المتتاليات العدديـــة

الكفاءة المرحلية :

الترميز بالدليل - الترميز الدالي

الحد العام لمتتالية حسابية – متتالية هندسية.

- التعرف على متتالية حسابية.متتالية هندسية

التمثيل البياني لمتتالية - توليد متتالية عددية.

حساب حدود متتالية بواسطة حاسبة أو مجدول .

التعرف على اتجاه تغير متتالية

• التمييز بين المتتالية (u_n) و الحد u_n

حساب مجموع

p و حدا متعاقبا لمتتالية حسابية لمتتالية هندسية.

حساب نهاية متتالية

التعرف على المتتالية المتقاربة

تصميم الدرس

- تعاريف
- المتتالية الحسابية
- المتتاليات المتقاربة ـ المتباعدة

تعاريف

مثال 1 :

1) اقترح الخمس عناصر المتابعة لكل قائمة من القوائم التالية:

أ) $0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; \ldots$

ب) $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{5} ; \ldots$

جـ) $1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; \ldots$

2) نرمز بـ U_1 (نقرأ U دليل 1) أو U لـ 1 إلى الحد الأول.

U_2 الحد الثاني.

U_3 الحد الثالث ....الخ.......

من قائمة الأعداد الفردية :

$U_1 = 1 \; ; \; U_2 = 3 \; ; \; U_3 = 5$ ....الخ.......

- عين : $U_4 \; ; \; U_5 .....; U_{10}$

3) نعرف قائمة من الأعداد بالشكل التالي :

الحد الأول من القائمة هو 3 نرمز له بـ : V_1 .

كل حد هو ضعف الحد الذي قبله.

اتمم الجمل التالية :

V_2 هو ضعف ....؛ $V_2 =$

V_3 هو ضعف ....؛ $V_3 =$

احسب : $V_4 , V_5 , \ldots , V_{10}$

حـل :

1)-أ) $0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18$

ب) $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{6} ; \frac{1}{7} ; \frac{1}{8} ; \frac{1}{9} ; \frac{1}{10}$

جـ) $1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100$

2) $u_4 = 7 \; ; \; u_5 = 9 \; ; \; u_6 = 11 \; ; \; u_7 = 13$

$u_8 = 15 \; ; \; u_9 = 17 \; ; \; u_{10} = 19$

3) v_2 هو ضعف v_1 ؛ $v_2 = 6$

v_3 هو ضعف v_2 ؛ $v_3 = 12$

$v_4 = 24$; $v_5=48$; $v_6=96$; $v_7=192$

$v_8 = 384$; $v_9=768$; $v_{10}=1536$

<u>مثال 2</u> :

إدخال مفهوم المتتالية الحسابية المتتالية ؛ الهندسية.

1- <u>التزايد المطلق الثابت</u> :

أ) نعتبر القائمة المعرفة بالشكل :

الحد الأول هو U_0 حيث : $U_0 = -12$

التزايد المطلق بين حدين متتابعين هو : $3,5$

أي فمثلا : $U_7 - U_6 = 3,5$ أو $U_{24} - U_{23} = 3,5$

أو $U_{540} - U_{539} = 3,5$. ما هي قيمة : $U_1 - U_0$ ؟

- احسب الحدود العشرة الأولى لهذه القائمة .

ب) نعتبر قائمة مضاعفات العدد 5.

اكتب العشرة حدود الأولى ابتداء من : $U_1 = 5$.

احسب كل التزايدات المطلقة بين حدين متتابعين

$U_2 - U_1 = ...$; $U_3 - U_2 = ...$; $U_{10} - U_9 = ...$

هل هذا التزايد ثابت ؟

2 - <u>التزايد النسبي الثابت</u> :

أ) نعتبر القائمة المعرفة بالشكل التالي :

الحد الأول U_0 حيث : $U_0 = 1$

التزايد النسبي بين حدين متتابعين هو : $0,5$ أي بتعبير آخر :

فمثلا : $\dfrac{U_{16} - U_{15}}{U_{15}} = 0,5$; $\dfrac{U_6 - U_5}{U_5} = 0,5$

$\dfrac{U_{127} - U_{126}}{U_{126}} = 0,5$. ما هي قيمة $\dfrac{U_1 - U_0}{U_0}$ ؟ استنتج U_1 .

احسب العشرة حدود الأولى لهذه المتتالية .

ب) نعتبر قائمة الأعداد المعرفة بالشكل التالي :

الحد الأول U_0 حيث : $U_0 = 2$

كل حد يساوي جداء الحد الذي قبله في 3 .

$$U_1 = 3 \times U_0 = 6 \;;\; U_2 = 3 \times U_1 = 18$$

- اكتب العشرة حدود الأولى لهذه القائمة .
- احسب التزايدات النسبية :

$$\frac{U_1 - U_0}{U_0} = \dots \;; \quad \frac{U_2 - U_1}{U_1} = \dots \;; \quad \frac{U_9 - U_8}{U_8} = \dots$$

هل هذا التزايد النسبي ثابت ؟

حـل :

1- التزايد المطلق الثابت :

أ) لدينا : $u_1 - u_0 = 3,5$ و منه :

$$u_1 = -8,5 \;;\; u_2 = -5 \;;\; u_3 = -1,5 \;;\; u_4 = 2$$

$$u_5 = 5,5 \;;\; u_6 = 9 \;;\; u_7 = 12,5 \;;\; u_8 = 16 \;;\; u_9 = 19,5$$

ب)

$$u_1 = 5 \;;\; u_2 = 10 \;;\; u_3 = 15 \;;\; u_4 = 20 \;;\; u_5 = 25$$

$$u_6 = 30 \;;\; u_7 = 35 \;;\; u_8 = 40 \;;\; u_9 = 45 \;;\; u_{10} = 50$$

لدينا :

$$u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = u_5 - u_4 = u_6 - u_5$$

$$u_7 - u_6 = u_8 - u_7 = u_9 - u_8 = u_{10} - u_9 = 5$$

هذا التزايد ثابت .

2- التزايد النسبي الثابت :

أ) لدينا : $\dfrac{u_1 - u_0}{u_0} = 0,5$

و منه : $u_1 = 0,5u_0 + u_0 = 1,5u_0 = 1,5$

العشرة حدود الأولى هي :

$$u_2 = 2,25 \;;\; u_3 = 3,375 \;;\; u_4 = 5,0625 \;;\; u_5 = 7,59375$$

$$u_6 = 11,390625 \;;\; u_7 = 17,0859375$$

$$u_8 = 25,62890625 \;;\; u_9 = 38,443359385$$

ب) العشرة حدود الأولى هي :

$$u_0 = 2 \;;\; u_1 = 6 \;;\; u_2 = 18 \;;\; u_3 = 54 \;;\; u_4 = 162 \;;\; u_5 = 486$$

$$u_6 = 1458 \;;\; u_7 = 4374 \;;\; u_8 = 13122 \;;\; u_9 = 39366$$

التزايدات النسبية :

$$\frac{u_1 - u_0}{u_0} = \frac{u_2 - u_1}{u_1} = \ldots = \frac{u_9 - u_8}{u_8} = 2$$

هذا التزايد النسبي ثابت .

I- ***تعريف وترميز*** :

تعريف : تسمى متتالية عددية كل دالة من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$

نرمز لهذه المتتالية U و لدينا :

$$U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto U_n$$

العدد U_n يسمى الحد العام للمتتالية.

ملاحظة :

في حالة المتتاليات نفضل الترميز بالدليل U_n الذي يقرأ :

"U دليل n" على الترميز الدالي U (n) الذي يقرأ " U لـ n "

المتتالية U . نرمز لها كذلك $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إذا كان الحد الأول هو U_0 ؛

و نرمز لها بـ $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ إذا كان الحد الأول هو U_1 .

II- ***كيف نُعرف متتالية*** : (توليد متتالية)

1- ***بإعطاء حدها العام*** :

مثال1 : $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ و عليه مثلا : $U_{10} = \dfrac{1}{100}$

مثال2 : $U_n = \dfrac{3^{n+1}}{n}$ و عليه مثلا : $U_3 = \dfrac{81}{3} = 27$

- حالة خاصة : $U_n = f(n)$ حيث f دالة مألوفة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (أو على مجال من الشكل : $[a \,;\, +\infty[$ مع $a > 0$) مجموعة القيم $f(n)$ التي تأخذها الدالة من أجل القيم الطبيعية للمتغير ، تعرف متتالية (U_n) حيث : $U_n = f(n)$

مثال :

من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = f(n)$

حيث : $f : x \to 2x^2 - 1$

فمثلا : $U_{17} = 2 \times 17^2 - 1 = 577$

$$U_{n+1} = 2(n+1)^2 - 1 = 2n^2 + 4n + 1$$

2- ***بإعطاء علاقة تراجعية*** :

إعطاء الحد الأول U_0 وعلاقة (تسمى علاقة تراجعية) تسمح بحساب أي حد متتالية انطلاقا من الحد الذي قبله ، نعين عموما متتالية.

مثال :

$U_0 = 5$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 3U_n - 2$

هذه المعطيات تسمح بحساب شيئا فشيئا حدود المتتالية :

$$U_1 = 3U_0 - 2 = 13 \quad ; \quad U_2 = 3U_1 - 2 = 37$$

$$U_3 = 3U_2 - 2 = 109 ,.....$$

هنا نعبرعن U_{n+1} بدلالة U_n أي : $U_{n+1} = f(U_n)$

حيث f هي الدالة : $x \mapsto 3x - 2$

ملاحظة :

إذا كانت f دالة معرفة على مجال I.

بحيث من أجل كل x من I ، فإن $f(x)$ من I كذلك . يمكن أن نعرف متتالية (U_n) بإعطاء U_0 حيث U_0 من I و العلاقة التراجعية ،

$$U_{n+1} = f(U_n)$$

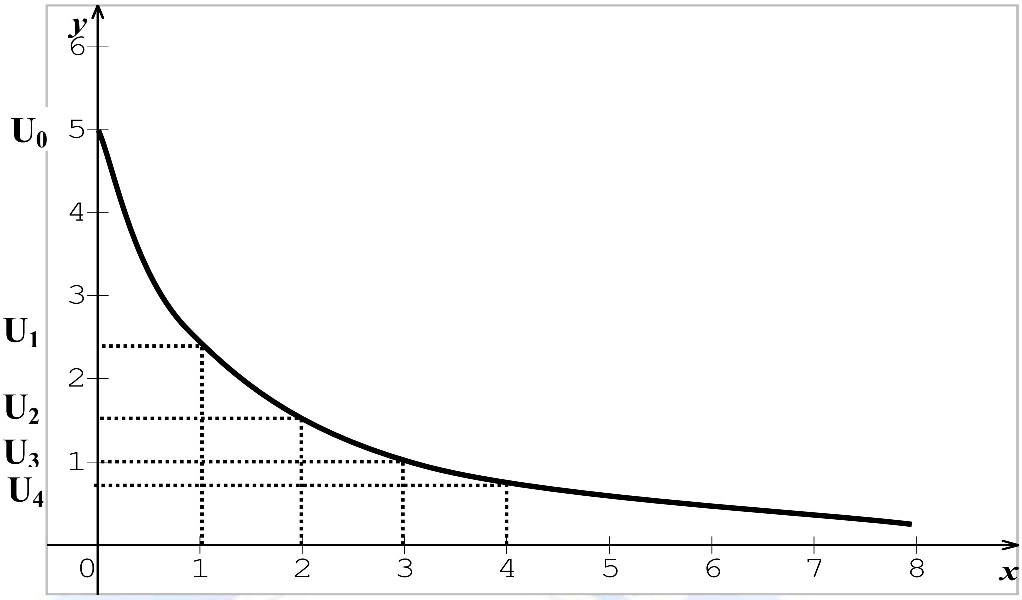
III- ***التمثيل البياني لمتتالية*** :

إذ كان : $U_n = f(n)$ فإن حدود المتتالية (U_n) هي تراكيب النقط التي إحداثياتها أعدادا طبيعية للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f .

مثال :

المتتالية (U_n) معرفة بحدها العام $U_n = \dfrac{4}{n+1}$

الحدود الأولى للمتتالية تقرأ على محور الترتيب.



IV - **<u>اتجاه تغير متتالية</u>** :

1- <u>تعريف</u> :

نقول عن المتتالية (U_n) أنها متزايدة ابتدءا من الرتبة n_0 إذا كان : من أجل كل عدد طبيعي

$$n \geq n_0 \text{ فإن } U_{n+1} \geq U_n$$

وتكون المتتالية (U_n) متناقصة إذا كان : من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ فإن

$$U_{n+1} \leq U_n$$

وتكون المتتالية (U_n) ثابتة إذا كان.

إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n فإن $U_{n+1} = U_n$

<u>ملاحظة</u> :

إذا كانت المتتالية (U_n) إما متزايدة و إما متناقصة و إما ثابتة نقول عنها أنها رتيبة .

2- تعيين اتجاه تغير متتالية :

عموما لتعيين اتجاه تغير متتالية نبحث عن إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$

<u>مثال</u> :

(U_n) متتالية معرفة بـ : $U_n = n^2 - n - 2$

$$U_{n+1} - U_n = (n + 1)^2 - (n + 1) - 2 - (n^2 - n - 2) = 2n$$

ومنه : $U_{n+1} - U_n > 0$ (في حالة $n \geq 1$).

ومنه : (U_n) متزايدة تماما ابتداء من الرتبة U_1 .

* إذا كانت الحدود U_n موجبة تماما ، يمكن مقارنة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و العدد 1 .

<u>مثال</u> :

(U_n) متتالية حيث $U_n = \frac{2^n}{3^n}$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2^n}{3^n} \neq 0$ لأن $2^n \neq 0$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2^n} = \frac{2}{3}$$

ومنه : $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ أي : $U_{n+1} < U_n$

إذن المتتالية (U_n) متناقصة تماما .

* إذا كانت متتالية (U_n) معرفة بـ : $U_n = f(n)$

لتكن (U_n) متتالية عددية معرفة بـ : $U_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على المجال $]0 \ ; \ +\infty[$.

1- إذا كانت f متزايدة تماما فإن (U_n) متزايدة تماما.

2- إذا كانت f متناقصة تماما فإن (U_n) متناقصة تماما.

<u>مثال</u> :

(U_n) متتالية عددية حيث : $U_n = \frac{3n - 1}{n + 2}$

لتكن الدالة f : $x \mapsto \frac{3x - 1}{x + 2}$

f معرفة على $- \{-2\}$ ؛ و بالتالي معرفة على $]0 \ ; \ +\infty[$ وقابلة للاشتقاق على $]0 \ ; \ +\infty[$ من أجل كل x : $x \geq 0$

$$f'(x) = \frac{3\,(x + 2) - (3x\ -)}{(x + 2)^2} = \frac{7}{(x + 2)^2}$$ ومنه : $f'(x) > 0$

إذن f متزايدة تماما على $]0 ; +\infty[$ ؛ لكن من أجل كل عدد طبيعي n :

$U_n = f(n)$ ومنه : (U_n) متزايدة تماما.

تمـاريـن و مشكلات

التمرين 1.

من أجل كل قائمة ، عين الخمس أعداد الناقصة .

1) $-3 ; -7 ; \dots ; -15 ; -19 ; \dots ; \dots ; \dots ; \dots$

2) $1 ; 4 ; 9 ; \dots ; 25 ; \dots ; 49 ; \dots ; \dots ; 100 ; \dots$

3) $-3 ; 3 ; -3 ; 3 ; \dots ; 3 ; \dots ; \dots ; -3 ; \dots ; \dots$

4) $1 ; 1,05 ; 1,1 ; 1,15 ; \dots ; \dots ; \dots ; \dots ; 1,4$

5) $2187 ; 729 ; \dots ; 81 ; \dots ; 9 ; 3 ; 1 ; \dots ; \dots$

6) $\frac{3}{2} ; \frac{3}{4} ; \frac{3}{8} ; \dots ; \dots ; \dots ; \dots ; \dots$

التمرين 2.

احسب الخمس حدود الأولى لكل متتالية ذات الحد العام U_n و الحد الأول U_0 .

1) $U_n = n^2 + 1$ ؛ 2) $U_n = \frac{1}{n+2}$ ؛ 3) $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

4) $U_n = \sqrt{n+3}$ ؛ 5) $U_n = n^3 + n$

التمرين 3.

عبر في كل حالة عن U_{n+1} و U_{n+2} بدلالة n

1) $U_n = 3n - 1$ ؛ 2) $U_n = n^2 - n$

3) $U_n = \frac{1}{n+3}$ ؛ 4) $U_n = \frac{n-3}{n+1}$

التمرين 4.

لتكن $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حدها العام : $U_n = \frac{4n^2}{2n+3}$

1) احسب الست حدود الأولى لهذه المتتالية.

2) عبر بدلالة n عن الأعداد.

$U_n + 1 ; U_{n+1} ; U_{2n} - 3 ; U_{2n-3} ; U_{2n} ; U_{n-1}$

التمرين 5 .

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية حيث :

$U_0 = 2$ و من أجل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 3U_n - 5$

- احسب : $U_1 \; ; \; U_2 \; ; \ldots ; \; U_8$

التمرين 6 .

مثل بيانيا المتتالية (U_n) في كل حالة مما يلي :

1) $U_n = n^3$ ؛ 2) $U_n = \sqrt{n}$ ؛ 3) $U_n = n^2$

4) $U_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$ ؛ 5) $U_n = \dfrac{-3n+1}{2}$.

التمرين 7 .

عبر عن $U_{n+1} - U_n$ بدلالة n و استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n)

1) $U_n = n^2 + n$ ؛ 2) $U_n = \dfrac{1}{n+2}$

3) $U_n = n^2 + 3$ ؛ 4) $U_n = \dfrac{4n+5}{2n+1}$

5) $U_n = n^3$ ؛ 6) $U_n = (n+4)^2$

7)

$U_n = 2n^2 + 5n - 1$

الحـــــــــلول

التمرين 1.

(1 $-3 ; -7 ; -11 ; -15 ; -19 ; -23 ; -27 ; -31 ; -35$

(2 $1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ; 121$

(3 $-3 ; 3 ; -3 ; 3 ; -3 ; 3 ; -3 ; 3 ; -3 ; 3 ; -3$

(4 $1 ; 1{,}05 ; 1{,}1 ; 1{,}15 ; 1{,}2 ; 1{,}25 ; 1{,}30 ; 1{,}35 ; 1{,}4$

(5 $2187 ; 729 ; 243 ; 81 ; 27 ; 9 ; 3 ; 1 ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{9}$

(6 $\frac{3}{2} ; \frac{3}{4} ; \frac{3}{8} ; \frac{3}{16} ; \frac{3}{32} ; \frac{3}{64} ; \frac{3}{128} ; \frac{3}{256}$

التمرين 2.

(1 $U_0 = 1 ، U_1 = 2 ، U_2 = 5 ، U_3 = 10 ، U_4 = 17$

(2 $U_0 = \frac{1}{2} ، U_1 = \frac{1}{3} ، U_2 = \frac{1}{4} ، U_3 = \frac{1}{5} ، U_4 = \frac{1}{6}$

(3 $U_0 = 1 ، U_1 = \frac{1}{2} ، U_2 = \frac{1}{4} ، U_3 = \frac{1}{8} ، U_4 = \frac{1}{16}$

(4 $U_0 = \sqrt{3} ، U_1 = 2 ، U_2 = \sqrt{5} ، U_3 = \sqrt{6} ، U_4 = \sqrt{7}$

(5 $U_0 = 0 ، U_1 = 2 ، U_2 = 10 ، U_3 = 30 ، U_4 = 68$

التمرين 3.

(1 $U_{n+1} = 3(n+1) - 1 = 3n + 2$

$U_{n+2} = 3(n+2) - 1 = 3n + 5$

(2 $U_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) = n^2 + n$

$U_{n+2} = (n+2)^2 - (n+2) = n^2 + 3n + 2$

(3 $U_{n+1} = \frac{1}{n+4} \quad ; \quad U_{n+2} = \frac{1}{n+5}$

(4 $U_{n+1} = \frac{n-2}{n+2} \quad ; \quad U_{n+2} = \frac{n-1}{n+3}$

التمرين 4 .

1) $U_0 = 0 \quad ; \quad U_1 = \frac{4}{5} \quad ; \quad U_2 = \frac{16}{7} \quad ; \quad U_3 = 4$

$U_4 = \frac{64}{11} \quad ; \quad U_5 = \frac{100}{13}$

2) $$U_{n-1} = \frac{4(n-1)^2}{2(n-1)+3} = \frac{4n^2 - 8n + 4}{2n+1}$$

$$U_{2n} = \frac{4(2n)^2}{2(2n)+3} = \frac{16n^2}{4n+3}$$

$$U_{2n-3} = \frac{4(2n-3)^2}{2(2n-3)+3} = \frac{16n^2 - 48n + 36}{4n-3}$$

$$U_{2n} - 3 = \frac{16n^2}{4n+3} - 3 = \frac{16n^2 - 12n - 9}{4n+3}$$

$$U_{n+1} = \frac{4(n+1)^2}{2(n+1)+3} = \frac{4n^2 + 8n+4}{2n+5}$$

$$U_n + 1 = \frac{4n^2}{2n+3} + 1 = \frac{4n^2 + 2n + 3}{2n+3}$$

التمرين 5 .

$U_1 = 3 \times 2 - 5 = 1 \quad ; \quad U_2 = 3 \times 1 - 5 = -2$

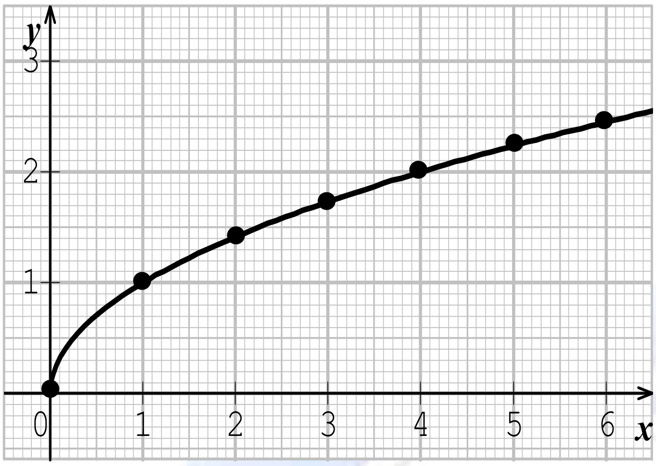
$U_3 = 3 \times (-2) - 5 = -11 \quad ; \quad U_4 = 3 \times (-11) - 5 = -38$

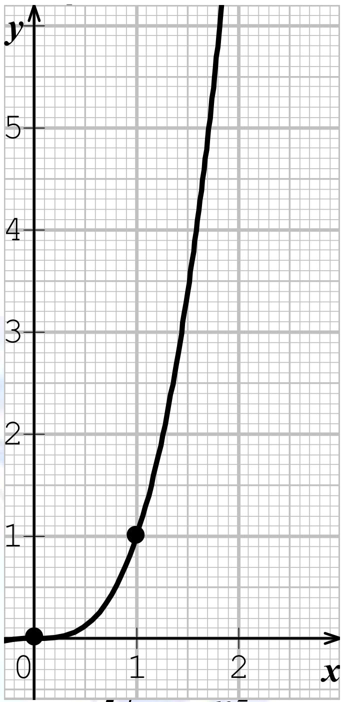
$U_5 = 3(-38) - 5 = -119 \quad ; \quad U_6 = 3 \times (-119) - 5 = -362$

$U_7 = 3(-362) - 5 = -1091 \quad ; \quad U_8 = 3(-1051) - 5 = -3278$

التمرين 6 .

(1

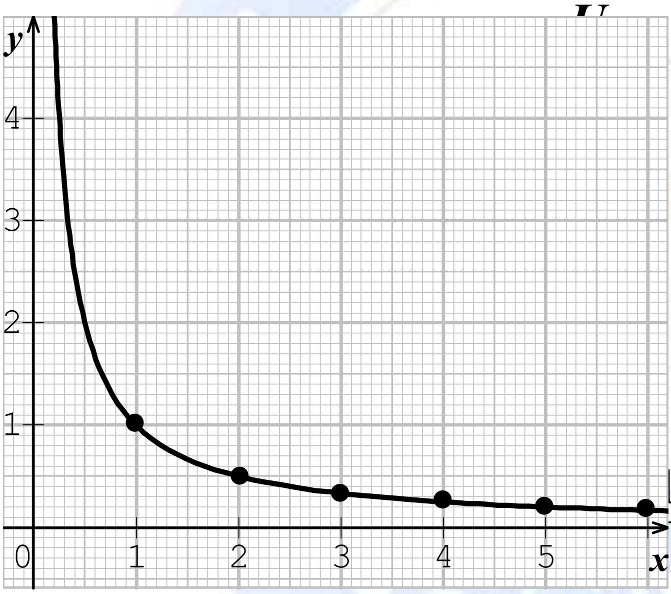


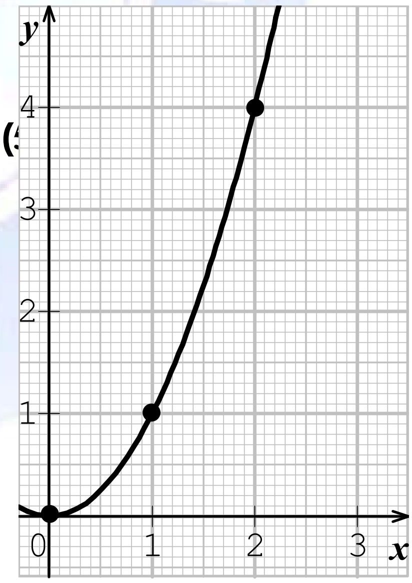


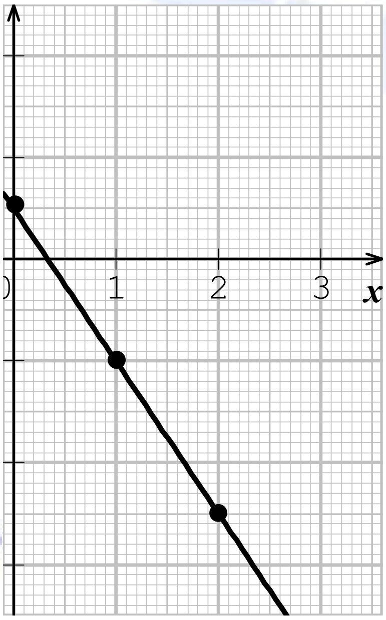
$\frac{1}{n}$

(3

$U_n = n^{-}$







التمرين 7 .

1) لدينا : $U_{n+1} = (n+1)^2 + n + 1 = n^2 + 3n + 2$

ومنه : $U_{n+1} - U_n = 2n + 2$ و عليه : $U_{n+1} - U_n > 0$

إذن (U_n) متزايدة تماما .

2) لدينا: $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(n+2)-(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \dfrac{-1}{(n+3)(n+2)}$

و منه : $U_{n+1} - U_n < 0$ إذن : (U_n) متناقصة تماما .

3) لدينا : $U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 + 3 - (n^2 + 3)$

ومنه : $U_{n+1} - U_n = 2n + 1$ و عليه : $U_{n+1} - U_n > 0$

إذن (U_n) متزايدة تماما .

(4 $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(4n+9)(2n+1)-(2n+3)(4n+5)}{(2n+3)(2n+1)}$

$$= \frac{-6}{(2n+3)(2n+1)}$$

و منه : $U_{n+1} - U_n < 0$ إذن : (U_n) متناقصة تماما .

(5 $U_{n+1} - U_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

و منه : $U_{n+1} - U_n > 0$ إذن : (U_n) متزايدة تماما .

6) لدينا : $U_{n+1} - U_n = (n+5)^2 - (n+4)^2 = 2n + 9$

و منه : $U_{n+1} - U_n > 0$ إذن : (U_n) متزايدة تماما .

(7 $U_{n+1} - U_n = 2(n+1)^2 + 5(n+1) - 1 - (2n^2 + 5n - 1)$

و منه : $U_{n+1} - U_n = 4n + 7$

و منه : $U_{n+1} - U_n > 0$ إذن : (U_n) متزايدة تماما .

المتتالية الحسابية

1- تعريف :

(U_n) متتالية عددية و r عدد حقيقي. نقول عن المتتالية (U_n) أنها متتالية حسابية ذات الأساس r إذا تحقق ما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = U_n + r$

مثال1:

متتالية الأعداد الطبيعية : $0 , 1 , 2 , 3 , 4 , , ... ,$

متتالية حسابية حدها الأول 0 وأساسها 1.

متتالية الأعداد الزوجية : $0 , 2 , 4 , 6 , 8 , ...,$

متتالية حسابية حدها الأول 0 و أساسها 2 .

متتالية الأعداد الفردية : $1 , 3 , 5 , 7 , 9 , ...,$

متتالية حسابية حدها الأول 1 و أساسها 2 .

مثال2:

* المتتالية (U_n) المعرفة بـ : $U_n = 5n - 2$

متتالية حسابية ذات الأساس 5 لأن :

$$U_{n+1} = 5 (4 + 1) - 2$$
$$= 5n + 5 - 2$$
$$= 5n - 2 + 5$$

و منه : $U_{n+1} = U_n + 5$.

* المتتالية (U_n) حيث : $U_n = -3n + 4$ متتالية حسابية ذات الأساس (-3) .

ملاحظة :

لمعرفة إذا كانت (U_n) متتالية حسابية نبرهن عادة أن الفرق $(U_{n+1} - U_n)$ ثابت أي مستقل عن n .

2- اتجاه تغيير متتالية حسابية :

مبرهنة :

(U_n) متتالية حسابية ذات الأساس r .

إذا كان $r > 0$ فإن (U_n) متزايدة تماما.

إذا كان $r < 0$ فإن (U_n) متناقصة تماما.

إذا كان $0=r$ فإن (U_n) ثابتة.

مثال :

(U_n) متتالية حيث $U_n = -3n + 4$

$$U_{n+1} - U_n = [-3(n+1)+4] - [-3n+4]$$
$$= -3n - 3 + 4 + 3n - 4$$

و منه : $U_{n+1} - U_n = -3$ إذن : (U_n) متتالية حسابية متناقصة.

3- **الحد العام :**

لتكن (U_n) متتالية حسابية ذات الأساس r . و U_0 حدها الأول

لدينا :

$$U_0 = U_0 + 0r$$
$$U_1 = U_0 + r = U_0 + 1r$$
$$U_2 = U_1 + r = U_0 + 1 . r + r = U_0 + 2r$$
$$U_3 = U_2 + r = U_0 + 2r + r = U_0 + 3r$$

الخ

مبرهنة :

إذا كانت (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 وأساسها r فإن :

$$U_n = U_0 + nr$$

في الحالة العامة :

من أجل كل عدد طبيعي m حيث $n \geq m$ فإن :

$$U_n = U_m + (n - m)r$$

مثال :

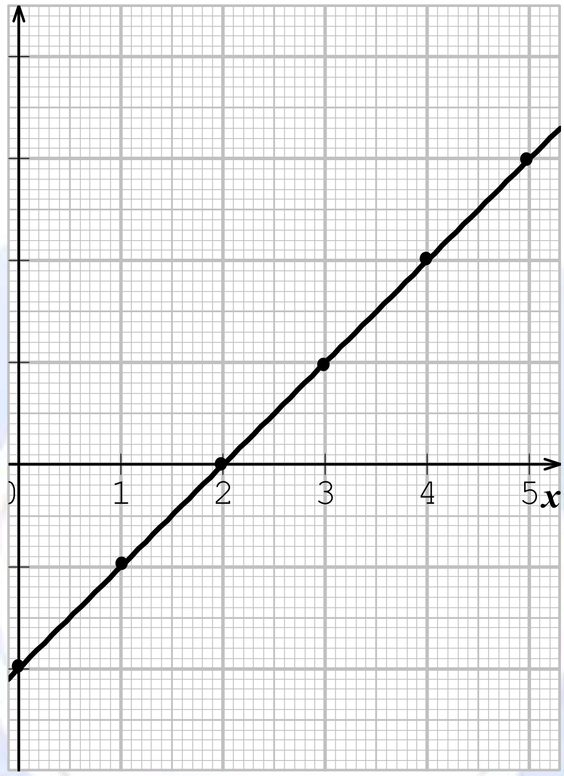
(U_n) متتالية حسابية حدها الأول 4 و أساسها $\frac{-1}{2}$

$$\left(r = \frac{-1}{2} \;;\; U_0 = 4\right) \;؛\; U_4 = U_0 + 4r = 4 - 2 = 2$$

ملاحظة :

المتتالية (U_n) حيث : $U_n = an + b$ هي متتالية حسابية حدها الأول : $U_0 = b$
وأساسها $r = a$.

التمثيل البياني للمتتالية (U_n) هي نقط المستقيم الذي معادلته :
$y = ax + b$ التي فواصلها أعداد طبيعية .



كيف يتم إيجاد الحدود الأولى لمتتالية حسابية باستعمال مجدول Excel

يمكن حساب الحدود الأولى لمتتالية حسابية بعدة طرق . إحدى الطرق البسيطة هي :

- فمثلا إذا أردنا الخمس حدود الأولى للمتتالية الحسابية ذات الحد الأول 5 و الأساس 3 .

ننقر على 5 في الخلية A_1 ثم
$(= 5 + 3)$ 8 الحد الثاني في الخلية

	A
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	20

A_2 نحجز الخانتين ، ثم نضع المؤشر أسفل الخلية A_2 في الجهة اليمنى ، ونبقى ضاغطين على الفأرة (بالزر الأيسر) ونجري عملية الزلاق إلى أسفل الحدود المتتابعة للمتتالية.

4- <u>مجموع P حدا متعاقبا</u> :

عادة ما يراد حساب مجموع حدود متعاقبة لمتتالية (U_n) نضع :

$$S = U_m + U_{m+1} + ... + U_p$$

عدد حدود هذا المجموع هو : $P - m + 1$

<u>حالة خاصة</u> :

لنحسب مجموع n حدا الأولى للأعداد الطبيعية غير المعدومة :

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + n$$

لدينا : $S = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n$ (الترتيب تصاعدي)

$S = n + (n-1) + ... + 2 + 1$ (الترتيب تنازلي)

بالجمع نجد : $2S = n(n+1)$ و منه : $S = \frac{n}{2}(n+1)$

<u>في الحالة العامة :</u>

<u>مبرهنة :</u>

مجموع P حدا متعاقبا لمتتالية حسابية (U_n) هو جداء عدد الحدود في نصف مجموع الحد الأول و الأخير.

<u>بتعبير أخر:</u> إذا كان $S = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{n-1}$ *

$$S = \frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$$

$$* \; S = U_1 + U_2 + ... + U_n$$

$$S = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$$

إذا كان : $S = U_m + U_{m+1} + ... + U_p$

$$\boxed{S = (\text{عدد الحدود}) \times \frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}}$$

أي : $$S = \frac{p - m + 1}{2}\,(U_m + U_p)$$

<u>تطبيق</u> :

(U_n) متتالية حسابية حدها الأول $U_0 = 2$ وأساسها $r = 5$

نضع : $S_n = U_3 + \ldots + U_n$ و $S_n = 6456$. جد n .

<u>حـل</u> :

المجموع S_n من الشكل : $U_m + \ldots + U_p$

حيث : $P = n$ و $m = 3$

ومنه عدد الحدود هو : $n - 3 + 1 = n - 2$

إذن : $$S_n = (n - 2) \times \frac{U_3 + U_n}{2}$$

لكن : $U_3 = U_0 + 3r$ و $U_n = U_0 + nr$

إذن : $U_3 = 17$ و $U_n = 2 + 5n$

بالتعويض نجد : $$S_n = (n - 2)\left(\frac{5n + 19}{2}\right)$$

لكن : $Sn = 6456$ ومنه : $$(n - 2)\left(\frac{5n + 19}{2}\right) = 6456$$

أي : $(n - 2)(5n + 19) = 2 \times 6456$

وعليه : $Sn^2 + 9n - 12950 = 0$ إذن : $\Delta = (509)^2$

ومنه : $n = 50$

(الحل الثاني سالب مرفوض)

<u>المتتالية الهندسية</u>

1- <u>تعريف</u> :

(U_n) متتالية عددية ؛ q عدد حقيقي. نقول عن المتتالية (U_n) أنها هندسية إذا تحقق مايلي : من أجل كل عدد طبيعي n.

$$U_{n+1} = q \cdot U_n$$

<u>مثال</u> :

- المتتالية : ... ؛ 64 ؛ 32 ؛ 16 ؛ 8 ؛ 4 ؛ 2 ؛ 1 هي متتالية

هندسية حدها الأول 1 و أساسها $q = 2$

- المتتالية (U_n) حيث $U_n = (-1)^n$ هي متتالية هندسية حدها الأول 1
و أساسها (1-) حدودها هي : ...؛ 1 ؛ 1- ؛ 1 ؛ 1- ؛ 1
- المتتالية (U_n) حيث $U_n = 2 \times 3^n$ هي متتالية هندسية أساسها

q = 3 لأن : $U_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3^n \times 3 = 3 \times U_n$

2- <u>الحد العام</u> :

(U_n) متتالية هندسية أساسها q $(q \neq 0)$

لدينا :

$$U_0 = U_0 = U_0 \, . \, q^0$$
$$U_0 = q \, . \, U_0 = q^1 \, . \, U_0$$
$$U_2 = qU_1 = q \, . \, U_0 \, . \, q^1 = U_0 q^2$$
$$U_3 = qU_2 = q \, . \, U_0 \, . \, q^2 = U_0 q^3$$

الخ

<u>مبرهنة</u> :

إذا كنت (U_n) متتالية هندسية حدها الأول U_0 وأساسها q .

فإن من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = U_0 \, . \, q^n$.

<u>مثال</u> :

(U_n) متتالية هندسية حدها الأول 3 وأساسها $\frac{1}{4}$.

إذن : $U_5 = \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times 3 = \frac{3}{1024}$

في الحالة العامة :

من أحل كل عددين طبيعيين m وَ n : $U_n = U_m \, . \, q^{n-m}$.

<u>مثال</u> 1:

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية حيث حدها الأول 8 و أساسها 1,5 .

$$(q = 1,5 \; ; \; U_1 = 8)$$

فمثلا : $U_6 = U_1 . q^5 = 8(1,5)^5 = 60,75$

مثال 2:

$(U_n)_{n\geq 3}$ متتالية هندسية حيث : $U_7 = 16$; $U_{10} = -\frac{128}{27}$ إذا كان q أساسها فإن

: $U_{10} = q^3 \times U_7$ ومنه : $q^3 = \frac{U_{10}}{U_7}$

$q^3 = \frac{-8}{27}$ ومنه : $q = \frac{-2}{3}$

من $U_7 = q^4 \times U_3$ ينتج : $U_3 = \frac{U_7}{q^4} = 81$

الحد الذي رتبته n هو : $U_n = 81 \times \left(\frac{-2}{3}\right)^{n-3}$

- مجموع p حدا متعاقبا من متتالية هندسية :

حالة خاصة :

(U_n) متتالية هندسية حدها الأول1 و أساسها 9 .

لنحسب المجموع : $S = 1 + q + q^3 + ... + q^{n-1}$

لدينا : $q . S = q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n$

$q . S = S - 1 + q^n$

أي : $(1 - q) S = 1 - q^n$

ومنه : $S = \frac{1 - q^n}{1 - q}$

نتيجة :

من أجل كل عدد طبيعي q يختلف عن 1 .

$$1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

الحالة العامة :

لنحسب مجموع P عددا متعاقبا لمتتالية هندسية حدها الأول a و أساسها q. حيث : $q \neq 1$

لدينا : $S = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1}$

$S = a\,(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1})$

و منه : $S = a \times \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

__*مبرهنة*__ :

مجموع P حدا متعاقبا من متتالية هندسية حدها الأول a وأساسها $(q \neq 1)$ يساوي :

$$a \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

__*تطبيق 1*__:

لتكن (t_n) متتالية هندسية حدها الأول $t_0 = 12$ وأساسها 10 .

a) اكتب t_n بدلالة n وأحسب الحد الثامن.

b) أحسب مجموع العشرين حدا الأولى

__*حـل*__ :

أ) من أجل كل عدد طبيعي n : $t_n = 12 \times 10^n$

الحد الثامن هو : $t_7 = 12 \times 10^7 = 120\ 000\ 000$

ب) $S = 12 \left(\dfrac{1 - 10^{20}}{1 - 10}\right) = \dfrac{12}{9}\ (10^{20} - 1)$

__*تطبيق 2*__ :

العدد b لسكان مدينة يزداد بـ 4% في كل سنة.

العدد c لسكان مدينة ثانية ينقص بـ 5% في كل سنة.

في شهر جانفي 2000 كان عدد سكان المدينتين هو : 50000 نسمة.

1) احسب عدد السكان $C_1\ ;\ b_1$ بعد سنة.

2) احسب $C_2\ ;\ b_2$ عدد السكان بعد سنتين.

3) اكتب العبارتين $C_n\ ;\ b_n$ عدد السكان بعد n سنة .

حـل :

1)
$$b_1 = 50000 + 50000 \times 0,04$$
$$= 50000 \times (1,04)$$
$$C_1 = 50000 - 50000 \times 0,05 = 50000 \times 0,95$$

2)
$$b_2 = b_1 \times 1,04 = 52000 \times (1,04) = 54080$$
$$C_2 = C_1 \times 0,95$$

3) * بالنسبة للمدينة الأولى :

لدينا : $b_{n+1} = 1,04 \times b_n$ إذن المتتالية (b_n) متتالية هندسية

حدها الأول 50000 و أساسها : 1,04 .

و منه : $b_n = 50000 \times (1,04)^n$.

* بالنسبة للمدينة الثانية :

لدينا : $C_{n+1} = 0,95 . C_n$ إذن المتتالية (C_n) متتالية هندسية

حدها الأول 50000 وأساسها $0,95$.

و منه : $C_n = 50000 \times (0,95)^n$.

تطبيقات

$\boxed{1}$ (U_n) متتالي معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام :

$$U_n = -5n + 4$$

1) برهن أن (U_n) متتالية حسابية .

2) عين أساسها .

حـل :

للبرهان على أن (U_n) متتالية حسابية يمكن حساب الفرق : $U_{n+1} - U_n$

لدينا : $U_{n+1} - U_n = - 5 (n + 1) + 4 - (-5n + 4)$

$$= -5n - 5 + 4 + 5n - 4$$

إذن : $U_{n+1} - U_n = -5$ و هذا من أجل كل عدد طبيعي n .

و بالتالي : (U_n) متتالية حسابية أساسها 5- .

$\boxed{2}$ متتالية حسابية معرفة بحدين من حدودها

$\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية حيث : $U_{15} = 49$ و $U_8 = 7$

احسب أساسها r وحدها الأول U_0

<u>حـل</u> :

لحساب r يمكن التعبير عن U_{15} و U_8 بدلالة U_0 و r

ثم حساب الفرق .

لدينا : $U_8 = U_0 + 8r = 7$ و $U_{15} = U_0 + 15r = 49$

أي: $7r = 42$ و عليه : $r = 6$.

و منه : $U_0 + 8r = 7$ و عليه : $U_0 + 48 = 7$ أي: $U_0 = -41$

إذن $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية حسابية أساسها 6 وحدها الأول 41- .

$\boxed{3}$ لتكن $\left(U_n\right)_{1\in\mathbb{N}}$ متتالية معرفة من اجل عدد طبيعي n بـ : $U_n = 3 \times 5^n$

برهن أن $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية عين أساسها

<u>حـل</u> :

للبرهان ان $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية يمكن حساب : $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

لدينا : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3 \times 5^{n+1}}{3 \times 5^n} = 5$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$U_{n+1} = 5U_n$. و عليه : $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 5 .

$\boxed{4}$ $\left(U_n\right)$ متتالية هندسية حدودها موجبة حيث :

$U_6 = 12$ و $U_4 = 3$. احسب أساسها q وحدها الأول U_0 .

<u>حـل</u> :

لحساب q يمكن التعبير عن U_6 و U_4 بدلالة U_0 و q ثم حساب حاصل القسمة .

لدينا : $U_6 = U_0 q^6 = 12$ ؛ $U_4 = U_0 q^4 = 3$

ومنه : $\frac{U_6}{U_4} = \frac{U_0q^6}{U_0q^4} = \frac{12}{3}$ ومنه : $q^2 = 4$

أي $q = 2$ أو $q = -2$ وبما أن الحدود موجبة فإن : $q = 2$.

إذن : $U_4 = U_0q^4 = 3$ أي : $U_0 \times 16 = 3$

و عليه : $U_0 = \frac{3}{16}$ و بالتالي : $U_0 = 0,1875$.

إذن : (U_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول 0,1875 .

تمـاريـن و مشكلات

التمرين 1 .

(U_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول U_0

1) $U_0 = -7$ و $r = 3$. احسب U_{10} و U_{15}

2) $U_0 = 0$ و $r = -\frac{1}{2}$. احسب U_5 و U_8

3) $U_0 = \frac{12}{5}$ و $r = -\frac{1}{5}$. احسب U_{12} و U_{17}

التمرين 2 .

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول U_1

1) $U_1 = -3$ و $r = 2$. احسب U_{10} و U_{15}

2) $U_1 = 0$ و $r = -0,3$. احسب U_5 و U_8

3) $U_1 = 3,2$ و $r = 0,5$. احسب U_{11} و U_{20}

التمرين 3 .

(U_n) متتالية عددية حيث : $U_n = (n-2)^2 + 4 - n^2$

برهن أن (U_n) متتالية حسابية معينا أساسها .

التمرين 4 .

(U_n) متتالية عددية حيث : $U_n = \dfrac{4n^2 - 16}{n+2}$

برهن أن (U_n) متتالية حسابية . عين أساسها .

التمرين 5 .

(U_n) متتالية حسابية أساسها r

أحسب r و U_0 في كل حالة :

1) $U_{14} = \dfrac{1}{3}$ ؛ $U_{15} = \dfrac{1}{4}$

2) $U_3 = 3\sqrt{2} + 1$ ؛ $U_5 = 1 + \sqrt{2}$

3) $U_{10} = -43$ ؛ $U_{20} = -112$

التمرين 6 .

(U_n) متتالية حسابية أساسها r

$U_0 = 1$ ؛ $r = 3$

أحسب $S_5 = U_0 + U_1 + ... + U_4$

أحسب $S_{20} = U_0 + U_1 + ... + U_{19}$

التمرين 7 .

(U_n) متتالية حسابية أساسها r حيث : $U_0 = -120$ ؛ $r = 8$

- احسب $S_{16} = U_0 + U_1 + ... + U_{15}$
- احسب $S_{31} = U_0 + U_1 + ... + U_{30}$

التمرين 8 .

(U_n) متتالية حسابية أساسها r حيث : $U_6 = 5$ ؛ $r = \dfrac{1}{4}$

- احسب $S = U_6 + U_7 + ... + U_{10}$
- احسب $T = U_{11} + U_{12} + U_{13} + U_{14}$

التمرين 9 .

احسب المجاميع :

1) $S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + 25$

2) $S_2 = 2 + 4 + 6 + ... + 50$

3) $S_3 = 3 + 6 + 9 + ... + 75$

التمرين 10 .

احسب :

1) $101 + 102 + ... + 125$

2) $402 + 404 + ... + 450$

3) $1013 + 1016 + ... + 1085$

التمرين 11 .

(U_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0

1) $U_0 = -1$ و $q = 3$. احسب U_5 و U_7

2) $U_0 = -80$ و $q = \frac{1}{2}$. احسب U_6 و U_8

3) $U_0 = \frac{1}{125}$ و $q = 5$. احسب U_3 و U_6

التمرين 12 .

برهن أن المتتالية (U_n) متتالية هندسية . عين أساسها q و حدها الأول U_0 في كل حالة مما يلي :

1) $U_n = 3^{n+1}$ 2) $U_n = -5^n$

3) $U_n = 3 \times 4^n$

التمرين 13 .

برهن أن المتتالية (U_n) هي متتالية هندسية في الحالتين التاليتين :

1) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $U_{n+1} - U_n = U_n$

2) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\frac{U_{n+1} - U_n}{U_n} = 0,5$

التمرين 14 .

$\left(U_n\right)$ متتالية هندسية أساسها q حيث : $U_0 = 1$ و $q = 3$

احسب $S_6 = U_0 + U_1 + ... + U_5$

احسب $S_{10} = U_0 + U_1 + ... + U_9$

التمرين 15 .

$\left(U_n\right)$ متتالية هندسية أساسها q .

$U_3 = 5$ و $q = \dfrac{1}{5}$

- احسب : $S = U_3 + U_4 + ...+ U_7$
- احسب : $Y = U_3 + U_4 + ...+ U_{11}$
- احسب : $T = U_8 + U_9 + U_{10} + U_{11}$

التمرين 16 .

1) احسب : $S_1 = 5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320$

2) احسب : $S_2 = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384$

التمرين 17 .

$\left(U_n\right)$ متتالية عددية معرفة بـ :

$U_0 = 7$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 6}{5}$

1) احسب U_1 ، U_2 ، U_3 .

2) نعتبر المتتالية $\left(V_n\right)$ المعرفة بـ :

من اجل عدد طبيعي n : $V_n = U_n - 2$

1) برهن أن $\left(V_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2) عبر عن V_n بدلالة n واستنتج أن $U_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n + 2$

التمرين 18 .

وضع شخص في صندوق التوفير مبلغا قدره DA 200000 بفائدة قدرها %7,25 في 2006/12/01 .

1) ما هو المبلغ الذي يتحصل عليه في 2007/12/01 ؟

2) نضع $U_0 = 200000$ ونرمز بـ U_n للمبلغ الذي يكسبه في /01/01 من السنة (n +2006)

و نرمز بـ U_{n+1} للمبلغ الذي سيكسبه في السنة الموالية .

أ) جد علاقة بين U_{n+1} و U_n .

استنتج أن $\left(U_n\right)$ متتالية هندسية .

يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) عبر عن u_n بدلالة n .

ج) احسب U_{12} .

الحـلـــــــول

التمرين 1 .

1) $U_{10} = U_0 + 10r = 23$ و $U_{15} = 38$

2) $U_5 = U_0 + 5r = -2,5$ و $U_8 = -4$

3) $U_{12} = U_0 + 12r = 0$ و $U_{17} = -1$

التمرين 2 .

1) $U_{10} = U_1 + 9r = 15$ و $U_{15} = 25$

2) $U_5 = U_1 + 4r = -1,2$ و $U_8 = -2,1$

3) $U_{11} = U_1 + 10r = 8,2$ و $U_{20} = 12,7$

التمرين 3 .

$U_{n+1} - U_n = -4$

إذن المتتالية (U_n) متتالية حسابية أساسية 4 -

التمرين 4 .

$$U_{n+1} - U_n = 4$$

إذن (U_n) متتالية حسابية أساسها 4

التمرين 5 .

1) $$r = U_{15} - U_{14} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{-1}{12}$$

$$U_0 = \frac{1}{4} - 15 \times \left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{3}{2}$$

2) $2r = U_5 - U_3 = -2\sqrt{2}$ ومنه : $r = -\sqrt{2}$

$$U_0 = U_3 - 3r = 6\sqrt{2} + 1$$

3) $10r = U_{20} - U_{10} = -69$

ومنه : $r = -6,9$ و $U_0 = U_{10} - 10r = 26$

التمرين 6 .

$$S_5 = 5 \times \frac{U_0 + U_4}{2} = 5 \times \frac{1+13}{2} = 35$$

$$S_{20} = 20 \times \frac{U_0 + U_{19}}{2} = 20 \times \frac{1+58}{2} = 590$$

التمرين 7 .

لدينا : $U_{15} = U_0 + 15r = -120 + 15 \times 8 = 0$

و منه : $S_{16} = 16 \times \frac{U_0 + U_{15}}{2} = 16 \times \frac{-120 + 0}{2}$

إذن : $S_{16} = -960$

$$S_{31} = 31 \times \frac{U_0 + U_{30}}{2} = 31 \times \frac{-120 + 120}{2} = 0$$

التمرين 8 .

$$S = 5 \times \frac{U_6 + U_{10}}{2} = 5 \times \frac{5+6}{2} = 27,5$$

$$T = 4 \times \frac{U_{11} + U_{14}}{2} = 4 \times \frac{6,25+7}{2} = 26,5$$

التمرين 9 .

1) $S_1 = \dfrac{25 \times 26}{2} = 325$

2) $S_2 = 2S_1 = 650$

3) $S_3 = 3S_1 = 975$

التمرين 10 .

1) $25 \times \dfrac{110 + 125}{2} = 2825$

2) $25 \times \dfrac{402 + 450}{2} = 10650$

3) $25 \times \dfrac{1013 + 1085}{2} = 26225$

التمرين 11 .

1) $U_5 = U_0 \times q^5 = -243$

$U_7 = U_0 \times q^7 = -2187$

2) $U_6 = U_0 \times q^6 = 1,25$

$U_8 = U_0 \times q^8 = 0,3125$

3) $U_3 = U_0 \times q^3 = 1$

$U_6 = U_0 \times q^6 = 125$

التمرين 12 .

1) لدينا : $U_{n+1} = 3^{n+2} = 3U_n$

إذن (U_n) متتالية هندسية أساسها 3 و حدها الأول : $U_0 = 3$.

2) لدينا : $U_{n+1} = -5^{n+1} = 5U_n$

إذن $\left(U_n\right)$ متتالية هندسية أساسها 5 و حدها الأول : $U_0 = -1$.

3) لدينا : $U_{n+1} = 3 \times 4^{n+1} = 4U_n$

إذن $\left(U_n\right)$ متتالية هندسية أساسها 4 و حدها الأول : $U_0 = 3$.

التمرين 13 .

1) من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 2U_n$

إذن $\left(U_n\right)$ متتالية هندسية أساسها 2 .

2) لدينا : $U_{n+1} = 1,5\,U_n$

إذن متتالية هندسية أساسها 1,5 .

التمرين 14 .

$$S_6 = 1 \times \frac{1 - 3^6}{1 - 3} = 364$$

$$S_{10} = 1 \times \frac{1 - 3^{10}}{1 - 3} = 29524$$

التمرين 15 .

1) لدينا :

$$S = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^5}{1 - \frac{1}{5}} = 6,248$$

$$Y = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^9}{1 - \frac{1}{5}} = 6,2499968$$

$$T = Y - S = 0,0019968$$

التمرين 16 .

1) $$S_1 = 5 \times \frac{1 - 2^7}{1 - 2} = 635$$

2) $$S_2 = 3 \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 765$$

التمرين 17 .

1) $U_1 = 4 \quad ; \quad U_2 = 2,8 \quad ; \quad U_3 = 2,32$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 2 = \frac{2U_n - 4}{5}$$

$$= \frac{2}{5}\left(U_n - 2\right) = \frac{2}{5}V_n$$

إذن $\left(V_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ و حدها الأول عدد طبيعي

$$V_0 = U_0 - 2 = 5$$

من أجل عدد طبيعي n لدينا : $V_n = 5 . \left(\frac{2}{5}\right)^n$

ومنه $U_n = 5 . \left(\frac{2}{5}\right)^n + 2$

التمرين 18 .

1- لدينا : $2000\ 000 \times 1,0725 = 214500$

في 1996/01/01 سيكسب مبلغا قدره 214500 DA

2- أ) لدينا : $U_{n+1} = 1,0725 \times U_n$

إذن $\left(U_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $1,0725$

و حدها الأول $U_0 = 200\ 000$

ب) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$U_n = 200\ 000 \times 1,0725^n$$

ج) $U_{12} = 200\ 000 \times 1,0725^{12}$ ومنه: $U_{12} \simeq 463231$

المتتاليات المتقاربة ـ المتباعدة

1- *نهاية المتتالية العددية* :

<u>تعريف</u> : نقول عن متتالية عددية أنها متقاربة نحو العدد الحقيقي l إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة .

نقول أيضا أن نهاية المتتالية هو العدد الحقيقي l ونكتب :

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = l$$

<u>مبرهنات</u> :

1) إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإن نهايتها وحيدة .

2) المتتاليات المعرفة كما يلي : $t_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; $u_n = \frac{1}{n}$; $v_n = \frac{1}{n^2}$

هي متتاليات متقاربة نحو 0 .

3) كل متتالية هندسية ذات الأساس q حيث $|q| < 1$ متقاربة نحو 0 .

4) كل متتالية ثابتة متقاربة .

<u>عمليات على النهايات</u> :

(u_n) متتالية متقاربة نحو l ؛ (v_n) متتالية متقاربة نحو l' .

- المتتالية (w_n) حيث : $w_n = u_n + v_n$ متقاربة نحو $l + l'$

- المتتالية (S_n) المعرفة بـ : $S_n = u_n \times v_n$ متقاربة نحو $l \times l'$

- المتتالية $(k \times u_n)$ متقاربة نحو $k \times l$ حيث : $k \in \mathbb{R}$.

- بالإضافة إذا كان $l' \neq 0$ فإن المتتالية (t_n) حيث : $t_n = \frac{u_n}{v_n}$

متقاربة نحو $\frac{l}{l'}$.

***<u>مثال1</u>* :**

المتتالية المعرفة بـ : $u_n = \frac{n+1}{n^2}$ متقاربة نحو 0

لأن : $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

مثال2 :

المتتالية المعرفة بـ : $u_n = 2 - \frac{3}{n} + \frac{4}{\sqrt{n}}$ متقاربة نحو 2

لأن : $\lim_{n\to\infty} \frac{-3}{n} = 0$; $\lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} = 0$

2- المتتاليات المعرفة بـ : $u_n = f(n)$

مبرهنة :

f دالة معرفة على المجال $[a ; +\infty[$

(u_n) متتالية معرفة بـ : $u_n = f(n)$; $n \geq a$

إذا كانت للدالة f نهاية l عند $+\infty$ فإن للمتتالية (u_n) نهاية l

عند $+\infty$.

مثال :

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام : $u_n = \frac{2n+3}{n+5}$.

يمكن تعريف (u_n) بـ : $u_n = f(n)$ حيث : f هي الدالة الناطقة

المعرفة بـ : $x \mapsto \frac{2x+3}{x+5}$

و بما أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

3- النهاية غير المنتهية لمتتالية :

تعريف :

- القول عن متتالية أن نهايتها غير منتهية $(+\infty)$ يعني أن كل مجال من الشكل $]a ; +\infty[$ يشمل كل حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة لـ n ونكتب : $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

- القول عن متتالية أن نهايتها غير منتهية $(-\infty)$ يعني أن كل مجال من الشكل $]-\infty\ ;\ a]$ يشمل كل حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة لـ n ونكتب : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

مثال :

المتتالية المعرفة بـ : $u_n = n^2$ لها نهاية غير منتهية .

(*) 4- ***حصر متتالية*** : (الحد الأعلى – الحد الأدنى)

نعتبر $(w_n)\ ;\ (v_n)\ ;\ (u_n)$ متتاليات عددية .

إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من عدد طبيعي n_0 : $w_n \le u_n \le v_n$ وكانت المتتاليتان (v_n) وَ (w_n) متقاربتان نحو l فإن المتتالية (u_n) متقاربة نحو l.

مثال :

نعتبر : $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2n}$

لدينا : $1 \le (-1)^n \le -1$ (من أجل كل عدد طبيعي n)

ومنه : $n+1 \le n+(-1)^n \le n-1$

و بالتالي : $\dfrac{n+1}{2n} \le \dfrac{n+(-1)^n}{2n} \le \dfrac{n-1}{2n}$

أي : $\dfrac{n+1}{2n} \le u_n \le \dfrac{n-1}{2n}$

ولدينا : $\dfrac{1}{2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{2n}$ و $\dfrac{1}{2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2n}$

إذن : $\dfrac{1}{2} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

مبرهنة :

$(v_n)\ ;\ (u_n)$ متتاليتان عدديتان . إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من عدد طبيعي n_0 : $u_n \le v_n$

وكانت : $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

و إذا كانت : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

5- <u>***نهاية متتالية هندسية***</u> :

(u_n) متتالية هندسية حيث : $u_n = u_0 . q^n$

- إذا كان : $-1 < q < 1$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

- إذا كان : $q = 1$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0$

- إذا كان : $q > 1$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

- إذا كان : $q \leq -1$ فإن المتتالية ليست لها نهاية .

تمـاريـن و مشكلات

التمرين 1 .

(u_n) متتالية معرفة بـ : $u_n = 3 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n$

1) برهن أن (u_n) متقاربة . ما هي نهايتها ؟

2) (d_n) متتالية معرف بـ : $d_n = u_n - u_{n-1}$

- احسب $d_1 \; ; \; d_2$ ثم برهن أن (d_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها .

- برهن أنها متقاربة. ماهي نهايتها ؟

التمرين 2 .

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_n = f(n)$.

حيث من أجل كل عدد حقيقي x نضع : $f(x) = \frac{x+1}{5x-1}$

1) ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين 3 .

نعتبر المتتاليات $(w_n)_{n\geq1}$; $(v_n)_{n\geq1}$; $(u_n)_{n\geq1}$

المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ :

$$u_n = \frac{1}{n} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{n+1} \quad ; \quad w_n = u_n \times v_n$$

1) احسب الحدود الأربعة الأولى لكل متتالية .

2) برهن أن هذه المتتاليات متقاربة و حدد نهايتها.

(*) **التمرين 4** .

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = \frac{3n - 2}{2n + 1}$

1- عبر عن $u_{n+1} - u_n$ بدلالة n ثم عين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2- عبر عن $u_n - \frac{3}{2}$ بدلالة n.

3- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

4- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2} - \frac{7}{2(2n+1)}$

ب) برهن أن (u_n) متتالية متقاربة .

5- مثل بيانيا (u_n) في معلم متعامد متجانس .

(*) **التمرين 5** .

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 حيث $u_0 = 1$ وأساسها $\frac{1}{2}$

لتكن (s_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$$

1- احسب : $u_1 \;;\; u_2 \;;\; u_3 \;;\; u_4 \;;\; u_5$

ثم : $s_1 \;;\; s_2 \;;\; s_3 \;;\; s_4 \;;\; s_5$

2- أ) عبر عن $s_n - s_{n+1}$ بدلالة n .

ب) عين اتجاه تغير المتتالية (s_n).

3- أ) عبر عن s_n ثم $2 - s_n$ بدلالة n

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq s_n \leq 2$

4- عين نهاية المتتالية (s_n).

التمرين 6 .

أعط الأجوبة الصحيحة و الخاطئة في كل مما يلي :

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$u_n = \frac{4+3n}{1+n}$$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$ ؛ 2) (u_n) متقاربة

3) (u_n) متزايدة ؛ 4) (u_n) متناقصة

التمرين 7 .

أعط الأجوبة الصحيحة و الخاطئة في كل مما يلي :

(u_n)متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$u_n = 2n + 1 - \frac{4}{3n+5}$$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ ؛ 2) (u_n)متقاربة .

3) (u_n) متزايدة ؛ 4) (u_n) متباعدة

التمرين 8 .

أعط الأجوبة الصحيحة و الخاطئة في كل مما يلي :

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ بـ : $f(x) = x + \frac{3x-1}{2x-1}$

و(u_n) متتالية معرفة بـ : $u_n = f(n)$.

1) f متناقصة على $\left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right[$ ؛ 2) (u_n) متناقصة .

3) (u_n) متقاربة ؛ 4) (u_n) متزايدة .

الحـلـــــول

التمرين 1 .

1) المتتالية $v_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية متقاربة نحو 0

لأن أساسها $|q| < 1$.

ومنه المتتالية (u_n) متقاربة. ونهايتها هي 3

2) $u_0 = 4$, $u_1 = \frac{5}{2}$, $u_2 = \frac{13}{4}$

$$d_1 = u_1 - u_0 = \frac{5}{2} - 4 = \frac{-3}{2}$$

$$d_2 = u_2 - u_1 = \frac{13}{4} - \frac{5}{2} = \frac{3}{4}$$

$$d_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = \frac{-3}{2} \times \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$$

إذن : (d_n) متتالية هندسية حدها الأول $d_1 = \frac{-3}{2}$ وأساسها $\frac{-1}{2}$.

فهي متقاربة ونهايتها 0 .

التمرين 2 .

1) إذا كان : $x \neq 0$ فإن : $f(x) = \dfrac{1 + \dfrac{1}{x}}{5\left(1 - \dfrac{1}{5x}\right)}$.

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{5x} = 0$

ومنه : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{5}$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{5}$

التمرين 3 .

1) حساب الحدود الأربعة الأولى :

$$u_1 = 1 \quad ; \quad u_2 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_3 = \frac{1}{3} \quad ; \quad u_4 = \frac{1}{4}$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad v_2 = \frac{1}{3} \quad ; \quad v_3 = \frac{1}{4} \quad ; \quad v_4 = \frac{1}{5}$$

$$w_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad w_2 = \frac{1}{6} \quad ; \quad w_3 = \frac{1}{12} \quad ; \quad w_4 = \frac{1}{20}$$

2) لدينا : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$

إذن : المتتاليات الثلاثة متقاربة نحو 0 .

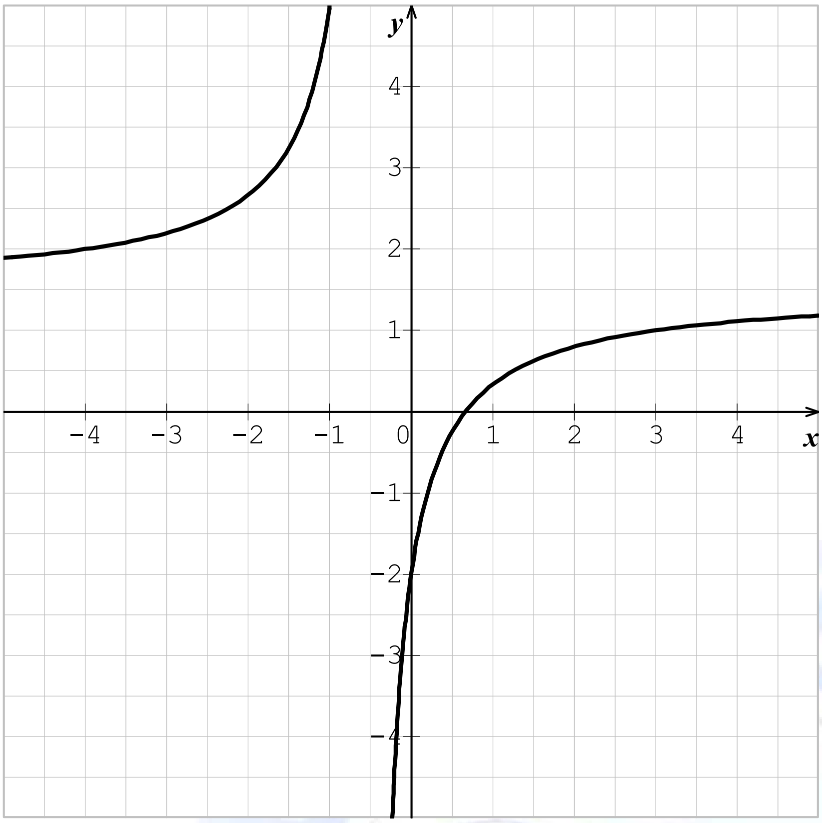
التمرين 4 .

1) لدينا : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3n+1}{2n+3} - \dfrac{3n-2}{2n+1}$

$$= \frac{7}{(2n+3)(2n+1)}$$

و منه : $u_{n+1} - u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي n

و بالتالي : (u_n) متزايدة .



2) لدينا :

$$\frac{3}{2} = \frac{-7}{(2n+1)\times 2}$$

3) من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_n \geq u_0$ (من التزايد)

و عليه : $u_n \geq -2$.

و مما سبق

$$u_n - \frac{3}{2} \leq 0$$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$-2 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$$:

4) – أ) لدينا : $u_n - \frac{3}{2} = \frac{-7}{(2n+1)\times 2}$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2} - \frac{7}{2(2n+1)}$

ب) لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{2(2n+1)} = 0$

ومنه: (u_n) متقاربة نحو $\frac{3}{2}$.

5) رسم المنحنى :

التمرين 5 .

1) الحساب :

$$u_1 = \frac{1}{2} \;;\; u_2 = \frac{1}{4} \;;\; u_3 = \frac{1}{8} \;;\; u_4 = \frac{1}{16} \;;\; u_5 = \frac{1}{32}$$

$$s_1 = \frac{3}{2} \;;\; s_2 = \frac{7}{4} \;;\; s_3 = \frac{15}{8} \;;\; s_4 = \frac{31}{16} \;;\; s_5 = \frac{63}{32}$$

2) – أ) $s_{n+1} - s_n = u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

ب) (s_n) متـزايدة

3) – أ) لدينا : $S_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و منه : $S_n - 2 = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ب) (s_n) متـزايدة و $S_0 = 1$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n \geq 1$

من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n - 2 \leq 0$

ومنه : من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq S_n \leq 2$

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2$.

التمرين 6 . 1) خاطئ ؛ 2) صحيح ؛ 3) خاطئ ؛ 4) صحيح

التمرين 7 . 1) صحيح ؛ 2) خاطئ ؛ 3) صحيح ؛ 4) صحيح

التمرين 8 . 1) صحيح ؛ 2) خاطئ ؛ 3) خاطئ ؛ 4) صحيح