4y+5)=0$

و منه : $x^2+y^2+2x+4y+5=0$

$$(x+1)^2+(y+2)^2-(1)^2-(2)^2+5=0$$

وعليه : $(x+1)^2+(y+2)^2=0$

ومنه : $x+1=0$ و $y+2=0$

أي : $x=-1$ و $y=-2$

مجموع النقط هي نقطة $I(-1\,;\,-2)$

3) لدينا : $-x^2-y^2+6x+10y-60=0$

و منه : $x^2+y^2-6x-10y+60=0$

$$(x-3)^2-(3)^2+(y-5)^2-(5)^2+60=0$$

$$(x-3)^2+(y-5)^2=-26$$

إذن مجموعة النقط M خالية .

4) لدينا : $y^3+x^2y-4xy+5y^2=0$

$$y\,(y^2+x^2-4x+5y)=0$$

إما : $y=0$ أو $x^2+y^2-4x+5y=0$

أي : $y=0$ أو $(x-2)^2+\left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2-4-\dfrac{25}{4}=0$

ومنه : $y=0$ أو $(x-2)^2+\left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{41}{4}$

مجموعة النقط هي إتحاد المستقيم الذي معادلته $y=0$ و الدائرة

ذات المركز $L\left(2 ; \frac{-5}{2}\right)$ ونصف القطر $\frac{\sqrt{41}}{2}$.

التمرين 31 .

$$x^2 + y^2 - 2m\,x - 2\,(1 + m)\,y + 6m + 1 = 0$$

$$x^2 - 2m\,x + y^2 - 2\,(1 + m)\,y + 6m + 1 = 0$$

$$(x - m)^2 - m^2 + \left[y - (1 + m)\right]^2 - (1 + m)^2 + 6m + 1 = 0$$

$$(x - m)^2 + \left[y - (1 + m)\right]^2 = m^2 + 1 + 2m + m^2 - 6m - 1$$

$$(x - m)^2 + \left[y - (1 + m)\right]^2 = 2m^2 - 4m$$

$$(x + m)^2 + \left[y - (1 + m)\right]^2 = 2m\,(m - 2)$$

- إذا كان $m = 0$: $x^2 + (y - 1)^2 = 0$ ومنه $(x ; y) = (0 ; 1)$
مجموعة النقط هي النقطة $M_0\ (0 ; 1)$.
- إذا كان $m = 2$: $(x - 2)^2 + (x - 3)^2 = 0$ أي : $(x ; y) = (2 ; 3)$
مجموعة النقط هي النقطة $M_1\ (2 ; 3)$.
- إذا كان : $m \in \left]0 ; 2\right[$ فإن : $2m\,(m - 2) < 0$
مجموعة النقط هي المجموعة الخالية .
- إذا كان : $m \in \left]-\infty ; 0\right[\cup \left]2 ; +\infty\right[$ فإن : $2m\,(m - 2) > 0$
مجموعة النقط هي الدائرة ذات المركز $\omega(m ; m+1)$ و نصف
القطر $\sqrt{2m\,(m - 2)}$.

التمرين 32 .

1) إثبات أن $\left(C_m\right)$ دائرة :

$$x^2 + y^2 - 2\,(1 - m)\,x + (1 + 6m)\,y + 5m - \frac{5}{4} = 0$$

$$\left[x - (1 - m)\right]^2 - (1 - m)^2 + \left[y + \frac{1+6m}{2}\right]^2 - \left(\frac{1+6m}{2}\right)^2$$

$$+ 5m - \frac{5}{4} = 0$$

$$\left[x - (1- m)\right]^2 + \left[y + \frac{1+6m}{2}\right]^2 = 1- 2m + m^2 + \frac{1 +12m +36m^2}{4}$$

$$- 5m + \frac{5}{4}$$

$$\left[x - (1 - m)\right]^2 + \left[y + \frac{1 + 6m}{2}\right]^2 =$$

$$\frac{4 - 8m + 4m^2 + 1 + 12m + 36^2 - 20m + 5}{4}$$

$$\left[x - (1 - m)\right]^2 + \left[y + \frac{1 + 6m}{2}\right]^2 = \frac{40m^2 - 16m + 10}{4}$$

ندرس إشارة $40m^2 - 16m + 10$

$\Delta = (-16)^2 - 4\ (40)\ (10)$ ومنه $\Delta = 1344$ أي $\Delta < 0$

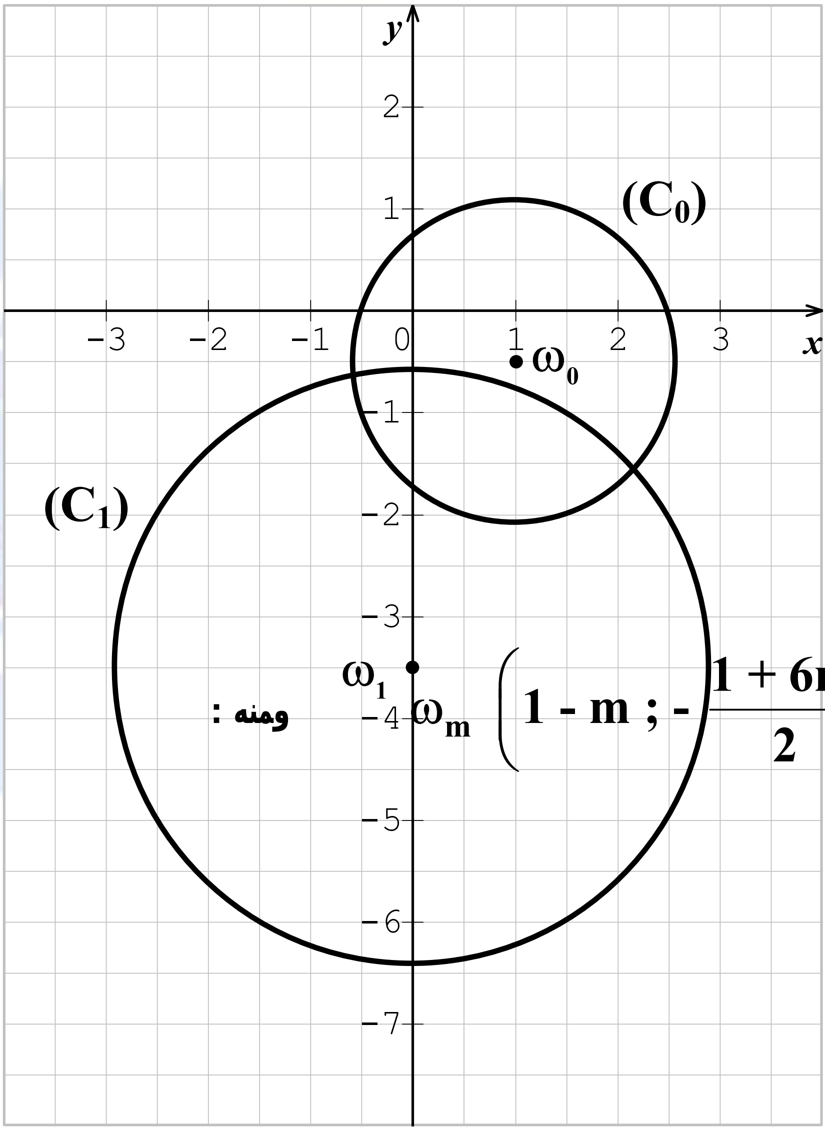
ومنه : $40m^2 - 16m + 10 > 0$

وعليه : $\left(C_m\right)$ دائرة مركزها $\omega\left(1 - m\ ;\ - \frac{1 + 6m}{2}\right)$

ونصف قطرها : $\frac{\sqrt{40m^2 - 16m + 10}}{2}$

2) إنشاء (C_1) , (C_0) :

$$C_1\left(\omega_1\left(0\,;\,\frac{-7}{2}\right),\ \frac{\sqrt{34}}{2}\right) \quad , \quad C_0\left(\omega_0\left(1\,;\,\frac{-1}{2}\right),\ \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$$



3) $\omega_m\left(1 - m\,;\,-\frac{1+6m}{2}\right)$ ومنه :

ومنه : $\begin{cases} m = 1 - x \\ y = -\dfrac{1 + 6(1 - x)}{2} \end{cases}$

إذن : $y = \frac{6x - 7}{2}$

مجموع النقط ω_m هي مستقيم معادلته $y = \frac{6x - 7}{2}$

4) إثبات أن (C_m) تشمل نقطتان ثابتتان A ; B

$$x^2 + y^2 - 2(1 - m)x + (1 + 6m)y + 5m - \frac{5}{4} = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2mx + y + 6my + 5m - \frac{5}{4} = 0$$

$$4x^2 + 4y^2 - 8x + 8mx + 4y + 24my + 20m - 5 = 0$$

$$4x^2 + 4y^2 - 8x + 4y - 5 + m(8x + 24y + 20) = 0$$

وعليه : $\begin{cases} 8x + 24y + 20 = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 - 8x + 4y - 5 = 0 \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} 2x + 6y + 5 = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 - 8x + 4y - 5 = 0 \end{cases}$

إذن :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(-6y - 5) \\ 4 \times \frac{1}{4}(-6y - 5)^2 + 4y^2 - 8 \times \frac{1}{2}(-6y - 5) + 4y - 5 = 0 \end{cases}$$

ومنه : $1 \times (36y^2 + 60y + 25) + 4y^2 + 24y + 20 + 4y - 5 = 0$

$$36y^2 + 60y + 25 + 4y^2 + 24y + 20 + 4y - 5 = 0$$

$$40y^2 + 88y + 40 = 0$$

$$5y^2 + 11y + 5 = 0$$

$$\Delta = (11)^2 - 4\,(5)\,(5) = 21$$

$\Delta > 0$ ومنه للمعادلة حلين : $y_1 = \dfrac{-11-\sqrt{21}}{10}$; $y_2 = \dfrac{-11+\sqrt{21}}{10}$

لما $y = \dfrac{-11-\sqrt{21}}{10}$: $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{66+6\sqrt{21}}{10} - 5\right)$

و منه : $x_1 = \dfrac{8+3\sqrt{21}}{10}$

لما $y = \dfrac{-11+\sqrt{21}}{10}$: $x_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{+66-6\sqrt{21}}{10} - 5\right)$

و منه : $x_2 = \dfrac{8-3\sqrt{21}}{10}$

إذن : $A\,(x_1\,, y_1)$, $B\,(x_2\,, y_2)$.

التمرين 33 .

دراسة وضعية (C) و (Δ) : نحل الجملة

$$\begin{cases} x - y + m = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \end{cases}$$ وهي تكافئ :

$$\begin{cases} x = y - m \\ (y - m)^2 + y^2 + 2\,(y - m) - 4y = 0 \end{cases}$$

ومنه : $$\begin{cases} x = y - m \\ y^2 - 2m\,y + m^2 + y^2 + 2y - 2m - 4y = 0 \end{cases}$$

ومنه : $$\begin{cases} x = y - m \\ 2y^2 - 2my - 2y + m^2 - 2m = 0 \end{cases}$$

أي :
$$\begin{cases} x = y - m \\ 2y^2 - 2(m+1)y + m^2 - 2m = 0 \end{cases}$$

حل المعادلة : $2y^2 - 2(m+1)y + m^2 - 2m = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac$ أي : $\Delta' = (m+1)^2 - 2(m^2 - 2m)$

$$\Delta' = m^2 + 2m + 1 - 2m^2 + 4m$$

$$\Delta' = -m^2 + 6m + 1$$

دراسة إشارة Δ' : $\Delta'_m = (3)^2 - 1(-1) = 10$

Δ' له جذران : $m_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{10}}{-1}$; $m_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{10}}{-1}$

إذن : $m_1 = 3 + \sqrt{10}$; $m_2 = 3 - \sqrt{10}$

m	$-\infty$		m_2		m_1		$+\infty$
Δ'		-	0	+	0	-	

مناقشة المعادلة :

- لما : $m \in]-\infty ; m_2[\cup]m_1 ; +\infty[$: $\Delta' < 0$

ليس للمعادلة حلول و عليه (C) و (Δ_m) منفصلان

- لما : $m \in]m_2 ; m_1[$: $\Delta' > 0$ ومنه للمعادلة حلين :

$$y_1 = \frac{m + 1 - \sqrt{-m^2 + 6m + 1}}{2}$$

$$y_2 = \frac{m + 1 + \sqrt{-m^2 + 6m + 1}}{2}$$

لما $y = y_1$: $x_1 = y_1 - m$

و منه : $$x_1 = \frac{-m + 1 - \sqrt{-m^2 + 6m + 1}}{2}$$

لما $y = y_2$: $x_2 = y_2 - \text{m}$

و منه : $x_2 = \dfrac{-\text{m} + 1 + \sqrt{-\text{m}^2 + 6\text{m} + 1}}{2}$

ومنه $\left(\Delta_{\text{m}}\right)$ يقطع (C) في نقطتين :

$$B\ (x_2\ , y_2)\quad ;\quad A\ (x_1\ , y_1)$$

- لما $\text{m} = \text{m}_1$ فإن : $\Delta = 0$
- ومنه للمعادلة حل مضاعف $y_0 = \dfrac{\text{m} + 1}{2}$

وعليه : $y_0 = \dfrac{3 + \sqrt{10} + 1}{2}$ أي $y_0 = \dfrac{4 + \sqrt{10}}{2}$

ومنه : $x_0 = \dfrac{-2 - \sqrt{10}}{2}$

وعليه $\left(\Delta_{\text{m}}\right)$ مماسا(C) في النقطة $C\ (x_0\ ; y_0)$

وعليه $y_0 = \dfrac{3 + \sqrt{10} + 1}{2}$ أي $y_0 = \dfrac{4 + \sqrt{10}}{2}$

وبالتالي : $x_0 = y_0 - m_1 = \dfrac{4 + \sqrt{10}}{2} - m_1$

$$x_0 = \frac{4 + \sqrt{10}}{2} - \left(3 + \sqrt{10}\right) = \frac{4 + \sqrt{10} - 6 - 2\sqrt{10}}{2}$$

ومنه : $x_0 = \dfrac{-2 - \sqrt{10}}{2}$

وعليه $\left(\Delta_{\text{m}_1}\right)$ مماس $\left(\text{C}\right)$ في النقطة $C\left(x_0 ; y_0\right)$

لما $\text{m} = \text{m}_2$: $\Delta = 0$ ومنه للمعادلة حل مضعف : $y'_0 = \dfrac{\text{m}_2 + 1}{2}$

ومنه : $y'_0 = \frac{3-\sqrt{10}+1}{2}$ أي : $y'_0 = \frac{4-\sqrt{10}}{2}$

وبالتالي: $x'_0 = \frac{4-\sqrt{10}}{2} - \left(3-\sqrt{10}\right)$

$x'_0 = \frac{4-\sqrt{10}-6-2\sqrt{10}}{2}$ وعليه : $x'_0 = \frac{-2+\sqrt{10}}{2}$

وعليه $\left(\Delta_{m2}\right)$ مماس $\left(C\right)$ في النقطة $F\left(x'_0\ ;\ y'_0\right)$

التمرين 34 .

1) تعيين $\left(C_1\right)$: $x^2+y^2+2x-y=5$

$$\left(x+1\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-1-\frac{1}{4}=5$$

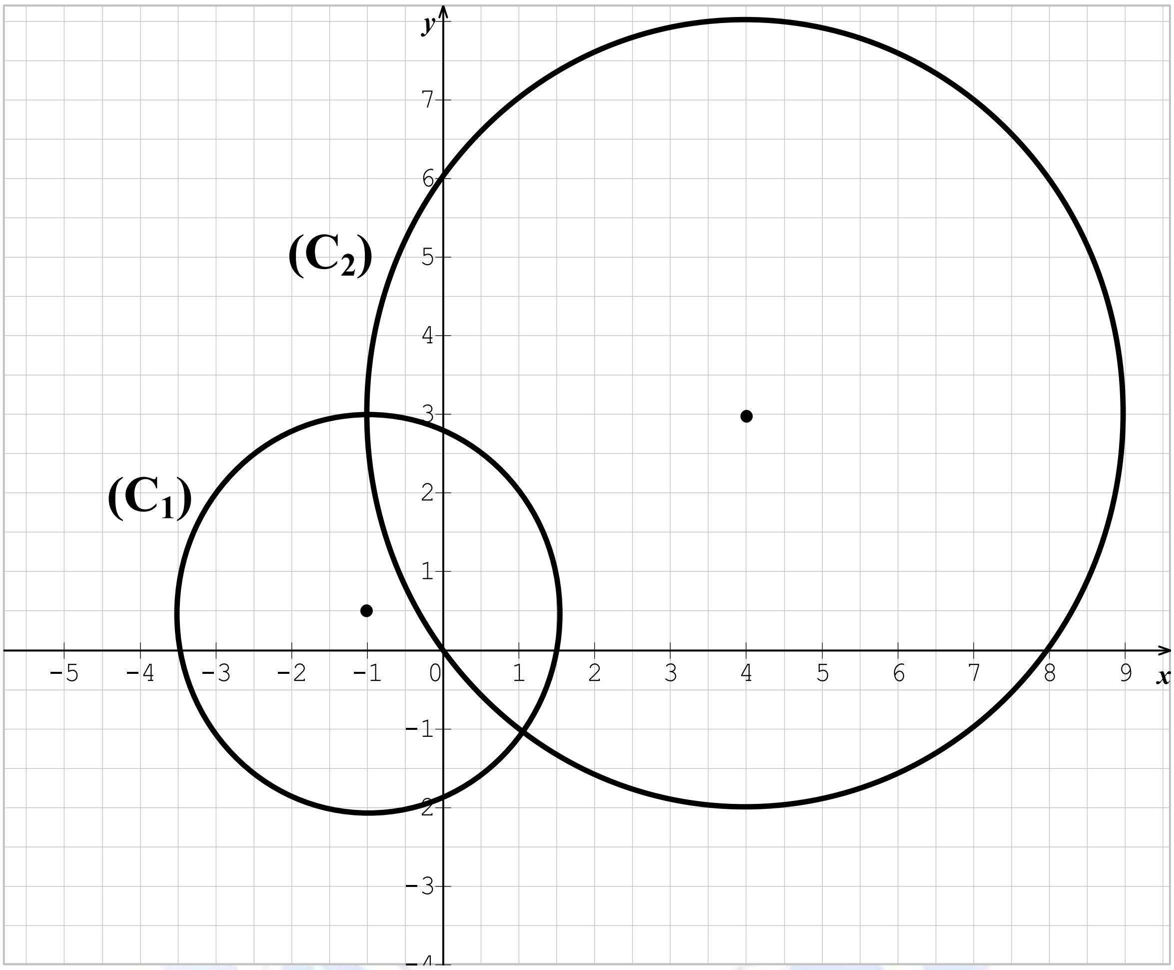
وعليه : $(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

$\left(C_1\right)$س دائرة مركزها $\omega_1\left(-1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{5}{2}$

2) معادلة $\left(C_2\right)$: $\left(x-4\right)^2+\left(y-3\right)^2=25$

و منه : $x^2+y^2-8x-6y=0$

3) إنشاء (C_1) و (C_2) :



- تعيين نقط تقاطعهما :

نحل الجملة :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - y = 5 \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \end{cases}$$

بالطرح : $10x + 5y = 5$ ومنه : $2x + y = 1$

إذن : $y = 1 - 2x$ وعليه : $x^2 + (1- 2x)^2 + 2x - (1 - 2x) = 5$

أي : $x^2 + 1 - 4x + 4x^2 + 2x - 1 + 2x = 5$

و منه : $5x^2 = 5$ و عليه : $x = 1$ أو $x = -1$

لما $x = 1$: $y = -1$ ؛ لما $x = -1$: $y = 3$

ومنه : $(C_1) \cap (C_2) = \{F\ (1\ ; -1)\ , H\ (-1\ ; 3)\}$

4) – معادلة المماس للدائرة (C_1) عند F :

$\left(C_1\right) : x^2 + y^2 + 2x - y - 5 = 0$ ، F (1 ; -1)

لكن $\left(\Delta_1\right)$ هذا المماس، ولتكن M (*x* ; *y*) نقطة من $\left(C_1\right)$

لدينا : $\overrightarrow{FM} \perp \overrightarrow{\omega_1 F}$; $\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{\omega_1 F}\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{-3}{2} \end{pmatrix}$

وعليه : $2\,(x-1) - \frac{3}{2}\,(y+1) = 0$ أي : $4x - 3y - 7 = 0$

معادلة المماس للدائرة $\left(C_2\right)$ عند F :

$\left(C_2\right) : x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$; $\omega_2\ (4 ; 3)$

لتكن $\left(\Delta_2\right)$ هذا المماس .

نفرض M (*x* ; y) نقطة من $\left(\Delta_2\right)$.

$\overrightarrow{FM} \perp \overrightarrow{\omega_2 F}$, $\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y-3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\omega_2 F}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

وعليه : $-3\,(x-4) - 4\,(y-3) = 0$

معادلة $\left(\Delta_2\right)$ هي : $3x + 4y - 24 = 0$

شعاع توجيه $\left(\Delta_1\right)$ هو $\vec{U}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ وشعاع توجيه $\left(\Delta_2\right)$ هو $\vec{V}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = 4\,(3) - 3\,(4) = 0$$

وعليه : $\vec{U} \perp \vec{V}$ ومنه $\left(\Delta_1\right)$ و $\left(\Delta_2\right)$ متعامدين

- معادلة المماس $\left(\Delta_3\right)$ للدائرة $\left(C_1\right)$ عند H (-1 ; 3) : لتكن

M (*x* ; y) نقطة من $\left(\Delta_3\right)$. $\overrightarrow{\omega_1 H} \perp \overrightarrow{HM}$

حيث : $\overrightarrow{\omega_1 H}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \end{pmatrix}$

ومنه : $0\,(x+1) + \frac{5}{2}\,(y-3) = 0$ وعليه : $y = 3$ معادلة $\left(\Delta_3\right)$

- معادلة المماس $\left(\Delta_4\right)$ للدائرة $\left(C_2\right)$ عند $H(-1\,;\,3)$:

لتكن $M(x\,;\,y)$ نقطة من $\left(\Delta_4\right)$. $\overrightarrow{\omega_2 H} \perp \overrightarrow{HM}$

حيث : $\overrightarrow{\omega_2 H}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\end{pmatrix}$

ومنه : $-5\,(x+1) + 0\,(y-3) = 0$

وعليه : $x = -1$ معادلة $\left(\Delta_4\right)$

شعاع توجيه $\left(\Delta_3\right)$ هو $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

شعاع توجيه $\left(\Delta_4\right)$ هو $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

وعليه $\vec{j} \perp \vec{i}$ ومنه : $\left(\Delta_3\right)$ و $\left(\Delta_4\right)$ متعامدين .