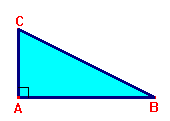
**الجداء السلّمي في المستوي**

**الكفاءات المستهدفة :**

1. حساب الجداء السلّمي لشعاعين.
2. استعمال خواص الجداء السلمي لإثبات علاقات تتعلق بالتعامد.
3. كتابة معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له ونقطة منه.
4. استعمال خواص الجداء السلمي لتعيين معادلة دائرة.
5. استعمال خواص الجداء السلمي و/أو عبارته التحليلية لحساب مسافات وأقياس زوايا.

**المحتوى المعرفي :**

1. الجُداء السلمي في المستوي وتطبيقات له .
2. تعاريف وخواص المستقيم والدائرة .

**النشاط الأول :**

من مميزات المثلثات القائمة "" **مبرهنة فيثاغورس الشهيرة ""**

 مثلث قائم في النقطة يعني 

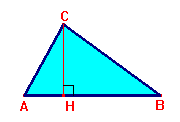
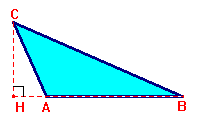
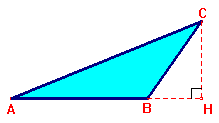
لدينا  يعني 

سوف نهتم بصفة خاصة بالعدد  المعرف بـِ: 

من الواضح أنه إذا كان  مثلثا قائما يكون . نتساءل إذن عن قيمة العدد إذا لم يكن المثلث قائما.

من أجل ذلك نعتبر مثلثا كيفيا و لتكن النقطة المسقط العمودي للنقطة على المستقيم.

نميز ثلاث حالات حسب وضعية النقط، و.



الوضعية1 الوضعية2 الوضعية3

1. بين أن:  و أن: 

ثم استنتج أن: 

1.  الوضعية1: بكتابة بين أن: 

 الوضعية2: بين أن: 

 الوضعية3: بين أن: 

1. بفرض  و  بين أن: ****
2. نذكر أنه إذا كان معلما متعامدا و متجانسا للمستوي و كان شعاعا من المستوي فإن:  . بفرض  و  بين أن: 

يسمى العدد  الجداء السلمي للشعاعين و

**الحل :**

**1)** في الوضعيات الثلاث ، المثلث  قائم في  وتره  وحسب مبرهنة فيثاغورس يكون .

وكذلك المثلث  قائم في  وتره  إذن  .

من المعطيات لدينا  معناه  أي  .

**2)** لدينا في الوضعية الأولى :  ومنه 

في الوضعية الثانية :  ومنه 

في الحلتين يكون :  .

ولدينا  معناه  إذن 

في الوضعية الثالثة :  ومنه 

 ؛  أي  معناه  إذن 

**3)** من المعطيات لدينا  ونعلم أنّ :  ، و. إذن  ، و.

إذن  .

**4)**  ومنه  .

إذن  .

**I) الجداء السلمي :**

**I)1) الجداء السلمي لشعاعين :**

**تعريف :** الجداء السلمي لشعاعين و هو العدد الحقيقي الذي نرمز إليه بالرمز و المعرف بـِ:

  إذا كان  أو 

  إذا كان  و 

**حالات خاصة : **إذا كان**** و**** مرتبطين خطيا و كان لهما نفس الاتجاه فإن **** لأن 

إذا كان**** و**** مرتبطين خطيا و كانا اتجاهاهما متعاكسين فإن **** لأن 

نرمز إلى الجداء السلمي**** بـِ  و نسميه المربع السلمي للشعاع**** و هكذا  و بصفة خاصة إذا كانت و نقطتين فإن 

**مبرهنة :** إذا كان**** و**** شعاعين فإن: **** .

**I)2) العبارة التحليلية للجداء السلمي :**

**مبرهنة** : إذا كانت، في معلم متعامد و متجانس، إحداثيات هي و كانت إحداثيات هيٍ فإن:

**البرهان :** إذا كان معلما متعامدا و متجانسا و كان  و  شعاعين فإن:

، ٍ و 

بعد التعويض في **** و بعد إجراء حسابات بسيطة نجد: ** I)3) الأشعة المتعامدة :**

**تعريف:** القول أن الشعاعين غير المعدومين  و متعامدان يعني أنه إذا كان:  و يكون

المستقيمان و متعامدين**.**

**ملاحظة :** نصطلح على أن الشعاع المعدوم عمودي على كل الأشعة.

**مبرهنة :** القول أن الشعاعين و متعامدان يعني أن .

**البرهان :**  إذا كان **** أو **** فمن الواضح أن: ****

إذا كان ** و ** فالقول أن**** يعني أي حيث عدد

صحيح و هذا يدل على أن الشعاعين  و متعامدان.

**تمرين رقم 1 :**  متقايس الأضلاع حيث  وليكن  منتصف 

أحسب الجداءات التالية :  ،  و 

**الحـل :** - 

- 

-  ( مرتبطان خطيا و متعاكسان في الاتجاه)

**تمرين رقم 54 ص 301 :**  مربع طول ضلعه 4 و  متقايس الأضلاع . نسمي  و  المساقط العمودية لـ  على  و 

I

I

I

I

I

I

I

* + 1. أحسب الجدائين التاليين :  و 
    2. أحسب  في المثلث . ثم استنتج من النتائج السابقة قيم  و  (لاحظ أن المثلت  متساوي الساقين)

**الحـل :** 1 - نعتبر المعلم المتعامد المتجانس  لدينا  ،  ،  و 

و منه  ،  ،  و هكذا 

و  بما أن  فإن  و 

2 - لدينا  ومنه 



**II) قواعد الحساب :**

**II)1) خواص الجداء السلمي :**

**مبرهنة :** من اجل كل ثلاث أشعة، و و من أجل كل عدد حقيقي لدينا

**البرهان :** نعتبر في معلم متعامد ومتجانس الأشعة ، و

1. لدينا  و بما أن  و فإن 
2. إحداثيات الشعاع هي . لدينا إذن:

 و منه 

1. إحداثيات الشعاع  هي . لدينا إذن:



**ملاحظة :** يتم، بإتباع نفس الطريقة، البرهان على الخاصيتين  و .

**أمثلة: **

** **

**II)2) المتطابقات الشهيرة :**

لدينا: ****

لدينا: ****

لدينا: ****

** أو **

** أو **

** أو **

**تطبيق :** بين أن: و 

**تمرين :** ليكن  ،  و

1. أحسب 
2. نضع  و  . – أحسب الطول  تم أعطي قيمة مقربة برديان للزاوية 

**الحـل :** 1- 

2-  و منه 

 ومنة 

**تمرين 41 ، 42 ص 300 .**

**III)الجداء السلمي و الاسقاط العمودي :**

**III)1) المسقط العمودي لشعاع على محور أوشعاع :**

**تعريف :** شعاع حيث .  و  المسقطان العمويان على الترتيب للنقطتين  و  على

محور  يسمي الشعاع  المعرف بـ ،المسقط العمودي للشعاع  على المحور

 (أو على الشعاع ) .

**III)2) الجداء السلمي و المسقط العمودي لشعاع :**

**مبرهنة :** إذا كان **و**  شعاعين حيث . و كان  المسقط العموي للشعاع  على الشعاع  فإن :



**البرهان :** نزود المستوي بمعلم متعامد متجانس  بحيث يكون الشعاع  و  مرتبطين خطيا و يكون لهما نفس الاتجاه.











نضع  و  و ليكن  المسقط العمودي لـ  على 

إذن  هو المسقط العمودي للشعاع  على الشعاع 

لدينا هكذا :  ،  ،  ، و منه  ،  ،

لدينا :  ومنه  أي : 













**نتيجة :** إذا كان  و  شعاعين غير معدومين و كانتا 

و المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين  و 

على المستقيم  فإن :

**حالات خاصة :** -إذا كان الشعاعان  و  مرتبطان خطيا وكنا متعكسان في الاتجاه يكون



- إذا كان الشعاعان  و  مرتبطان خطيا و من نفس الاتجاه يكون















**تمرين محلول** :  مستطيل حيث  ، 

* + 1. أحسب الطول 
    2. ليكن  و  المسقطين العموديين لكل من  و  على الترتيب على  - استنتج من السؤال السابق الطول 

**الحـل** : 1- 

و منه 

2-  و منه  

**تمارين رقم 52 و 56 ص 300**

**IV) تطبيقات الجداء السلمي :**

**IV)1) معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له و نقطة منه :**

**تعريف :** القول أن الشعاع غير المعدومشعاع ناظمي لمستقيم  يعني أن  عمودي على شعاع

توجيه لـ 

نزود المستوي بمعلم متعامد متجانس .  شعاع غير معدوم و  نقطة من المستوي وليكن  المستقيم الذي يشمل  و  شعاع ناظمي له .

 هي مجموعة النقط  من المستوي حيث 

نفرض أن  إذن  و بالتالي يعني 

أي  المعادلة هي من الشكل  بوضع 

**مبرهنة :** في معلم متعامد متجانس يكون لكل مستقيم حيث الشعاع غير المعدوم  شعاع ناظمي له معادلة

من الشكل  حيث  عدد حقيقي.

**ملاحظة :** إذا  معادلة لمستقيم  فإن  شعاع توجييه له ومنه الشعاع 

شعاع ناظمي للمستقيم  لأن .

**IV)2)**.**معادلة دائرة :**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس .

* **معادلة دائرة علم مركزها و نصف قطرها :**

لتكن  الدائرة التي مركزها  ونصف قطرها  

 هي مجموعة النقط  حيث  أي 

و منه 

**مبرهنة :** في معلم متعامد متجانس معادلة الدائرة  التي مركزها  ونصف قطرها  

هي: .







* **معادلة دائرة علم قطر لها :**

لتكن  الدائرة التي قطرها  .  باستثناء  و  هي مجوعة النقط  بحيث يكون المثلث  قائم في أي 

لدينا كذلك  إذا كان  منطبق على  و

االدائرة التي قطرها  هي مجوعة النقط  حيث 

**تمرين رقم 64 ص 302** : نعتير النقاط  ،  و 

1. عين معادلة الارتفاع المار بـ  في المثلث . 2) عين معادلة لمحور القطعة  .

**الحـل :** 1) لتكن  نقطة من الارتفاع لدينا:

 يعني  أي 

2) ليكن  نقطة من المحور و  منتصف  لدينا : 

 يعني  أي 

**تمرين محلول** : نعتير النقطتين  ،  و 

1) عين معادلة الدائرة التى قطرها . 2) عين معادلة لمماس هذه الدائرة في النقطة .

**الحـل :** 1) لتكن  نقطة من الدائرة لدينا:

 يعني  أي 

2) لتكن  نقطة من المماس ولتكن  مركز الدائرة لدينا  و

 يعني  أي 

**تمرين رقم 76 ص 303** :  مجموعة النقط  حيث 

ما هي طبيعة المجموعة  ؟ أعط عناصرها

**الحـل :**  يعني 

**أي**  و منه  هي الدائرة التي مركزها  و نصف قطرها 

**تمارين رقم 66 ، 69 ص 302**

**V) حساب أطوال و أقياس زوايا :**

**V)1) مبرهنة المتوسط :**

 و نقطتان.  منتصف القطعة المستقيمة  .  نقطة كيفية من المستوي .

لدينا : 

و منه 

و بما أن  و  أي 

فإن : 

**مبرهنة :** و نقطتان و منتصف القطعة المستقيمة  . من أجل كل نقطة  من المستوي لدينا :



**V)2) العلاقات المترية في مثلث :**

 مثلث. نضع ،،،،، و مساحة المثلث.

لدينا : 

و بما أن :  ،  و  فإن : 

و بإتباع نفس الطريقة نثبت أن :  و 

**مبرهنة (الكاشي)** :  مثلث حيث  ،  و  . لدينا العلاقات التالية :

(1)(2)  (3) 

**قاعدة المساح :**

**مبرهنة** : مثلث حيث،، و مساحة المثلث لدينا العلاقات التالية :



**قانون الجيوب**

**مبرهنة** :  مثلث حيث  ،  و  لدينا العلاقات التالية :

**تمرين محلول** :  مثلث حيث  ،  و  ؛ وليكن  منتصف .

1) أحسب الطول . 2) عين مجموعة النقط  من المستوي التي تحقق :.

3) عين قيمة مقربة إلى 0.1 لـ  .

**الحـل** : 1-  و منه 

* 1. لدينا  ومنه  أي 

مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها  و نصف قطرها 5

* 1. لدينا  ومنه 

أي  و بالتالي : 

**تمرين رقم 105 ص 306 :**

* 1. برهن أن المساحة  للمثلث  تكتب 
  2. استنتج العلاقتان الممثلة للسابقة استنتج القاعدة المعلقة بالجيوب :



* 1. تطبيقات : يعطي  ،  و 

أ ) عين القيمة المضبوطة لـ 

ب ) عين القيمة الحقيقية لـ باستعمال العلاقة 

ج ) نضع  حل في  المعادلة ذات المجهول :

فما هو عدد المثلثات الممكنة لهذه الحالة ؟ و هل هي متقايسة

**الحـل** : 1)  و لدينا  و منه 









إذن  أي  و بنفس الطريقة نبرهن :  و 

2)  و بنفس الطريقة نبرهن

 و 

3) أ )  يعني 

**أعمال موجهة (ص 292)**

1. **المسافة بين نقطة و مستقيم**

**تعريف** : المسافة بين نقطة و مستقيم هي المسافة حيث هو المسقط العمودي لـ على 

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس نقطة و مستقيما معادلته :  حيث . ليكن النقطة  المسقط العمودي لـ على  و ليكن الشعاع الناظمي للمستقيم  حيث 

**الهدف :** حساب المسافة بدلالة ،  ، و

1. بين أن  ثم استنتج أن  (1)
2. علما أن تنتمي إلى المستقيم  و بفرض بين أن :  (2)
3. استنتج من (1) و (2) أن 

**الحـل** :

* 1.  و شعاعين ناظميين علي  إذن  و منه 

أي 

* 1. يعني  و منه  ، 



* 1.  يعني  و منه 

**مبرهنة** : في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة و مستقيم معادلته :

 هي : 

**تطبيقات :**

1. أحسب المسافة بين النقطة و المستقيم  ذو المعادلة : 
2. عين معادلة الدائرة التي مركزها وتمس المستقيم  ذو المعادلة : 
3. لتكن  مجموعة النقط  و التي تحقق المعادلة : 
   * بين أن  دائرة يطلب تعين مركزها و نصف قطرها.
   * هل المستقيم  ذو المعادلة :  مماس للدائرة  ؟

**الحـل** : 1-  يعني  إذن المسافة بين و هي 

2- لتكن  نقطة تماس لدينا : 

 يعني  و منه  أي 

3-  يعني  و منه  و 

- إذا فرضنا أن مماس لـ  فإن المسافة بين  و  هي 

المسافة بين  و  تساوي  إذن  ليس مماس لـ 

1. **دساتير الجمع**











1. **حساب**  ،  ،  و

 معلم متعامد و متجانس للمستوي . نعتبر النقطتين  و  من الدائرة المثلثية التي مركزها  حيث : و

* + عين إحداثيات الشعاعين و ثم باستعمال العبارة التحليلة للجداء السلمي أحسب 
  + لدينا حسب علاقة شال : 

بين باستعمال التعريف المناسب للجداء السلمي أن : 

نستنتج مما سبق أن  (1)

* باستبدال العدد بـ  في النتيجة (1) بين أن :  (2)
* علما أن  و  بين أن :

 (4) ثم أستنتج  (5)

* **أكتب النتائج السابقة على شكل مبرهنة**

**الحـل :**

 و ، 

 و منه 



 و منه





**مبرهنة** : من أجل كل عديين حقيقين لدينا :

1-  2 - 

3-  4 - 

**تطبيق : 1-** تحقق أن :  ثم أحسب القيم المضبوطة لـ  و 

1. أستنتج القيم المضبوطة لـ  و 

**الحـل :** 



 و 

1. **عبارة**  و

* بين باستعمال النتائج السابقة أن :  و 
* بين أن : 
* **أكتب النتائج السابقة على شكل مبرهنة**

**الحـل :**  



لدينا :  ومنه 

**تطبيق : 1-** أحسب القيم المضبوطة لـ  و 

2- بين أن :  و 

**الحـل :**   و منه 

 و منه 

مسألة محلولة رقم 125 ص 309

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس . نعرف النقطة و  ذي المعادلة 

**الهدف** هو حساب المسافة بين النقطة و المستقيم باستعمال طريقتين.

**الطريقة الأول :** نعين النقطة المسقط العمودي للنقطة على.

أ ) عين معادلتين تربط بين إحداثيي النقطة . ثم أحسب إحداثيي النقطة .

ب ) عين المسافة.

**الطريقة الثانية :**

أ ) أثبت أن  تنتمي إلى المستقيم.

ب ) نضع  ، تحقق أن هو شعاع التوجيه للمستقيم .

اشرح لماذا القول أن  تنتمي إلى  راجع إلى أيجاد عدد حقيقي  حيث : . ثم أكتب إحداثيي النقطة  بدلالة .

ج ) جد القيمة الحدية الصغرى للدالة المعرفة على  بـ :.

أحسب بدلالة . د ) استنتج المسافة بين النقطة و المستقيم

الحـل :**أ )** ليكن  ،  يعني  ...(1) ،  شعاع ناظمي على 

 يعني  و مرتبطين خطيا أي  و منه ...(2)

من (1) و (2) نستنتج أن  **ب )** 

**الطريقة الثانية :** **أ )**  **ب )**

الشعاعين  و  مرتبطين خطيا إذن يوجد عدد حقيقي  حيث 

إذا كان  فإن  و منه 

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

ج )  و منه  يعني 

قيمة الحدية الصغرى لـ  هي 



د )  تعبر عن المسافة بين النقطة و نقطة من  . أصغر مسافة بين و نقطة هي  وهي المسافة بين النقطة و المستقيم

