**البرهان بالتراجع**

البرهان بالتراجع أو الإستدلال بالتراجع هو نمط من أنماط البراهان الرياضي و نفكر فيه عندما نريد البرهان على صحة خاصية معينة متعلقة بعدد طبيعي، و قلت نفكر فيه أولا و لم أقل نستعمله دائما لأنه أحيانا تكون لدينا طريقة سهلة و أسرع من البرهان بالتراجع و ذلك باستعمال الأسئلة السابقة و المعطيات أو توظيف مكتسبات قبلية من السنوات أو الدروس السابقة، فإن لم نجد طريقة سهلة نتبع خطوات البرهان بالتراجع و هي كالتالي:

* مرحلة التحقيق: نتحقق من صحة الخاصية من أجل أول قيمة للعدد الطبيعي $n$ و ذلك بتعويض قيمة $n$ الأولية في الخاصية ( أحيانا في طرفي الخاصية ) .
* مرحلة الفرضية: نكتب دائما الجملة التالية: نفرض أن الخاصية $p\left(n\right)$ صحيحة أي أن " و نكتب العلاقة المراد برهان صحتها ".
* مرحلة البرهان و هي المرحلة المهمة في هذا النمط من البراهان و نكتب فيها " نبرهن صحة $p\left(n+1\right)$ أي نبرهن أن ( ونستبدل $n$ بالعدد $n+1$ في العلاقة المراد برهانها )"

و هنا ركز على هاتين الطريقتين:

* إذا اشتملت الخاصية على المساواة فننطلق من طرف مستعملين الفرضية لنصل إلى الطرف الثاني.
* إذا اشتملت الخاصية على متباينة ننطلق من الفرضية و نحاول تشكيل العبارة المكتوبة في مرحلة البرهان بعد استبدال $n$ بالعدد $n+1$ .

**تطبيق1:** ( حالة مساواة )

 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا:$0+1+2+3+…+n=\frac{n\left(n+1\right)}{2}$ ..... (\*)

**الحل:**

 لدينا خاصية متعلقة بعدد طبيعي $n$ إذن نفكر في البرهان بالتراجع و لكن نسئل أنفسنا هل توجد طريقة أحسن و أسرع؟ للإجابة على هذا السؤال يجب أن يكون لديك التركيز الجيد و قوة الملاحظة و مفاهيم قبلية مهظومة، بمعنى أن في هذه الحالة نلاحظ أن الخاصية عبارة عن مجموع حدود متتالية حسابية أساسها 1 و حدها الأول هو 0كذلك.

 و نعلم أن : $S\_{n}=\frac{الحدود عدد}{2}\left(المجموع في الأول الحد+المجموع فيالأخير الحد\right)=\frac{n+1}{2}\left(n\right)=\frac{n\left(n+1\right)}{2}$

$$الحدود عدد=الأخير الحد دليل-الأول الحد دليل+1$$

**طريقة البرهان بالتراجع:**

 نسمي $P\left(n\right)$ الخاصية المعطاة ( العلاقة (\*)

* من أجل القيمة الأولى لـ $n$ أي: $n=0$

الطرف الأول يساوي 0 و الطرف الثاني يساوي 0 و ذلك بعد تعويض $n$ بـ 0

 إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$ أي: $P\left(0\right)$ صحيحة.

ملاحظة: الطرف الأول هو مجموع يبدأ دائما من 0 و ينتهي عند العدد $n$ ، مثلا إذا كان $n=3$ فالطرف الأول هو مجموع يبدأ من 0 و ينتهي عند العدد 3 أي: $0+1+2+3=6$

و الطرف الثاني هو: $\frac{3\left(3+1\right)}{2}=\frac{3×4}{2}=\frac{12}{2}=6$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=3$ اي $P\left(3\right)$ صحيحة.

* *نفرض أن* $P\left(n\right)$ *صحيحة أي:* $0+1+2+3+…+n=\frac{n\left(n+1\right)}{2}$
* *نبرهن أن* $P\left(n+1\right)$ *صحيحة أي نبرهن أن:*

$$0+1+2+3+…+n+\left(n+1\right)=\frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{2}$$

*في هذه الحالة لدينا مساواة فننطلق من الطرف الأول و نصل إلى الطرف الثاني مستعملين الفرضية.*

***ملاحظة:*** *الطرف الأول للخاصية* $P\left(n+1\right)$ *يبدا كما قلنا دائما من الصفر و ينتهي عند العدد(*$ n+1$*) مرورا بالعدد* $n$ *.*

$$0+1+2+3+…+n+\left(n+1\right)= \frac{n\left(n+1\right)}{2}+n+1$$

$$=\frac{n\left(n+1\right)+2\left(n+1\right)}{2}$$

$=\frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{2}$ *( و هذا بأخد* $n+1$ *كعامل مشترك في البسط )*

اذن الخاصية $P\left(n\right)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$ .

**تطبيق 2:**( حالة متراجحة أي الخاصية تشمل متباينة )

 لتكن $\left(U\_{n}\right)$ المتتالية المعرفة بـ: $U\_{0}=1$ و من أجل كل $n$ من Ν : $U\_{n+1}=\frac{3U\_{n}+4}{9}$

ــ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $U\_{n}>\frac{2}{3}$ .......... (\*\*)

**الحل:**

نسمي $P\left(n\right)$ الخاصية المعطاة ( العلاقة (\*\*)

لا توجد معطيات كافية أو أسئلة سابقة للإجابة على السؤال بطرقة أخرى لدى سنستعمل البرهان أو الإستدلال بالتراجع .

* *من أجل القيمة الأولى لـ* $n$أي: $n=0$

$U\_{0}=1$ *و* $1>\frac{2}{3}$ *إذن* $P\left(0\right)$ صحيحة.

* *نفرض أن* $P\left(n\right)$ *صحيحة أي:* $U\_{n}>\frac{2}{3}$
* *نبرهن أن* $P\left(n+1\right)$ *صحيحة أي نبرهن أن:* $U\_{n+1}>\frac{2}{3}$

*في هذه الحالة لدينا متراجحة أي الخاصية تتضمن متباينة فنفكر في الإنطلاقة من الفرضية فنكتب:*

*نشكل عبارة* $U\_{n+1}$ *انطلاقا من* $U\_{n}$ *أي:*

$U\_{n}>\frac{2}{3}$ *معناه* $3U\_{n}>2$ *( ضرب الطرفين في العدد 3 )*

 *معناه* $3U\_{n}+4>6$ *( اضافة للطرفين العدد 4 )*

 *معناه* $\frac{3U\_{n}+4}{9}>\frac{6}{9}$ *( ضرب الطرفين في العدد* $\frac{1}{9}$ *)*

 *معناه* $\frac{3U\_{n}+4}{9}>\frac{2}{3}$ *( بعد الإختزال على العدد 3 )*

 *معناه* $U\_{n+1}>\frac{2}{3}$ *و هو المطلوب*

اذن الخاصية $P\left(n\right)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$ .