الاحتمـ ـالات

الكفاءة المرحلية :

الربط بين معطيات تجربة عشوائية ونموذجها الاحتمالي.

إدراك مفهوم الاحتمال وممارسة الحساب الاحتمالي على فضاء احتمال منته

حساب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري

تصميم الدرس

- تعاريف
- تمارين
- الحلول

تعاريف

1 - التجربة العشوائية :

- هي كل تجربة لا نعرف نتائجها .
- نتائج التجربة تسمى إمكانيات الحدوث ؛ أي كل نتيجة تسمى إمكانية حدوث.
- الفضاء لتجربة عشوائية هو مجموعة كل إمكانيات الحدوث .
- الحادثة أو الحادث هو كل جزء من الفضاء .
- نقول عن حادثة A أنها وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي إمكانية منA .
- الحادثة البسيطة هي كل حادثة مكونة من إمكانية وحيدة.

مثال :

زهرة نرد غير مزيفة أي متوازنة ، أوجهها مرقمة من 1 إلى 6 .

نقذف النرد نحو الأعلى ونراقب الوجه العلوي الذي يظهر عند السقوط هذه التجربة تسمى تجربة عشوائية لأننا لا نعرف نتائج التجربة مسبقا .

كل من الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 التي تعبر عن أوجه النرد تسمى إمكانية حدوث لأنه عند رمي النرد يمكن أن نرى أحد هذه الأوجه.

وعليه مجموعة كل الإمكانيات هي : $E = \{1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6\}$

و هذه المجموعة نسميها الفضاء المرفق بالتجربة العشوائية .

* الجزء $\{2 ، 6\}$ يسمى حادثة .

فإذا رأينا 2 نقول أن الحادثة $\{2 ، 6\}$ وقعت وكذلك بالنسبة إلى 6 .

* $\{2\}$ هي حادثة بسيطة .

و في هذه التجربة هناك 6 حوادث بسيطة هي :

$$\{1\} ، \{2\} \quad \{3\} \quad \{4\} \quad \{5\} ، \{6\} .$$

2 - قانون الاحتمال :

ليكن الفضاء : $E = \{x_1 , x_2 , \ldots , x_n\}$

نرفق بكل عنصر x_i من E العدد الحقيقي P_i بحيث :

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1$$

وعليه نكون قد عرفنا قانون الاحتمال على الفضاء E كما هو مبين في الجدول الآتي :

x_1	x_2	. . .	x_n
P_1	P_2	. . .	P_n

هذا الجدول يسمى قانون الاحتمال .

إذا كان : $p_1 = p_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = p_n = \alpha$

فإن : $n\,\alpha = 1$ وعليه : $\alpha = \frac{1}{n}$

وبالتالي : $p_1 = p_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = p_n = \frac{1}{n}$

مثال :

في المثال السابق بما أن الحوادث الأولية لها نفس الحظوظ في الظهور فإن:

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

ويكون قانون الاحتمال كما يلي :

x_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3 - احتمال حادث :

E فضاء حيث : $E = \{x_1 , x_2, \ldots , x_n\}$

قانون الاحتمال هو :

x_1	x_2	. . .	x_n
P_1	P_2	. . .	P_n

الاحتمال المرفق بقانون الاحتمال هو التطبيق P الذي يرفق بكل حادثة A محتواة في E ، العدد الحقيقي $P(A)$ المعرف كما يلي :

1) $P(\phi) = 0$

2) $P(A)$ هو مجموع الأعداد الحقيقية P_i المرفقة بكل الإمكانيات x_i التي تنتمي إلى A .
يسمى احتمال الحادثة A .

مثال :

في المثال السابق : $P(\phi) = 0$

أي احتمال عدم ظهور أي وجه أو ظهور وجه آخر غير الوجوه

الستة هو 0 .

أما احتمال ظهور رقم مضاعف 3 مثلا فهو :

$$P(\{3 ، 6\}) = P(\{3\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

خواص :

1) $P(E)=1$ لأن : $P(E) = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1$

2) من أجل كل حادثة A لدينا : $0 \leq P(A) \leq 1$

3) إذا كانت الحادثة A مكونة من k إمكانية لها نفس الحدوث

فإن : $p(A) = \frac{k}{n}$

وبصفة عامة نكتب :

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لحدوث A}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

مثال :

- في المثال السابق : $P(E) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$
- وكل الاحتمالات محصورة بين 0 و 1 .
- احتمال الحصول على رقم أكبر من 2 مثلا هو احتمال الحصول

على الحادثة : $A = \{3 ، 4 ، 5 ، 6\}$ حيث : $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

مصطلحات ونتائج : A وB حادثتان.

1) الحادثة : $A \cup B$ هي الحادثة المكونة من جميع الإمكانيات التي تنتمي إلى A أو إلى B وتقرأ A أو B .

2) الحادثة : $A \cap B$ هي الحادثة المكونة من جميع الإمكانيات التي تنتمي إلى A و إلى B وتقرأ A وB .

3) إذا كان : $A \cap B = \phi$ نقول أن الحادثتين غير متلائمتين .

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

وإذا كان $A \cap B = \phi$ أي A وB غير متلائمتين فان :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

5) $\overline{A}$ هي متممة A في E و نسمي $\overline{A}$ الحادثة العكسية للحادثة A

حيث : $A \cup \overline{A} = E$.

6) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ لأن : $A \cup \overline{A} = E$

مثال :

في المثال السابق نعتبر الحادثتين :

* A : " ظهور رقم أكبر من 3 " .

* B : " ظهور رقم أولى " .

* $A \cup B$: " هي حادثة ظهور رقم أكبر من 3 أو أولى " .

* $A \cap B$: " هي حادثة ظهور رقم أكبر من 3 و أولى " .

* $\overline{A}$: " هي حادثة ظهور رقم أصغر من أو يساوي 3 " .

لتكن الحادثة C : " ظهور رقم أصغر من 3 " .

- لدينا : $A = \{4 ، 5 ، 6\}$ ، $C = \{1 ، 2\}$

نلاحظ أن الحادثتان A و C غير متلائمتين لأن : $A \cap C = \Phi$

و عليه : $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$

أي : $P(A \cup C) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

- لدينا : $A = \{4 ، 5 ، 6\}$ ، $B = \{2 ، 3 ، 5\}$ ، $A \cap B = \{5\}$

و منه : $A \cap B \neq \Phi$

و بالتالي : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

أي : $P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

- لدينا :

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

4 - المتغير العشوائي :

ليكن : $E = \{x_1 , x_2 , \ldots , x_n\}$

نسمي متغيرا عشوائيا كل دالة معرفة على E .

لتكن $\{t_1 , t_2 , \ldots , t_k\}$ مجموعة صور عناصر E بالدالة T

حيث $(k \leq n)$.

نرمز بـ $(T = t_i)$ للحادثة المكونة من الإمكانيات التي صورتها t_i

و هذا من أجل $1 \leq i \leq k$ فيكون قانون الاحتمال كما **يلي:**

القيم	t_1	t_2	...	t_k
الاحتمال	$P(T = t_1)$	$P(T = t_2)$	...	$P(T = t_k)$

مثال :

يحتوي كيس على 5 كرات مرقمة من 1 إلى 5 . نسحب في آن واحد كريتان ونفرض أن جميع السحبات متساوية الاحتمال .

ليكن T المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين الناتجين.

ما هي قيم المتغير العشوائي ؟

الحل :

السحبات الممكنة هي :

$$\{1;2\} , \{1;3\} , \{1;4\} , \{1;5\} , \{2;3\}$$
$$\{2;4\} , \{2;5\} , \{3;4\} , \{3;5\} , \{4;5\}$$

وعددها 10 .

وعليه عند سحب قريصتين يكون مجموع الرقمين هو أحد هذه

الأعداد : 9 ، 8 ، 7 ، 6 ، 5 ، 4 ، 3 . و منه مجموعة قيم المتغير العشوائي هي :

$$\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$P(T=3)=\frac{1}{10} \quad ; \quad P(T=4)=\frac{1}{10}$$

$$P(T=5)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5} \quad ; \quad P(T=6)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$P(T=7)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5} \quad ; \quad P(T=8)=\frac{1}{10}$$

$$P(T=9)=\frac{1}{10}$$

ويكون قانون الاحتمال كما يلي :

قيم T	3	4	5	6	7	8	9
P_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

5 - الأمل الرياضي :

بوضع : $P(T=t_i)=P_i$ نجد الأمل الرياضي .

الأمل الرياضي هو العدد الحقيقي μ المعرف كما يلي :

$$\mu = t_1 \cdot p_1 + t_2 \cdot p_2 + \ldots + t_k \cdot p_k$$

مثال :

في المثال السابق :

$$\mu = 3\times\frac{1}{10}+4\times\frac{1}{10}+5\times\frac{2}{10}+6\times\frac{2}{10}$$

$$+7\times\frac{2}{10}+8\times\frac{1}{10}+9\times\frac{1}{10}$$

و منه : $\mu=\frac{60}{10}$ أي : $\mu=6$.

6 - التباين :

$$V = p_1 \times (t_1 - \mu)^2 + p_2 \times (t_2 - \mu)^2 + \ldots + p_k \times (t_k - \mu)^2$$

مثال :

في المثال السابق :

$$V = \frac{1}{10}(3-6)^2 + \frac{1}{10}(4-6)^2 + \frac{2}{10}(5-6)^2 + \frac{2}{10}(6-6)^2 + \frac{2}{10}(7-6)^2 + \frac{1}{10}(8-6)^2 + \frac{1}{10}(9-6)^2$$

$$V = \frac{9+4+2+0+2+4+9}{10} \quad \text{أي :} \quad V = \frac{30}{10}$$

ومنه : $V = 3$

7 - الانحراف المعياري :

يعطى بالعبارة : $\sigma = \sqrt{V}$ حيث V هو التباين .

مثال :

في المثال السابق لدينا : $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{3}$

ومنه : $\sigma \approx 1,73$

تمـارين و مشكلات

التمرين 1 .

زهرة نرد مزورة أوجهها مرقمة من 1 إلى 6 .

نقذف النرد نحو الأعلى مرة واحدة ونراقب الوجه العلوي الذي يظهر عند سقوطها .

احتمالات الأوجه متناسبة مع الأرقام التي تحملها .

1- ما هو الفضاء المرفق بهذه التجربة العشوائية ؟

2- اكتب قانون الاحتمال الموافق للتجربة ؟

3- احسب احتمال ظهور وجه يحمل رقما زوجيا ؟

4- احسب احتمال ظهور وجه يحمل رقما فرديا ؟

5- احسب احتمال ظهور وجه يحمل رقما أوليا ؟

التمرين 2 .

زهرة نرد مزورة أوجهها مرقمة من 1 إلى 6.

نقذف النرد نحو الأعلى مرة واحدة و نراقب الوجه العلوي الذي يظهر عند سقوطها .

نفرض أن احتمالات الأوجه الزوجية متساوية وأن احتمالات الأوجه الفردية متساوية و أن احتمال ظهور وجه زوجي نصف احتمال ظهور وجه فردي .

- اكتب قانون الاحتمال لهذه التجربة .

التمرين 3 .

إليك قانون الاحتمال الآتي :

x_i	-6	-5	-4	4	5	8
p_i	0,1	0,2	0,05	0,4	0,05	0,2

1- احسب الأمل الرياضي ؟

2- احسب التباين و الانحراف المعياري ؟

التمرين 4 .

قطعة نقدية تحمل الحرف P في وجه و الحرف F في الوجه الآخر . نقذف القطعة نحوى الأعلى و نراقب الوجه الأعلى

احتمال ظهور الحرف P ثلاث أضعاف احتمال ظهور الحرف F .

- اكتب قانون الاحتمال .

التمرين 5 .

زهرتين متوازنتين . أوجه كل منها مرقمة من 1 إلى 6 .
الزهرتين ملونتين بلونين مختلفين هما الأحمر والأخضر .
نقذف الزهرتين في آن واحد نحو الأعلى ونراقب الوجهين العلويين الظاهرين.

- عين الفضاء المرفق بالتجربة .
- عين قانون الاحتمال .
- احسب احتمال الحصول على رقمين متساويين .
- احسب احتمال أن يكون الرقم الأخضر أصغر تماما من الرقم الأحمر.

التمرين 6 .

يحتوي وعاء على 5 قريصات مرقمة من 1 إلى 5 . لا نفرق بينها عند اللمس . نسحب في آن واحد قريصتين .

- ما هو احتمال سحب قريصتين تحملان رقمين فرديين ؟
- ما هو احتمال سحب قريصتين تحملان رقمين متتابعين ؟
- ما هو احتمال سحب قريصتين تحملان رقمين مجموعهما 6 ؟

التمرين 7 .

A وB حادثتين و p احتمال حيث :

$P(A) = 0,05$ و $p(B) = 0,7$ و $\mathbf{p(A \cup B) = 0,6}$

احسب الاحتمال : $\mathbf{p(A \cap B)}$.

التمرين 8 .

ليكن الفضاء E المتعلق بتجربة حيث : $\mathbf{E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}}$

ولنعرف قانون الاحتمال كما يلي :

1	2	3	4
$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$

احسب : $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$, $\mathbf{p_4}$ علما أنها تشكل حدود متتابعة من متتالية حسابية و أن أملها الرياضي يساوي 3 .

التمرين 9 .

يحتوي وعاء على 6 قريصات لا نفرق بينها عند اللمس .

كل منها مرقمة بعدد أولي ينتمي إلى مجموعة الأعداد الأولية الستة الأولى . نسحب من الوعاء قريصتان في آن واحد و عشوائيا .

ليكن S المتغير العشوائي الذي يأخذ مجموع الرقمين اللذان تحملهما القريصتان المسحوبتان .

- عين قيم المتغير العشوائي .
- اكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي .
- احسب الأمل الرياضي .
- احسب التباين و الانحراف المعياري .

التمرين 10 .

لتكوين لجنة في أحد الأحياء تقدم 7 أشخاص منهم 4 رجال و3 نساء ليختار منهم شخصين .

ليكن S المتغير العشوائي الذي يأخذ عدد النساء الذي يختار في اللجنة .

1- ما هي قيم S ؟

2- اكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي .

3- احسب الأمل الرياضي .

4- احسب التباين و الانحراف المعياري.

الحلـول

التمرين 1 .

1- الفضاء هو $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

2- قانون الاحتمال :

لتكن $P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 , P_6$ احتمالات الأوجه 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 على الترتيب

ولدينا : $\frac{P_1}{1} = \frac{P_2}{2} = \frac{P_3}{3} = \frac{P_4}{4} = \frac{P_5}{5} = \frac{P_6}{6}$

وعليه : $P_2 = 2P_1 \; ; P_3 = 3P_1 \; ; P_4 = 4P_1 \; ; P_5 = 5P_1 \; ; P_6 = 6P_1$

ولدينا : $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$

ومنه : $P_1 + 2P_1 + 3P_1 + 4P_1 + 5P_1 + 6P_1 = 1$

إذن : $21P_1 = 1$ ومنه : $P_1 = \frac{1}{21}$

وعليه : $P_2 = \frac{2}{21} \; ; \; p_3 = \frac{3}{21} \; ; \; P_4 = \frac{4}{21} \; ; \; P_5 = \frac{5}{21} \; ; \; P_6 = \frac{6}{21}$

وبالتالي يكون قانون الاحتمال كما يلي :

الأوجه	1	2	3	4	5	6
الاحتمالات	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

3- احتمال ظهور وجه يحمل رقما زوجيا :

$$P(A) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

4- احتمال ظهور وجه يحمل رقما فرديا :

$$P(B) = \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

5- احتمال ظهور وجه يحمل رقما أوليا :

$$P(C) = \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{10}{21}$$

التمرين 2 .

قانون الاحتمال :

لتكن : $P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 , P_6$ احتمالات الأوجه 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 على الترتيب .

لدينا : $P_2 = P_4 = P_6 = L$ ولدينا : $p_1 = p_3 = p_5 = M$

ولدينا : $L = \frac{1}{2}M$ و بما أن : $P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6 = 1$

فإن : $M + L + M + L + M + L = 1$

أي : $3M + 3L = 1$ لكن : $L = \frac{1}{2}M$

ومنه : $3M+ \frac{3}{2}M = 1$ إذن : $\frac{9M}{2} = 1$ أي : $M = \frac{2}{9}$

وعليه : $L = \frac{1}{2} \times \frac{2}{9}$ أي : $L = \frac{1}{9}$.

فيكون قانون الاحتمال كما يلي :

الأوجه	1	2	3	4	5	6
الاحتمالات	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

التمرين 3 .

1) الأمل الرياضي :

$$M = -6\,(0,1) - 5\,(0,2) - 4\,(0,05) + 4\,(0,4) + 5\,(0,05) + 8\,(0,2)$$

$$M = - 0,6 – 1 – 0,2 + 1,6 + 0,25 + 1,6$$

$$M = - 1,8 + 3,45 = 1,65$$

2) التباين :

$$V = 0{,}1\,(-6-1{,}65)^2 + 0{,}2\,(-5-1{,}65)^2 + 0{,}05\,(-4-1{,}65)^2$$
$$+ 0{,}4\,(4-1{,}65)^2 + 0{,}05\,(5-1{,}65)^2 + 0{,}2\,(8-1{,}65)^2$$

$V = 5{,}85225 + 8{,}8445 + 1{,}596125 + 5{,}329$
$+ 1{,}081125 + 11{,}7045 = 34{,}4075$

الانحراف المعياري : $S = \sqrt{v} \approx 5{,}87$

التمرين 4 .

قانون الاحتمال : الفضاء هو : $E = \{P , F\}$

ولدينا : $P(p) + P(F) = 1$ لكن : $P(p) = 3\,p(F)$

ومنه : $3P(F) + P(F) = 1$ أي : $4\,P(F) = 1$

ومنه : $p(F) = \frac{1}{4}$ وبالتالي : $P(p) = \frac{3}{4}$

ويصبح قانون الاحتمال كما يلي :

الوجه	P	F
الاحتمال	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

التمرين 5 .

1) الفضاء E هو مجموعة الثنائيات المرتبة $(a\,;\,b)$ حيث :

$$1 \le a \le 6 \quad و \quad 1 \le b \le 6$$

وهي موضحة في الجدول الآتي :

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1 ; 6)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)
4	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)	(4 ; 5)	(4 ; 6)
5	(5 ; 1)	(5 ; 2)	(5 ; 3)	(5 ; 4)	(5 ; 5)	(5 ; 6)
6	(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 3)	(6 ; 4)	(6 ; 5)	(6 ; 6)

وعليه عدد إمكانيات الحدوث هو 36 .

واحتمال كل ثنائية $(a\,;\,b)$ هو $\frac{1}{36}$.

- لتكن A الحادثة المعرفة بكون الرقمين متساويين :

$$A = \{(1 ; 1) , (2 ; 2) , (3 ; 3) , (4 ; 4) , (5 ; 5) , (6 ; 6)\}$$

ومنه : $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

- لتكن B الحادثة المعرفة بكون الرقم الأخضر أصغر من الرقم الأحمر.

$$B = \{ (2 ; 1) , (3 ; 1) , (3 ; 2) , (4 ; 1) , (4 ; 2) , (4 ; 3) , (5 ; 1) , (5 ; 2) , (5 ; 3) , (5 ; 4) , (6 ; 1) , (6 ; 2) , (6 ; 3) , (6 ; 4) , (6 ; 5)\}$$

وعليه : $P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

التمرين 6 .

الحالات الممكنة لسحب قريصتين هي :

$$\{1 ; 2\} , \{1 ; 3\} , \{1 ; 4\} , \{1 ; 5\} , \{2 ; 3\} , \{2 ; 4\} \{2 ; 5\} , \{3 ; 4\} , \{3 ; 5\} , \{4 ; 5\} .$$

وعليه عدد الحالات الممكنة هو 10 .

1) لتكن A الحادثة المعرفة بكون الرقمين فرديين :

$$A = \{\{1 ; 3\} , \{1 ; 5\} , \{3 ; 5\}\}$$

وعليه : $P(A) = \frac{3}{10}$

2) لتكن B الحادثة المعرفة بكون الرقمين متتابعين :

$$B = \{\{1 ; 2\} , \{2 ; 3\} , \{3 ; 4\} , \{4 ; 5\}\}$$

وعليه : $P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

3) لتكن C الحادثة المعرفة بمجموع الرقمين يساوي 6 :

$$C = \{\{1 ; 5\} , \{2 ; 4\}\}$$

وعليه : $P(C) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

التمرين 7 .

حساب : $P(A \cap B)$:

لدينا : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ومنه : $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

إذن : $P(A \cap B) = 0,05 + 0,7 - 0,6$

$P(A \cap B) = 0,15$

التمرين 8 .

حساب P_1 , P_2 , P_3 , P_4 :

لدينا : $P_4 = P_1 + 3r$; $P_3 = P_1 + 2r$; $P_2 = P_1 + r$

و بما أن : $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$

فإن : $P_1 + P_1 + r + P_1 + 2r + P_1 + 3r = 1$

إذن : $4P_1 + 6r = 1 \quad \ldots (1)$

ولدينا : $\mu = 3$

ومنه : $1 . P_1 + 2 . P_2 + 3 . P_3 + 4 . P_4 = 3$

وعليه : $P_1 + 2(P_1 + r) + 3(P_1 + 2r) + 4(P_1 + 3r) = 3$

$P_1 + 2P_1 + 2r + 3P_1 + 6r + 4P_1 + 12r = 3$

إذن : $10\ P_1 + 20\ r = 3 \ldots (2)$

من (1) و (2) لدينا :

$$\begin{cases} 5 \times & 4\ P_1 + 6\ r = 1 \\ -2 \times & 10\ P_1 + 20\ r = 3 \end{cases}$$

إذن :

$$\begin{cases} 20\ P_1 + 30\ r = 5 \\ -20\ P_1 - 40\ r = -6 \end{cases}$$

وعليه : $-10\ r = -1$ أي : $r = \frac{1}{10}$

بالتعويض في (1) نجد : $4\ P_1 + \frac{6}{10} = 1$

وعليه : $4\,P_1 = 1 - \frac{6}{10}$ أي : $4\,P_1 = \frac{2}{5}$

أي : $P_1 = \frac{1}{10}$

ومنه :

$$P_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P_3 = P_2 + r = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P_4 = P_3 + r = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

التمرين 9 .

أرقام القريصات هي : 13 ، 11 ، 7 ، 5 ، 3 ، 2 .

الحالات الممكنة لسحب قريصتان هي :

$$\{2\,;\,3\}\,,\{2\,;\,5\}\,,\{2\,;\,7\}\,,\{2\,;\,11\}\,,\{2\,;\,13\}\,,\{3\,;\,5\}$$
$$\{3\,;\,7\}\,,\{3\,;\,11\}\,,\{3\,;\,13\}\,,\{5\,;\,7\}\,,\{5\,;\,11\}$$
$$\{5\,;\,13\}\,,\{7\,;\,11\}\,,\{7\,;\,13\}\,,\{11\,;\,13\}$$

إذن عدد الحالات الممكنة : 15

قيم المتغير العشوائي هي :

5 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 ، 12 ، 13 ، 14 ، 15 ، 16 ، 18 ، 20 ، 24

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي :

القيم t	5	7	8	9	10	12	13
الاحتمال	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

14	15	16	18	20	24
$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$P(t=5)=\frac{1}{15}\ ,\ P(t=7)=\frac{1}{15}\ ,\ P(t=8)=\frac{1}{15}$$

$$P(t=9)=\frac{1}{15}\ ,\ P(t=10)=\frac{1}{15}\ ,\ P(t=12)=\frac{1}{15}$$

$$P(t=13)=\frac{1}{15}\ ,\ P(t=14)=\frac{1}{15}\ ,\ P(t=15)=\frac{1}{15}$$

$$P(t=16)=\frac{2}{15}\ ,\ P(t=18)=\frac{2}{15}\ ,\ P(t=20)=\frac{1}{15}$$

$$P(t=24)=\frac{1}{15}$$

الأمل الرياضي :

$$\mu = 5\times\frac{1}{15}+7\times\frac{1}{15}+8\times\frac{1}{15}+9\times\frac{1}{15}+10\times\frac{1}{15}+12\times\frac{1}{15}$$
$$+13\times\frac{1}{15}+14\times\frac{1}{15}+15\times\frac{1}{15}+16\times\frac{2}{15}+18\times\frac{2}{15}$$
$$+20\times\frac{1}{15}+24\times\frac{1}{15}$$

$$\mu = 5+7+8+9+10+12+13+14+15+32+36+20+24$$

ومنه : $\mu=\frac{205}{15}$ إذن : $\mu \approx 13,7$

التباين :

$$V=\frac{1}{15}(5-13,7)^2+\frac{1}{15}(7-13,7)^2+\frac{1}{15}(8-13,7)^2$$

$$+\frac{1}{15}(9-13,7)^2+\frac{1}{15}(10-13,7)^2+\frac{1}{15}(12-13,7)^2$$
$$+\frac{1}{15}(13-13,7)^2+\frac{1}{15}(14-13,7)^2+\frac{1}{15}(15-13,7)^2$$
$$+\frac{2}{15}(16-13,7)^2+\frac{2}{15}(18-13,7)^2+\frac{1}{15}(20-13,7)^2$$
$$+\frac{1}{15}(24-13,7)^2$$

$$V=\frac{75,69+44,89+32,49+22,09+13,69+2,89+0,49}{15}$$
$$+\frac{0,09+1,69+10,58+13,98+39,69+106,09}{15}$$

وعليه : $V=\frac{364,35}{15}=24,29$

الانحراف المعياري : $S=\sqrt{V}=\sqrt{24,29}\approx 4,9$

التمرين 10 .

1- قيم S هي : $0\ ;\ 1\ ;\ 2$

2- قانون الاحتمال للمتغير العشوائي :

القيم t	0	1	2
الاحتمال	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

ليكن : H_1, H_2, H_3, H_4 الرجال المرشحين

و F_1, F_2, F_3 النساء المرشحات

اللجان التي يمكن تشكيلها هي :

$\{H_1 , H_2\} , \{H_1 , H_3\} , \{H_1 , H_4\} , \{H_1 , F_1\} , \{H_1 , F_2\}$
$\{H_1 , F_3\} , \{H_2 , H_3\} , \{H_2 , H_4\} , \{H_2 , F_1\} , \{H_2 , F_2\}$
$\{H_2 , F_3\} , \{H_3 , H_4\} , \{H_3 , F_1\} , \{H_3 , F_2\} , \{H_3 , F_3\}$
$\{H_4 , F_1\} , \{H_4 , F_2\} , \{H_4 , F_3\} , \{F_1 , F_2\} , \{F_1 , F_3\}$
$\{F_2 , F_3\}$

إذن عدد الحالات الممكنة هو 21.

عدد الحالات الملائمة لاختيار امرأتين هو 3

عدد الحالات الملائمة لاختيار امرأة واحدة هو 12

عدد الحالات الملائمة لعدم اختيار امرأة هو 6

وعليه : $P(t=0) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

$P(t=1) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ ؛ $P(t=2) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

3) الأمل الرياضي :

$$\mu = 0 \times \frac{2}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{1}{7}$$

و منه : $\mu = \frac{6}{7}$

3- التباين :

$$V = \frac{2}{7}\left(0 - \frac{6}{7}\right)^2 + \frac{4}{7}\left(1 - \frac{6}{7}\right)^2 + \frac{1}{7}\left(2 - \frac{6}{7}\right)^2$$

$$V = \frac{72}{343} + \frac{4}{343} + \frac{64}{343}$$

$$V = \frac{140}{343}$$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{V} \approx 0,64$