الأعداد والحساب

الكفاءات المستهدفة

- التمييز بين مختلف أنواع الأعداد .
- التحكم في الحساب على الكسور وعلى الجذور التربيعية والقوى الصحيحة .
- تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية واستعماله .
- التعرف على أوّلية عدد طبيعي .
- التحويل من وإلى الكتابة العشرية ، الكتابة العلمية ، الكتابة باستعمال القوى الصحيحة للعدد 10 .
- تدوير عدد عشري إلى 10^{-n} حيث $n \in \mathbb{N}$.
- تحديد رتبة مقدار عدد .
- التمييز بين عدد وإحدى قيمه المقربة .
- استخدام الحاسبة العلمية لتنظيم وإجراء حساب .

1) مجموعات الأعداد :

- مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$: $\{0;1;2;3;4;...;2011;2012;...\}$
- مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$: $\{...;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;...\}$
- مجموعة الأعداد العشرية $\mathbb{D}$: نسمي عددا عشريا كل عدد يمكن كتابته على الشكل $\frac{p}{10^n}$ حيث p عدد صحيح نسبي و n عدد طبيعي .

مثلا : $1.25=\frac{125}{10^2}$ ، $-0.1235=\frac{-1235}{10^4}$ و $1.25=\frac{5}{4}$ هي أعداد عشرية .

ملاحظة : $0.25=\frac{1}{4}$ عدد عشري (عدد الأرقام بعد الفاصلة هو عدد منته)

$1.3333...=\frac{1}{3}$ ليس عددا عشريا (عدد الأرقام بعد الفاصلة هو عدد غير منته)

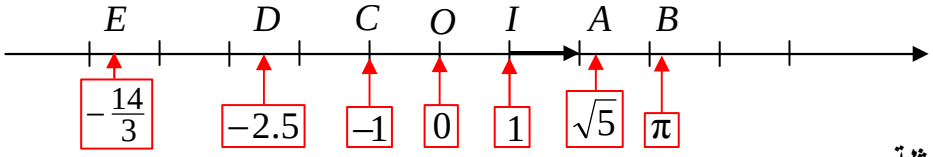
- مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$: نسمي عددا ناطقا كل عدد يمكن كتابته على الشكل $\frac{p}{q}$ حيث p عدد صحيح نسبي و q عدد صحيح نسبي غير معدوم .

مثلا : $\frac{1}{3}$ ، $\frac{\sqrt{4}}{-3}=\frac{-2}{3}$ ، $\frac{22}{7}$ ، $-12=\frac{-12}{1}$ ، $1.5=\frac{3}{2}$ هي أعداد ناطقة .

ملاحظة : إذا كان p عددا صحيحا نسبيا و $q=2^n\times5^n$ يكون $\frac{p}{q}$ عددا عشريا .

- مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$:

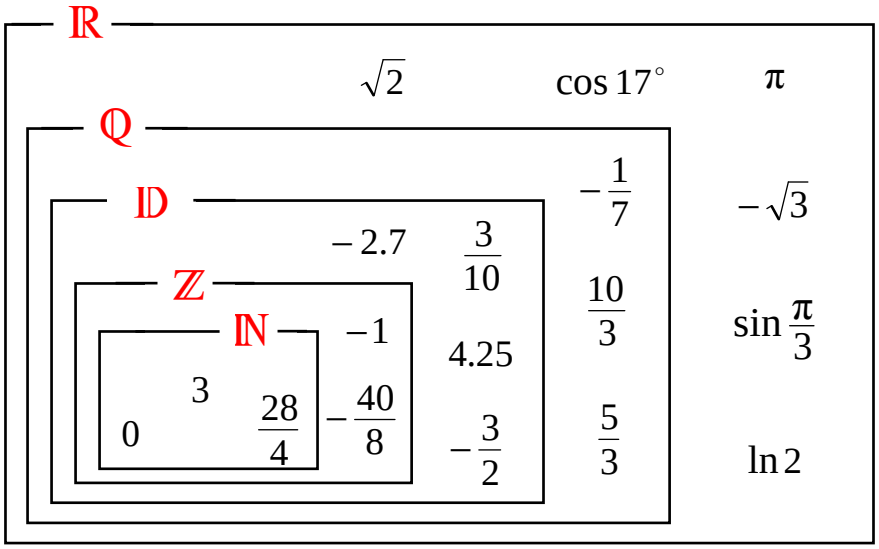
مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي مجموعة فواصل نقط مستقيم مزود بمعلم $(O;I)$ العدد الحقيقي 0 هو فاصلة النقطة O والعدد الحقيقي 1 هو فاصلة النقطة I .



أمثلة :

العدد	0	1	$\sqrt{5}$	π	-1	-2.5	$-\frac{14}{3}$
الفاصلة	O	I	A	B	C	D	E

نتيجة : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

2) الحساب :

أ- الحساب على الكسور :

تذكير : a ، b ، c ، d و k أعداد حقيقية غير معدومة .

$\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$ ، $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$ ، $\frac{ka}{kb}=\frac{a}{b}$ و $\frac{a\div k}{b\div k}=\frac{a}{b}$.

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ ، $k\times\frac{a}{b}=\frac{ka}{b}$ و $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

ب- الحساب على الجذور التربيعية :

a عدد حقيقي موجب . الجذر التربيعي للعدد a هو العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه يساوي a ونرمز إليه بالرمز $\sqrt{a}$.

تذكير : a عدد حقيقي موجب و b عدد حقيقي موجب تماما .

$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ ، $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ و $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

أمثلة :

$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$ ، $\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{2\times8}=\sqrt{16}=4$ ، $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=\sqrt{4}=2$

$\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ ، $\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

$\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\frac{2}{1+\sqrt{3}}\times\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{2\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(1-\sqrt{3}\right)}{1-3}=-1+\sqrt{3}$

جـ- الحساب على القوى الصحيحة :

a عدد حقيقي غير معدوم و n عدد طبيعي غير معدوم .

$$a^n=\underbrace{a\times a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ عاملا}}$$

اصطلاح : $a^0=1$ و $a^1=a$.

$a^{-1}=\frac{1}{a}$ ، $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ و $a^n\times a^p=a^{n+p}$ و $\left(a^n\right)^p=a^{np}$

$\frac{a^n}{a^p}=a^{n-p}$ ، $(a\times b)^n=a^n\times b^n$ ، $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ و $\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$.

أمثلة :

$5\times5\times5=5^3$ ، $3^2\times3^5=3^{2+5}=3^7$ ، $\left(2^3\right)^2=2^{3\times2}=2^6$.

$\frac{5^2}{5^3}=5^{2-3}=5^{-1}=\frac{1}{5}$ ، $(3\times5)^2=3^2\times5^2=9\times25=225$.

$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}$ ، $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$.

3) القيمة المضبوطة والقيم المقربة :

تدوير عدد عشري إلى 10^{-n} حيث $n\in\mathbb{N}$:

مثال :

3.6425926535	المدوّر إلى الوحدة	المدوّر إلى 10^{-1}	المدوّر إلى 10^{-3}
	4	3.6	3.643

الكتابة العشرية لعدد :

توجد ، لعدد عشري ، ثلاث كتابات أكثر استعمالا :

- الكتابة بالفاصلة :

مثال : $3846.25 = 3846 + 0.25$

- الكتابة على الشكل $a \times 10^n$ حيث a عدد صحيح ليس مضاعفا للعدد 10 و n عدد صحيح .

مثال : 384625×10^{-2}

- الكتابة العلمية على الشكل $a \times 10^n$ أو $-a \times 10^n$ حيث a عدد عشري محصور بين 1 و 10 ($1 \leq a < 10$) .

مثال : 3.84625×10^3

رتبة مقدار :

للحصول على رتبة مقدار عدد عشري d :

- نكتب العدد d على الشكل العلمي أي على الشكل $d' \times 10^n$ أو $-d' \times 10^n$ حيث d' عدد عشري محصور بين 1 و 10 ($1 \leq d' < 10$) و n عدد صحيح ؛
- ثم ندوّر العدد العشري d' إلى العدد الصحيح الأقرب منه ؛
- ونحتفظ بقوة 10 .

أمثلة :

- رتبة مقدار العدد 3.84625×10^3 هي 4×10^3
- رتبة مقدار العدد 0.002374 هي $0.002374 = 2.374 \times 10^{-3} = 2 \times 10^{-3}$
- رتبة مقدار العدد 0.002674 هي $0.002674 = 2.674 \times 10^{-3} = 3 \times 10^{-3}$

أمثلة أخري :

العدد	1.82×10^4	8.1×10^4	9.8×10^{-3}	0.00016
رتبة مقدار العدد	2×10^4	8×10^4	10^{-2}	2×10^{-4}

تمرين محلول 1 :

عيّن رتبة مقدار العدد $A = 851.7 \times 0.0018 \times 0.073$

الحل :

- رتبة مقدار العدد 851.7 هي $851.7 = 8.517 \times 10^2 = 9 \times 10^2$
- رتبة مقدار العدد 0.0018 هي $0.0018 = 1.8 \times 10^{-3} = 2 \times 10^{-3}$
- رتبة مقدار العدد 0.073 هي $0.073 = 7.3 \times 10^{-2} = 7 \times 10^{-2}$

ومنه : $851.7\times0.0018\times0.073\approx9\times10^{2}\times2\times10^{-3}\times7\times10^{-2}$

$9\times10^{2}\times2\times10^{-3}\times7\times10^{-2}=9\times2\times7\times10^{2-3-2}=166\times10^{-3}$

$=1.66\times10^{-1}\approx2\times10^{-1}$

إذن : رتبة مقدار العدد A هي 2×10^{-1} .

4) الأعداد الأولية :

- تعريف :

القول أن العدد الطبيعي n أولي معناه : n يقبل قاسمين بالضبط في $\mathbb{N}$ هما 1 و n نفسه .

ملاحظات :

0 غير أولي لأنه يقبل عددا غير منته من القواسم .

1 غير أولي لأنه يقبل قاسما واحدا فقط هو 1 .

2 هو العدد الزوجي الوحيد الأولي .

3 ، 5 ، 7 ، 11 أعداد أولية .

4 ، 6 ، 8 ، 9 أعداد غير أولية .

- خواص :

الخاصة 1 : كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 يقبل على الأقل قاسما أوليا .

الخاصة 2 : كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر تماما من 1 يقبل قاسما أوليا a حيث $a\leq\sqrt{n}$.

الخاصة 3 : مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غير منتهية .

مثال : إثبات أن العدد 251 أولي

لدينا : $\sqrt{251}\approx15.84$. الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{251}$ هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 . العدد 251 لا يقبل القسمة على كل من 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 و 13

إذن : العدد 251 عدد أولي .

- تحليل عدد طبيعي غير أولي إلى جداء عوامل أولية :

مثال : $2010=2\times3\times5\times67$

2010	2
1005	3
335	5
67	67
1	

ملاحظة : في بعض الحالات يمكن الإسراع في تحليل عدد باستعمال بعض قواسم غير الأولية الظاهرة .

مثال : $400=4\times100=2^{2}\times10^{2}=2^{2}\times(2\times5)^{2}=2^{4}\times5^{2}$

- القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين :

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأصغر أس .

مثال : $PGCD\left(400;2010\right)=2\times5=10$

- المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين :

المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأكبر أس .

مثال : $PPCM\left(400;2010\right)=2^4\times3\times5^2\times67=80400$

تمرين محلول 2 :

حلل كلا من العددين الطبيعيين 156 و 1962 إلى جداء عوامل أولية ثم أحسب قاسمهما المشترك الأكبر ومضاعفهما المشترك الأصغر .

الحل :

تحليل كل من 156 و 1962 إلى جداء عوامل أولية :

$156=2^2\times3\times13$ وَ $1962=2\times3^2\times109$

- حساب $PGCD\left(156;1962\right)$:

$PGCD\left(156;1962\right)=2\times3=6$

- حساب $PPCM\left(156;1962\right)$:

$PPCM\left(156;1962\right)=2^2\times3^2\times13\times109=51012$

تمرين محلول 3 :

a و b عددان طبيعيان حيث : $a=46200$ و $b=4410$

1) حلل كلا من a و b إلى جداء عوامل أولية .

2) احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

3) اجعل $\frac{b}{a}$ كسرا غير قابل للاختزال .

الحل :

1) $a=2^3\times3\times5^2\times7\times11$ و $b=2\times3^2\times5\times7^2$

2) $PGCD\left(a;b\right)=2\times3\times5\times7=210$

3) $\frac{b}{a}=\frac{4410\div210}{46200\div210}=\frac{21}{220}$

تمارين محلولة

تمرين محلول 1 :

نذكر أن الرمز "$\in$" معناه : " ينتمي " وأن الرمز "$\notin$" معناه : " لا ينتمي " .

أكمل الجدول الآتي مستعملا أحد الرمزين "$\in$" أو "$\notin$" .

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{49}$					
$-\frac{35}{7}$					
2.145					
$\frac{1}{7}$					
$\frac{109.8}{12.2}$					
$\sin\frac{\pi}{6}$					
$\sqrt{2}$					
3.14					

تمرين محلول 2 :

بسّط ما يلي : $A=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{5}$ ، $B=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+1$ ، $C=\frac{6^3\times 25}{40^2}$

تمرين محلول 3 :

بيّن أن العدد $A=\frac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{2}-8}{4+\sqrt{2}}$ هو عدد ناطق .

تمرين محلول 4 :

1) احسب كلا من : $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$.

2) استنتج حساب المجموع $S=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$

تمرين محلول 5 :

نعتبر العدد $A=\dfrac{(0.00002)^2}{(0.02)^4}$.

1) بسّط العدد A مع إعطاء النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال .

2) عيّن الكتابة العلمية للعدد A .

تمرين محلول 6 :

1) بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

2) استنتج قيمة المجموع S حيث :

$$S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots+\frac{1}{2011\times 2012}$$

تمرين محلول 7 :

أعط الكتابة العشرية ثم الكتابة العلمية للعدد $A=\dfrac{81\times 10^{27}\times 2\times 10^{-34}}{0.9\times 10^{-3}}$.

تمرين محلول 8 :

أنقل وأكمل الجدول الآتي :

الكتابة العشرية	143100		-0.00607
الكتابة العلمية		3.891×10^{-2}	

تمرين محلول 9 :

أكمل الجدول الآتي :

	8269201	0.000052932	– 583459
الكتابة العلمية			
رتبة مقدار			

تمرين محلول 10 :

حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المعادلة (E) : $3x^2 - 9x = 0$.

تمرين محلول 11 :

أنقل وأكمل الجدول الآتي :

الكتابة العشرية	الكتابة العلمية	رتبة مقدار
0.00452		
	2.011×10^3	
-80.25		
	-5.6×10^3	
4300000		
	6.51×10^2	

تمرين محلول 12 :

أنقل وأكمل الجدول الآتي :

	$\pi = 3.141592..$	$\sqrt{2} = 1.414213..$	$\frac{22}{7} = 3.142857..$
القيمة المضبوطة	π		
المدوّر إلى الوحدة		1	
المدوّر إلى 10^{-2}	3.14		3.14
المدوّر إلى 10^{-3}		1.414	
المدوّر إلى 10^{-5}			3.14286

تمرين محلول 13 :

1) حلل كلا من العددين 2520 و 2646 إلى جداء عوامل أولية .

2) استنتج القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر لهذين العددين .

3) اكتب الكسر $\frac{2646}{2520}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال .

4) بسّط المقدار : $A=\frac{1}{2520}-\frac{1}{2646}$.

تمرين محلول 14 :

نذكر أن العدد الذهبي هو : $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

بيّن أن $\Phi^2=\Phi+1$ ثم استنتج أن : $1+\frac{1}{\Phi}=\Phi$.

تمرين محلول 15 :

نعتبر العدد $A=\frac{x+y}{1+xy}$ حيث x و y عددان حقيقيان يختلفان عن 1 و -1 .

1) احسب A من أجل $x=\frac{1}{3}$ و $y=-\frac{2}{5}$.

2) أ- احسب $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$ و $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$.

ب- نضع : $x=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ و $y=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ ، بيّن أن : $A=\sqrt{3}$.

3) أ- بيّن أنه ، من أجل كل عددين حقيقيين x و y يختلفان عن 1 و -1 فإن $1+xy>0$.

ب- بيّن أنه ، من أجل كل عددين حقيقيين x و y يختلفان عن 1 و -1 فإن

$1+A=\frac{(x+1)(y+1)}{1+xy}$ و $1-A=\frac{(x-1)(y-1)}{1+xy}$.

جـ- بيّن أنه إذا كان $|x|<1$ و $|y|<1$ فإن $|A|<1$.

تمرين محلول 16 :

بُعدا قطعة أرضية مستطيلة الشكل هما $156\,m$ و $90\,m$. يُراد إحاطتها بسياج قائم بأوتاد (أعمدة) حديدية مغروسة في الأرض بنفس المسافة مثنى مثنى ، وفي كل زاوية القطعة يُغرس وتد . علما أن المسافة بين كل وتدين متتاليين ، هي عدد طبيعي مقدر بالمتر ، أقل من $5\,m$ وأكبر من $2\,m$.

- احسب عدد الأوتاد التي يمكن غرسها على محيط القطعة الأرضية .

حلول التمارين

حل التمرين 1 :

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{49}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$-\frac{35}{7}$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
2.145	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\frac{1}{7}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\frac{109.8}{12.2}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\sin\frac{\pi}{6}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\sqrt{2}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
3.14	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$

حل التمرين 2 :

- $A=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{5}=\frac{4-3\times3}{3\times4}\times\frac{1}{5}=-\frac{5}{12}\times\frac{1}{5}=-\frac{1}{12}$
- $B=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+1=\frac{1}{\frac{3+1}{3}}+1=\frac{3}{4}+1=\frac{3+4}{4}=\frac{7}{4}$
- $C=\frac{6^3\times25}{40^2}=\frac{(2\times3)^3\times5^2}{\left(2^3\times5\right)^2}=\frac{2^3\times3^3\times5^2}{2^6\times5^2}=\frac{3^3}{2^3}=3^3\times2^{-3}$

حل التمرين 3 :

$$A=\frac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{2}+8}{4+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(4+\sqrt{2}\right)-\left(4-\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}+8\right)}{\left(4-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}+2-12\sqrt{2}-32+6+8\sqrt{2}}{16-2}=\frac{-24}{14}=-\frac{12}{7}$$

إذن : A هو عدد ناطق .

حل التمرين 4 :

1) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{2\times 3}=\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ ، $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ و $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$

2) استنتاج حساب المجموع S :

$$S=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{5-1}{10}=\frac{2}{5}$$

حل التمرين 5 :

1) تبسيط A : $A=\frac{(0.00002)^2}{(0.02)^4}=\frac{\left(2\times 10^{-5}\right)^2}{\left(2\times 10^{-2}\right)^4}=\frac{4\times 10^{-10}}{16\times 10^{-8}}=\frac{1}{400}$

2) الكتابة العلمية للعدد A :

$$A=\frac{1}{400}=\frac{1}{4}\times 10^{-2}=0.25\times 10^{-2}=2.5\times 10^{-3}$$

حل التمرين 6 :

1) تبيان أنه ، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$:

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$

2) استنتاج قيمة المجموع S :

من السؤال السابق نستنتج أن : $\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ ،

$\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4\times 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$ ، ... ، $\frac{1}{2011\times 2012}=\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}$

ومنه : $S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots+\frac{1}{2011\times 2012}$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}$$

وبالتالي : $S = 1 - \frac{1}{2012} = \frac{2012-1}{2012} = \frac{2011}{2012}$

إذن : $S = \frac{2011}{2012}$

حل التمرين 7 :

$$A = \frac{81\times10^{27}\times2\times10^{-34}}{0.9\times10^{-3}} = \frac{81\times2\times10^{27}\times10^{-34}}{9\times10^{-4}}$$

$$= \frac{81\times2}{9}\times10^{27-34+4} = 18\times10^{-3} = 1.8\times10^{-2}$$

حل التمرين 8 :

الكتابة العشرية	143100	0.03891	-0.0607
الكتابة العلمية	1.431×10^{5}	3.891×10^{-2}	6.07×10^{-2}

حل التمرين 9 :

	-583459	0.000052932	8269201
الكتابة العلمية	-5.83459×10^{5}	5.2932×10^{-5}	8.269201×10^{6}
رتبة مقدار	-6×10^{5}	5×10^{-5}	8×10^{7}

حل التمرين 10 :

طريقة خاطئة

نكتب المعادلة (E) كما يلي : $3x^2 = 9x$

وبقسمة طرفي هذه المعادلة على $3x$

ينتج : $x = 3$.

إذن : مجموعة حلول المعادلة (E) هي

$S = \{3\}$

هذه الطريقة خاطئة لأنه لا يمكن القسمة على x (يمكن أن يكون معدوما) .

طريقة صحيحة

لدينا : $3x^2 - 9x = 0$ وبإخراج $3x$

كعامل مشترك نجد : $3x(x-3) = 0$

ونعلم إنه إذا كان $AB = 0$ فإن $A = 0$

أو $B = 0$.

نستنتج أن : $3x = 0$ أو $x - 3 = 0$.

إذن : مجموعة حلول المعادلة (E) هي

$S = \{0;3\}$

حل التمرين 11 :

الكتابة العشرية	الكتابة العلمية	رتبة مقدار
0.00452	4.52×10^{-3}	5×10^{-3}
2011	2.011×10^{3}	2×10^{3}
-80.25	-8.025×10	-8×10
-5600	-5.6×10^{3}	-6×10^{3}
4300000	4.3×10^{6}	4×10^{6}
651	6.51×10^{2}	7×10^{2}

حل التمرين 12 :

	$\pi=3.141592..$	$\sqrt{2}=1.414213..$	$\frac{22}{7}=3.142857..$
القيمة المضبوطة	π	$\sqrt{2}$	$\frac{22}{7}$
المدوّر إلى الوحدة	3	1	3
المدوّر إلى 10^{-2}	3.14	1.41	3.14
المدوّر إلى 10^{-3}	3.142	1.414	3.143
المدوّر إلى 10^{-5}	3.14159	1.41421	3.14286

حل التمرين 13 :

1) $2520=2^3\times3^2\times5\times7$ و $2646=2\times3^3\times7^2$.

2) تعيين $PGCD\left(2520;2646\right)$ و $PPCM\left(2520;2646\right)$:

- $PGCD\left(2520;2646\right)=2\times3^2\times7=126$.
- $PPCM\left(2520;2646\right)=2^3\times3^3\times5\times7^2=52920$.

3) للحصول على كسر غير قابل للاختزال ، نقوم بقسمة كل من البسط والمقام على القاسم المشترك الأكبر لهما .

ومنه : $\frac{2646}{2520}=\frac{2646\div 126}{2520\div 126}=\frac{21}{20}$

4) لتبسيط A ، نقوم بتوحيد المقامين 2520 و 2646 وذلك باستعمال المضاعف المشترك الأصغر لهما .

ومنه : $\frac{1}{2520}-\frac{1}{2646}=\frac{21-20}{52920}=\frac{1}{52920}$

حل التمرين 14 :

1) تبيان أن $\Phi^2=\Phi+1$:

$$\Phi^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{2^2}=\frac{1+5+2\sqrt{5}}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{4}$$

$$=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\frac{2+1+\sqrt{5}}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\Phi$$

إذن : $\Phi^2=\Phi+1$.

استنتاج أن $1+\frac{1}{\Phi}=\Phi$:

من المساواة $\Phi^2=\Phi+1$ وبقسمة الطرفين على العدد غير المعدوم Φ ينتج :

$\frac{\Phi^2}{\Phi}=\frac{\Phi+1}{\Phi}$ ومنه : $\Phi=\frac{\Phi}{\Phi}+\frac{1}{\Phi}$ وبالتالي : $\Phi^2=1+\Phi$ إذن : $\Phi^2=\Phi+1$

حل التمرين 15 :

1) حساب A من أجل $x=\frac{1}{3}$ و $y=-\frac{2}{5}$:

$$A=\frac{x+y}{1+xy}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{15}}=\frac{\frac{5-6}{15}}{\frac{15-2}{15}}=\frac{-\frac{1}{15}}{\frac{13}{15}}=-\frac{1}{15}\times\frac{15}{13}=-\frac{1}{13}$$

2) أ- حساب $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$ و $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$:

تذكير : $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$ و $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}\right)=3+2-2\sqrt{6}=5-2\sqrt{6}$$

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+2\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}\right)=3+2+2\sqrt{6}=5+2\sqrt{6}$$

ب- تبيان أن $A=\sqrt{3}$:

تذكير : $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

لدينا : $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=5-2\sqrt{6}$ ومنه : $x=\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

ولدينا : $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=5+2\sqrt{6}$ ومنه : $y=\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

وبالتالي : $A=\dfrac{x+y}{1+xy}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

إذن : $A=\sqrt{3}$

3) أ- تبيان أنه ، من أجل كل عددين x و y من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ ، $1+xy>0$:

إذا كان $|x|<1$ و $|y|<1$ فإن $|x|\times|y|<1$ أي : $|xy|<1$

ومنه : $-1<xy<1$ نستنتج أن : $1+xy>0$ ... (1)

ب- تبيان أن $1+A=\dfrac{(x+1)(y+1)}{1+xy}$:

من أجل كل عددين حقيقيين x و y يختلفان عن 1 و -1 فإن

$$1+A=1+\frac{x+y}{1+xy}=\frac{1+xy+x+y}{1+xy}=\frac{(xy+y)+(x+1)}{1+xy}$$

$$=\frac{y(x+1)+(x+1)}{1+xy}=\frac{(x+1)(y+1)}{1+xy}$$

- تبيان أن $1-A=\dfrac{(x-1)(y-1)}{1+xy}$:

من أجل كل عددين حقيقيين x و y يختلفان عن 1 و -1 فإن

$$1-A=1-\frac{x+y}{1+xy}=\frac{1+xy-x-y}{1+xy}=\frac{(xy-y)-(x-1)}{1+xy}$$

$$=\frac{y(x-1)-(x-1)}{1+xy}=\frac{(x-1)(y-1)}{1+xy}$$

ب- تبيان أنه إذا كان $|x|<1$ و $|y|<1$ فإن $|A|<1$:

بما أن $|x|<1$ فإن $-1<x<1$ ومنه : $x+1>0$ و $x-1<0$

بما أن $|y|<1$ فإن $-1<y<1$ ومنه : $y+1>0$ و $y-1<0$

من $x+1>0$ و $y+1>0$ نستنتج أن $(x+1)(y+1)>0$ ... (2)

ومن $x-1<0$ و $y-1<0$ نستنتج أن $(x-1)(y-1)>0$ ... (3)

من (1) و(2) نستنتج أن : $\dfrac{(x+1)(y+1)}{1+xy}>0$ أي : $1+A>0$ ومنه : $A>-1$

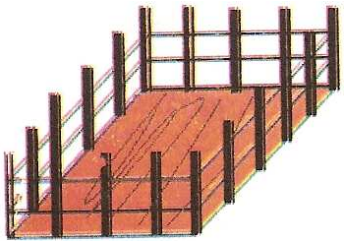
ومن (1) و(3) نستنتج أن : $\dfrac{(x-1)(y-1)}{1+xy}>0$ أي : $1-A>0$ ومنه : $A<1$

لدينا : $A>-1$ و $A<1$ وعليه : $-1<A<1$ أي : $|A|<1$.

إذن : إذا كان $|x|<1$ و $|y|<1$ فإن $|A|<1$.

حل التمرين 16 :

- حساب عدد الأوتاد التي يمكن غرسها على محيط القطعة الأرضية :



المسافة بين عمودين متتاليين هي عدد طبيعي N
حيث $2<N<5$ وبالتالي :
إمّا $N=3$ وإمّا $N=4$.
العدد 4 يقسم 156 ولا يقسم 90 ، فهو ليس قاسما مشتركا للعددين 90 و 156 . بينما العدد 3 يقسم 156 ويقسم 90 ، فهو قاسم مشترك للعددين 90 و 156 .
(نأخذ قاسما مشتركا لأنه في كل زاوية يُغرس عمود)
نستنتج أن المسافة بين كل عمودين متتاليين هي $3\,m$.
محيط القطعة الأرضية هو $2(90+156)=492\,m$
عدد الأعمدة هو نفس عدد الفراغات الموجودة بين عمودين متتاليين ، وبالتالي فإن
عدد الأعمدة هو $\dfrac{492}{3}=164$.

إذن : عدد الأوتاد التي يمكن غرسها على محيط القطعة الأرضية هو 164 .