الأستاذ : شايبي أمين

تمارين الدالة الأسية

التمرين الثاني

لتكن الدالة f المعرفة على IR كما يلي :

$$f(x)=\frac{4e^{x}}{e^{x}+7}.$$

1) بين من أجل كل عدد حقيقي x أن $f(x)=\dfrac{4}{1+7e^{-x}}$.

الجواب 1

1) نُبين أن $f(x)=\dfrac{4}{1+7e^{-x}}$:

من أجل كل x من IR لدينا :

$$f(x)=\frac{4e^{x}}{e^{x}+7}=\frac{4e^{x}\times e^{-x}}{\left(e^{x}+7\right)\times e^{-x}}=\frac{4}{1+7e^{-x}}$$ لأن $e^{x}\times e^{-x}=1$.

السؤال 2

2) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

ب) بين أن $f(x)$ متزايدة تمامًا على IR.

جـ) بين أنه من أجل كل من IR : $0 < f(x) < 4$.

الجواب 2

2) أ)- نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين:

لدينا $f(x) = \dfrac{4e^x}{e^x + 7} = \dfrac{4}{1 + 7e^{-x}}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} 4e^x = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x + 7 = 7$ و منه $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4e^x}{e^x + 7} = 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $-\infty$ مستقيم مقارب معادلته $y = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + 7e^{-x} = 1$ و منه $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{1 + 7e^{-x}} = 4$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ مستقيم مقارب معادلته $y = 4$.

ب) نبين أن $f(x)$ متزايدة تمامًا على IR :

نحسب $f'(x)$:

الدالة f معرفة ، مستمرة و قابلة للإشتقاق على IR ، $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$.

و منه من أجل كل من x من IR : $f'(x) = \dfrac{-4 \times (-7)e^{-x}}{(1 + 7e^{-x})^2} = \dfrac{28e^{-x}}{(1 + 7e^{-x})^2}$.

من أجل كل من x من IR لدينا $28e^{-x} > 0$ و $(1 + 7e^{-x})^2 > 0$ و منه $f'(x) > 0$.

و بالتالي الدالة $f(x)$ **متزايدة تمامًا** على IR.

جـ) نبين من أجل كل عدد حقيقي x أن $0 < f(x) < 4$:

من أجل كل x من IR لدينا

$e^{-x} > 0$ و منه $7e^{-x} + 1 > 1$ و بالتالي $\frac{1}{1+7e^{-x}} < 1$ و منه $0 < \frac{1}{1+7e^{-x}}$ و منه $0 < \frac{4}{1+7e^{-x}} < 4$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي x أن $0 < f(x) < 4$.

السؤال3

3) أ) بين أن المعادلة $e^x = 7$ تقبل حلاً وحيدًا α في IR.

ب) عين حصرًا بالتقريب إلى 10^{-2} للعدد α.

الجواب 3

3) أ) نبين أن المعادلة $e^x = 7$ تقبل حلاً وحيدًا α في IR :

الدالة الأسية e^x معرفة ، مستمرة و متزايدة تمامًا على IR.

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ و $7 \in]0 ; +\infty[$

إذن يوجد عدد حقيقي وحيد α يحقق $e^{\alpha} = 7$

ب) تعيين حصرًا بالتقريب إلى 10^{-2} للعدد α.

$e^{1,94} < 7 < e^{1,95}$ **إذن** $1,94 < \alpha < 1,95$.

السؤال 4

4) أ) بين أن :

$f(\alpha+x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}$ و أن $f(\alpha-x)=\dfrac{4}{1+e^x}$.

ب) استنتج أن $\mathrm{I}(\alpha\,;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

جـ) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة I.

الجواب 4

4) أ) نبين أن $f(\alpha+x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}$ **و أن** $f(\alpha-x)=\dfrac{4}{1+e^x}$ **:**

$f(\alpha+x)=\dfrac{4e^{\alpha+x}}{e^{\alpha+x}+7}=\dfrac{4e^{\alpha}e^x}{e^{\alpha}e^x+7}$ و لدينا $e^{\alpha}=7$ و منه $f(\alpha+x)=\dfrac{4\times 7e^x}{7e^x+7}=\dfrac{4e^x}{e^x+1}$.

$f(\alpha-x)=\dfrac{4}{1+7e^{-\alpha+x}}=\dfrac{4}{1+7e^{-\alpha}e^x}$ و لدينا $e^{-\alpha}=\dfrac{1}{7}$ و منه $f(\alpha-x)=\dfrac{4}{1+e^x}$.

ب) استنتاج أن $I(\alpha\,;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

لدينا $f(\alpha+x)+f(\alpha-x)=\frac{4e^x}{e^x+1}+\frac{4}{1+e^x}=\frac{4(e^x+1)}{e^x+1}=4$.

نستنتج أن النقطة $I(\alpha\,;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

جـ) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة I.

$(T): y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$.

$f'(\alpha)=\frac{28e^{-\alpha}}{(1+7e^{-\alpha})^2}$ و $e^{-\alpha}=\frac{1}{7}$ و منه $f'(\alpha)=\frac{28\times\frac{1}{7}}{(1+1)^2}=1$.

$f(\alpha)=\frac{4}{1+7e^{-\alpha}}=\frac{4}{1+7\times\frac{1}{7}}=2$.

إذن **معادلة المماس** في النقطة I هي $y=(x-\alpha)+2=x-\alpha+2$.