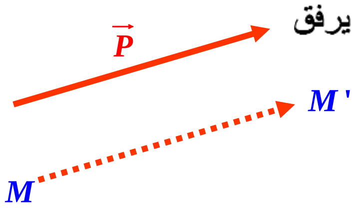
التحويلات النقطية

1) الانسحاب

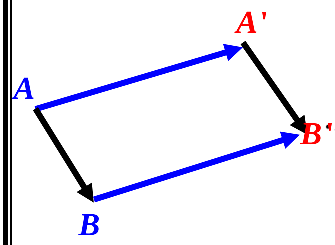


التعريف: $\vec{P}$ شعاع من المستوي. الانسحاب الذي شعاعه $\vec{P}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث $\overrightarrow{MM'}=\vec{P}$.

خواص:

* إذا كان $\vec{P}$ معدوما فإن كل نقط المستوي صامدة بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{P}$.

* إذا كان $\vec{P}$ غير معدوم فإنه لا توجد نقطة صامدة بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{P}$.



* صورة ثنائية نقطية $(A;B)$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{P}$ هي الثنائية النقطية $(A';B')$ حيث $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$.

* الانسحاب هو تقايس (يحافظ على المسافات)

* الانسحاب يحافظ على الاستقامية ؛ أقياس الزوايا ؛ المرجح والتوازي.

التعريف المركب: ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$.

z و z' عددان مركبان صورتهما النقطتين M و M' على الترتيب.

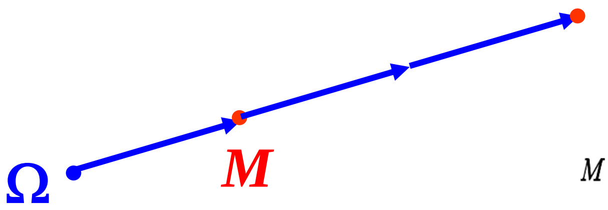
$\vec{P}$ شعاع من المستوي لاحقته العدد المركب b.

التعريف المركب للانسحاب الذي شعاعه P هو $z'=z+b$.

مثال 1: العبارة المركبة للانسحاب الذي شعاعه $\vec{Q}(-1;2)$ هي: $z'=z-1+2i$.

مثال 2: العبارة $z'=z-3i$ هي التعريف المركب للانسحاب ذي الشعاع $\vec{P}(0;-3)$ والذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z'.

2) التحاكي:



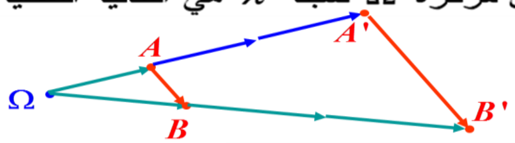
التعريف: Ω نقطة من المستوي. λ عدد حقيقي غير معدوم.

التحاكي الذي مركزه Ω نسبته λ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث $\overrightarrow{\Omega M'}=\lambda.\overrightarrow{\Omega M}$.

خواص:

* للتحاكي نقطة صامدة واحدة وهي المركز Ω.

* صورة ثنائية نقطية $(A;B)$ بالتحاكي الذي مركزه Ω نسبته λ هي الثنائية النقطية $(A';B')$ حيث $\overrightarrow{A'B'}=\lambda\overrightarrow{AB}$.



* التحاكي يحافظ على الاستقامية ؛ أقياس الزوايا ؛ المرجح والتوازي

التعريف المركب: ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$.

لاحقتها العدد المركب z_Ω.

z و z' عددان مركبان صورتهما النقطتين M و M' على الترتيب.

التعريف المركب للتحاكي الذي مركزه Ω ونسبته a هو

$$z'-z_\Omega=a(z-z_\Omega)$$

ملاحظة: $z'-z_\Omega=a(z-z_\Omega)$ معناه $z'=az+(1-a)z_\Omega$

نضع $b=(1-a)z_\Omega$ ومنه $z'=az+b$

إذن التعريف المركب للتحاكي هو $z'=az+b$ حيث $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ و b عدد مركب.

نسبة التحاكي هي العدد الحقيقي a ولاحقة مركزه $z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}$.

مثال 1: أكتب العبارة المركبة للتحاكي ذي المركز O مبدأ المعلم ونسبته 3.

$z'-z_O=3(z-z_O)$ أي $z'=3z$.

مثال 2: Ω نقطة لاحقتها العدد المركب $\omega=1-i$. عين العبارة المركبة للتحاكي ذي النسبة $-\dfrac{1}{2}$ والمركز Ω.

$z'-z_\Omega=-\dfrac{1}{2}(z-z_\Omega)$ أي $z'=-\dfrac{1}{2}z+\dfrac{3}{2}z_\Omega$ أي $z'=-\dfrac{1}{2}z+\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}i$

مثال 3: ما هي طبيعة التحويل النقطي المعرف بـ: $z'=-\dfrac{3}{2}z-2+3i$.

هو تحاك نسبته $-\dfrac{3}{2}$ ولاحقة مركزه العدد المركب $\dfrac{-2+3i}{1+\dfrac{3}{2}}=-\dfrac{4}{5}+\dfrac{6}{5}i$.

تطبيق 82 صفحة 150: A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $a=3+i$ ، $b=-2+3i$ و $8-i$.

أ - عيّن نسبة التحاكي h ذي المركز C والذي يحوّل A إلى B.

ب - نقول عن مستقيم الذي ينطبق على صورته بتحويل ، أنه صامدا إجماليا .
برهن أن المستقيم الذي يشمل النقطة C ومعامل توجيهه 2 هو صامد إجمالي ، ثم أكتب معادلة له .

حل التطبيق:

أ - لدينا: $z_B=\alpha z_A+\beta$ و $z_C=\dfrac{\beta}{1-\alpha}$ معناه $-2+3i=(3+i)\alpha+\beta$ و $\beta=(1-\alpha)(8-i)$

معناه $-2+3i=(3+i)\alpha+(8-i)-\alpha(8-i)$ و $\beta=(1-\alpha)(8-i)$

ومعناه $(-5+2i)\alpha=-10+4i$ و $\beta=(1-\alpha)(8-i)$ أي $\alpha=2$ و $\beta=-8+i$

إذن التعريف المركب هو $z'=2z-8+i$ إذن نسبة التحاكي هي $\alpha=2$.

ب - نسمى Δ المستقيم الذي يشمل النقطة C ومعامل توجيهه 2؛

من أجل كل نقطة M من Δ لدينا صورتها بالتاحاكي ذي المركز C والنسبة 2 هي M' حيث $\overrightarrow{CM'}=2.\overrightarrow{CM}$ وبالتالي $M'\in\Delta$ أي المستقيم Δ صامد إجمالي.

تطبيق 85 صفحة 150 : t هو التحويل في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيتين $(x\,,y)$ ، النقطة M' ذات الإحداثيتين (x',y') حيث : $x'=2x-\frac{3}{2}$ و $y'=2y+\frac{1}{2}$.

أ - ما هي طبيعة التحويل t ؟

ب - أكتب العبارة المركّبة للتحويل t .

حل التطبيق:

إذن $x=\frac{3}{2}$ و $y=-\frac{1}{2}$.

لدينا $x'-\frac{3}{2}=2x-\frac{6}{2}$ و $y'+\frac{1}{2}=2y+1$ معناه $x'-\frac{3}{2}=2\left(x-\frac{3}{2}\right)$

و $y'+\frac{1}{2}=2\left(y+\frac{1}{2}\right)$ أي $\overrightarrow{\Omega M'}=2.\overrightarrow{\Omega M}$

إذن t هو التحاكي ذو المركز $\Omega\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ و النسبة 2 .

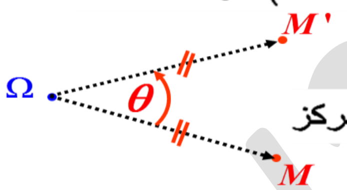
2) التعريف المركب للتحاكي هو $z'=2z-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$

3) الدوران:

التعريف: Ω نقطة من المستوي؛ θ عدد حقيقي.

الدوران الذي مركزه Ω وزاويتها θ هو التحويل النقطي في المستوي، يرفق بالنقطة Ω، النقطة Ω نفسها وبكل نقطة M تختلف عن Ω، النقطة M' حيث $\Omega M'=\Omega M$ و $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

خواص:



* إذا كان $\theta=0$ فإن كل نقط المستوي صامدة بالدوران ذي المركز Ω والزاوية 0 وفي هذه الحالة هو التحويل المطابق.
* إذا كان $\theta\neq 0$ فإن للدوران نقطة صامدة وحيدة وهي مركزه.

* الدوران هو تقايس (يحافظ على المسافات)
* الدوران يحافظ على الاستقامية ؛ أقياس الزوايا و المرجح.

التعريف المركب: ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$.

θ عدد حقيقي. Ω نقطة ثابتة من المستوي لاحقتها العدد المركب z_Ω.

z و z' عددان مركبان صورتهما النقطتين M و M' على الترتيب

$\mathcal{R}$ الدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ.

$\mathcal{R}(M)=M'$ معناه $|z'-z_\Omega|=|z-z_\Omega|$

وهذا يعني : $\left|\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right)=\theta$ ويكافئ $\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}=e^{i\theta}$

نضع $a=e^{i\theta}$ إذن $z'-z_\Omega=a(z-z_\Omega)$ وهذا يعني $z'=az+(1-a)z_\Omega$.

خاصية: التعريف المركب للدوران هو $z'=az+b$ حيث $a\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$ و $|a|=1$ ،
زاوية الدوران هي $\arg(a)$ ومركزه صورة العدد المركب $\frac{b}{1-a}$.

مثال 1: اكتب العبارة المركبة للدوران الذي مركزه O مبدأ المعلم وزاويته $\frac{\pi}{6}$.

التعريف المركب للدوران هو $z'=az+b$ حيث $a=e^{i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
و $\frac{b}{1-a}=0$ إذن $z'=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)z$

مثال 2:

مطلوب إعطاء عناصره المميزة.

$a=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ و $|a|=\frac{\sqrt{2}}{2}|-1+i|=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}=1$ إذن t هو دوران.

$a=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=e^{i\frac{3\pi}{4}}$ إذن زاوية الدوران t هي $\frac{3\pi}{4}$.

$\frac{2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}=2$ وبالتالي مركز الدوران t هو $\Omega(2;0)$.

تطبيق 83 صفحة 150:

A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما $a=\frac{1}{2}(1+i)$ و $b=\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

عين زاوية الدوران الذي مركزه مبدأ المعلم O ويحوّل A إلى B.

حل التطبيق: $\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\frac{\sqrt{2}i}{1+i}=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}=e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن زاوية الدوران هي $\frac{\pi}{4}$.

الإحداثيتين (x,y) ، النقطة M' ذات الإحداثيتين (x',y') حيث : $x'=1-y$
و $y'=x-2$. نضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$.

أ - أكتب z' بدلالة z .

ب - ما هي طبيعة التحول t مبيّنا عناصره المميّزة ؟

حل التطبيق:

أ - $z'=x'+iy'=1-y+(x-2)i=xi-y+1-2i=i(x+iy)+1-2i$

أي $z'=iz+1-2i$

ب - طبيعة التحول t وعناصره المميّزة: $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ إذن t دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه صورة
العدد المركب $\frac{1-2i}{1-i}$

$$\frac{1-2i}{1-i}=\frac{(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

ملخص: T معرف بـِ: $z'=az+b$

إذا كان:	التحويل T هو:	العناصر المميزة:
$a=1$	انسحاب	شعاعه $\vec{w}$ لاحقته b
$a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$	تحاك	نسبته a ولاحقة مركزه $\frac{b}{1-a}$
$a\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$ و $\lvert a\rvert=1$	دوران	زاويته $Arg(a)$ ولاحقة مركزه $\frac{b}{1-a}$

تمرين 161 صفحة 159: نعتبر العددين المركبين $a=3+i\sqrt{3}$ ، $b=2+\sqrt{3}+3i$

1) بيّن أن المثلث ABO متساوي الساقين ، ثمّ عيّن z_G لاحقة مركز ثقله G .

2) ليكن α و β عددين مركبين وليكن T التحويل النقطي في المستوي الذي يحوّل $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z'=\alpha z+\beta$.

أ - عيّن α و β حيث يكون $T(O)=G$ و $T(A)=C$.

ب - بيّن أنّ التحويل T هو دوران يطلب تعيّين مركزه وزاويته .

جـ - استنتج صورة المستقيم (OA) بالدوران T.

حل التمرين:

1) لدينا $\frac{OA}{OB}=\frac{|a|}{|\bar{a}|}=1$ معناه $OA=OB$ أي المثلث ABO متساوي الساقين.

$z_G=\frac{0+a+\bar{a}}{3}=\frac{2}{3}\text{Re}(a)=2$.

2) ليكن α و β عددين مركبين وليكن T التحويل النقطي في المستوي الذي يحوّل $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z'=\alpha z+\beta$.

أ - عيّن α و β حيث يكون $T(O)=G$ و $T(A)=C$.

$T(O)=G$ معناه $z_G=\alpha z_O+\beta$ أي $\beta=2$

و $T(A)=C$ معناه $z_C=\alpha z_A+\beta$ أي $2+\sqrt{3}+3i=\alpha\left(3+i\sqrt{3}\right)+2$

ومعناه $\alpha=\frac{\sqrt{3}+3i}{3+i\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{3}+3i\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)}{\left(3+i\sqrt{3}\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)}=\frac{6\sqrt{3}+6i}{12}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

وبالتالي $\alpha=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ و $\beta=2$.

ب - بيّن أنّ التحويل T هو دوران يطلب تعيّين مركزه وزاويته .

لتعريف المركب للتحويل T هو $z'=\frac{\sqrt{3}+i}{2}z+2$.

لدينا $|\alpha|=\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|=1$ إذن T هو دوران،

ولدينا $\dfrac{\pi}{6}=\arg\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)=\arg(\alpha)$ وهي زاوية الدوران T.

$$\frac{\beta}{1-\alpha}=\frac{2}{1-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}}=\frac{4}{2-\sqrt{3}-i}=\frac{8-4\sqrt{3}+4i}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2+1}=\frac{8-4\sqrt{3}+4i}{8-4\sqrt{3}}$$
$$=1+\frac{1}{2-\sqrt{3}}i=1+\left(2+\sqrt{3}\right)i$$

إذن مركز الدوران T هي النقطة $D\left(1;2+\sqrt{3}\right)$.

جـ - استنتج صورة المستقيم (OA) بالدوران T.

لدينا صورة مستقيم بالدوران هي مستقيم بما أن $T(O)=G$ و $T(A)=C$ فإن

صورة المستقيم (OA) بالدوران T هي المستقيم (CG).

تمرين 167 صفحة 160: A ، B و C ثلاث نقط من المستوي المركب ، لواحقها على الترتيب: $z_A=2+2i$ ، $z_B=5+5i$ و $z_C=-2-2i$.

أ - أثبت أنّ $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ هو عدد حقيقي .

ب - استنتج طبيعة التحويل T الذي يحوّل B إلى C و A نقطته الصامدة الوحيدة .

جـ - أكتب العبارة المركّبة للتحويل T.

د - Γ المنحني ذي المعادلة $y=3x-\dfrac{1}{x}$ أكتب معادلة لصورة المنحني Γ بالتحويل T .

حل التمرين:

أ - $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{-2-2i-2-2i}{5+5i-2-2i}=\dfrac{-4-4i}{3+3i}=-\dfrac{4}{3}$ وهو عدد حقيقي .

ب - لدينا $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=-\dfrac{4}{3}$ معناه $z_C-z_A=-\dfrac{4}{3}(z_B-z_A)$ ومعناه $\overrightarrow{AC}=-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

إذن التحويل T الذي يحوّل B إلى C و A نقطته الصامدة الوحيدة هو التحاكي ذي المركز A والنسبة $-\dfrac{4}{3}$.

جـ - العبارة المركّبة للتحويل T: $z'=-\dfrac{4}{3}z+\left(1+\dfrac{4}{3}\right)z_A=-\dfrac{4}{3}z+\dfrac{7}{3}(2+2i)$

د - Γ المنحني ذي المعادلة $y=3x-\dfrac{1}{x}$.

$z'=-\dfrac{4}{3}z+\dfrac{14}{3}+\dfrac{14}{3}i$ معناه $3z'-14-14i=-4z$

معناه $z=-\dfrac{1}{4}(3z'-14-14i)$

وبالتالي $x=-\dfrac{1}{4}(3x'-14)$ و $y=-\dfrac{1}{4}(3y'-14)$

ومنه $-\dfrac{1}{4}(3y'-14)=-\dfrac{3}{4}(3x'-14)+\dfrac{4}{3x'-14}$

معناه $(3y'-14)=3(3x'-14)-\dfrac{16}{3x'-14}$

معناه $y'=(3x'-14)-\dfrac{16}{3(3x'-14)}+\dfrac{14}{3}$

معناه $y'=3x'-\dfrac{16}{3(3x'-14)}-\dfrac{28}{3}$.