**AHMED FIZAZI**
**Maître assistant chargé de cours**

# CAHIER

**De la**

# MECANIQUE DU POINT MATERIEL

**(Version en Français)**

## COURS SIMPLIFIES
## 100 EXERCICES CORRIGES
**(Enoncés en arabe et en français)**
## LEXIQUE DE TERMINOLOGIE
**(français-arabe, Arabe-français)**

**Destiné aux étudiants de première année de l'enseignement supérieur**

**LMD**

**Science de la matière et sciences technologiques**

http://sites.google.com/site/fizaziphysique
http://sites.google.com/site/physiquefizazi

# Sommaire


Préface..... ii
Introduction_Principales branches de la mécanique…..... vii
Le programme……... ix
**I. RAPPELS MATHEMATIQUES**……..... 1
**I-A. L'ANALYSE DIMENSIONNELLE**…….. 1
1. Les unités……..... 1
a. Les unités fondamentales……..... 1
b. Les unités dérivées……..... 1
c. Les unités secondaires……..... 1
d. Unité supplémentaire……..... 1
e. Les multiples et les sous multiples……..... 1
2. Les équations aux dimensions……..... 2
a. Définition……..... 2
b. Quel est l'intérêt de cette expression ? ……..... 2
c. Comment définir $\alpha, \beta, \gamma$ ? ……..... 2
d. Généralisation……... 4
**EXERCICES 1.1 à 1.6**……..... 5
**SOLUTION DES EXERCICES 1.1 à 1.6**…… 7
I-B. **CALCUL D'INCERTITUDES**……..... 9
1. La grandeur physique……..... 9
2. Notion de mesure……..... 9
3. Théorèmes des incertitudes ……..... 10
**EXERCICES 1.7 à 1.12**……..... 13
**SOLUTION DES EXERCICES 1.7 à 1.12**…… 14
II. **RAPPELS SUR LE CALCUL VECTORIEL**…… 17
1. Grandeur scalaire……..... 17
2. Grandeur vectorielle……..... 17
3. Représentation graphique d'un vecteur……..... 14
4. Le vecteur unitaire……..... 17
5. La somme géométrique des vecteurs……..... 17
6. Les composantes d'un vecteur……..... 20
7. Le produit scalaire……..... 23
8. Le produit vectoriel……..... 24
9. Le produit mixte…… 26
10. Moment d'un vecteur par rapport à un point de l'espace…… 26
11. Moment d'un vecteur par rapport à un axe……. 26
12. Gradient, divergence, rotationnel……..... 27
13. Le Laplacien……..... 29
**EXERCICES 2.1 à 2.7**……..... 31
**SOLUTION DES EXERCICES 2.1 à 2.7**…….. 33
III. **PRINCIPAUX SYSTEMES DE COORDONNEES**…….. 36
1. Repères d'inertie galiléens……..... 36
2. Principaux référentiels galiléens …….... 36
3. Les coordonnées cartésiennes……..... 37
4. Les coordonnées polaires…… 38
5. Les coordonnées cylindriques……..... 39
6. Les coordonnées sphériques……..... 40


Ahmed FIZAZI Univ BECHAR

7. Les coordonnées curvilignes……..... 42
**EXERCICES 3.1 à 3.7**……..... 43
**SOLUTION DES EXERCICES 3.1 à 3.7……** 45
IV. **LA CINEMATIQUE**……..... 51
A. Les caractéristiques du mouvement……..... 51
1. Introduction……..... 51
2. Position du mobile……..... 51
3. Les équations horaires…..……..... 52
4. Le vecteur vitesse……..... 53
5. Le vecteur accélération…… 54
**EXERCICES 4.1 à 4.6**……..... 57
**SOLUTION DES EXERCICES 4.1 à 4.6**…… 59
B. **LE MOUVEMENT RECTILIGNE**…….... 64
1. Le mouvement rectiligne uniforme……..... 64
2. Le mouvement rectiligne uniformément accéléré…… 65
3. Le mouvement rectiligne à accélération variable…….. 66
4. Le mouvement rectiligne sinusoïdal……..... 67
**EXERCICES 4.8 à 4.13**……..... 71
**SOLUTION DES EXERCICES 4.8 à 4.13**…… 73
C. **LE MOUVEMENT PLAN**……..... 77
1. Etude du mouvement en coordonnées polaires…… 77
2. Les composantes normale et tangentielle de la vitesse et de l'accélération dans le repère de Frenet…… 79
**EXERCICES 4.14 à 4.21**……..... 81
**SOLUTION DES EXERCICES 4.14 à 4.21……..** 85
D. **LE MOUVEMENT DANS L'ESPACE……...** 93
1. Etude du mouvement en coordonnées cylindriques …… 93
2. Etude du mouvement en coordonnées sphériques…… 95
**EXERCICES 4.22 à 4.27**……..... 99
**SOLUTION DES EXERCICES 4.22 à 4.27**…… 102
E. **LE MOUVEMENT RELATIF**……..... 108
1. Changement de repère……..... 108
2. Vitesse relative de deux mobiles……..... 108
3. Conventions et symboles……..... 110
4. Cas du mouvement de rotation……..... 115
**EXERCICES 4.28 à 4.35**……..... 120
**SOLUTION DES EXERCICES 4.28 à 4.35**…….. 124
V. **LA DYNAMIQUE**……..... 138
1. Principe d'inertie galiléen……..... 138
2. La quantité de mouvement……..... 138
3. Les autres lois de Newton……..... 139
4. Notion de force et loi de force……..... 140
5. Mouvement d'un projectile dans le champ de gravitation terrestre…….. 141
6. Loi de la gravitation universelle…… 142
7. Forces de liaison ou forces de contact ...…….. 145
8. Forces de frottement…….. 145
9. Les forces élastiques…… 147
10. Les forces d'inertie ou pseudo forces…….. 148
11. Moment d'une force……... 150
12. Le moment cinétique…….. 152

**EXERCICES 5.1 à 5.20…….. 156**
**SOLUTION DES EXERCICES 5.1 à 5.20…… 167**
VI. **TRAVAIL ET ENERGIE…… 195**
1. Travail et Puissance…….. 195
2. Energie cinétique……... 198
3. Les force conservatives ou dérivant d'un potentiel……..…. 199
4. Energie potentiel……...…… 200
5. Expression de champ de force conservative à partir de l'énergie potentielle dont il dérive……. 203
6. L'énergie mécanique…… 205
7. Collision de particules…… 209
8. Discussion des courbes de l'énergie potentielle…… 211
9. Forces non conservatives…… 213
**EXERCICES 6.1 à 6.15…….. 214**
**SOLUTION DES EXERCICES 6.1 à 6.15…… 221**
**LEXIQUE DE TERMINOLOGIE FRANÇAIS-ARABE…….. 239**
**LEXIQUE DE TERMINOLOGIE ARABE-FRANÇAIS……... 246**
**ANNEXES**
**1. Alphabet grec…….. 253**
**2. Gradient, divergence et Laplacien dans différentes coordonnées…….. 254**
**3. Formules de dérivation…… 257**
**4. Formules d'intégration…… 259**
**5. Quelques équations différentielles……. 261**
**6. Formulaire trigonométrique…….. 263**

**OUVRAGES……. 265**

Ahmed FIZAZI _ Univ-BECHAR

# B-I/ CALCUL DES INCERTITUDES
# حـســاب الإرتــيــابــات

## 1/ La grandeur physique (المقدار الفيزيائي):

Une grandeur physique est tout ce qui prend, dans des conditions bien déterminées, une valeur numérique définie qui peut varier (augmenter ou diminuer) si ces conditions elles mêmes varient.

## 2/ Notion de mesure (مفهوم القياس) :

De la mesure de toute grandeur physique ne peut résulter qu'une valeur approchée et ce pour les raisons suivantes :

- Les erreurs systématiques : Ce sont celles qu'entraîne l'emploi de méthodes ou d'instruments imparfaits.

Dans toutes les mesures précises, les erreurs systématiques sont autant que possible éliminées par un contrôle soigneux des instruments de mesure et, souvent aussi, par l'emploi successif de différentes méthodes.

- Les erreurs accidentelles qui sont imputables à l'imperfection des sens de l'opérateur. Ces erreurs peuvent être minimisées par le bon choix des méthodes de mesure appropriées, des instruments perfectionnés et en s'exerçant à la pratique des mesures.

En résumé le résultat de toute mesure comporte une erreur !!

Quelque soit la précision de la mesure d'une grandeur $X$, nous n'obtenons qu'une valeur approchée $x$. La différence entre la valeur exacte et la valeur approchée s'appelle **erreur absolue** (الخطأ المطلق) qu'on désigne par $\delta x$ :

$$\boxed{\delta x = x - x_0} \qquad \textbf{(1.5)}$$

Cette erreur est en général inconnue. Partant des caractéristiques de l'appareil utilisé et de la méthode utilisée, nous pouvons toujours nous assurer que l'erreur commise ne dépasse pas une valeur limite absolue connue sous le nom de **incertitude absolue** (إرتياب مطلق) de la grandeur $X$ .

$$\boxed{|\delta x| \le \Delta x} \qquad \textbf{(1.6)}$$

Nous déduisons que la valeur exacte est comprise entre deux valeurs limites connues : $x - \Delta x$ et $x + \Delta x$.

Pour plus de précision, nous pouvons donner une définition mathématique à l'incertitude absolue en suivant le raisonnement suivant :

Soit une grandeur $X = f(x, y, z)$ où $x, y$ et $z$ représentent des grandeurs mesurables comportant des incertitudes.

L'incertitude absolue de $X$ , c'est-à-dire $\Delta X$ , est matérialisée par la différentielle $dX$ telle que $\Delta X \le |dX|$.

Puisque le signe de l'erreur est inconnu il est tout à fait logique de prendre la valeur absolue pour les différentielles.

Sachant que $dX = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

L'incertitude absolue $\Delta X$ de $X$ s'écrit donc :

$$\Delta X \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z \qquad (1.7)$$

❖ **Définition** : On appelle **incertitude relative** (الإرتياب النسبي) d'une grandeur $X$ le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur approchée, soit $\frac{\Delta X}{X}$, et elle est égale au module de la différentielle logarithmique :

$$\frac{\Delta X}{X} = \left|\frac{dX}{X}\right| \qquad (1.8)$$

## 3/ Théorème des incertitudes (نظرية الارتيابات):

❖ **Incertitude absolue d'une somme algébrique** (الارتياب المطلق لمجموع جبري):

➢ **L'incertitude absolue d'une somme algébrique de nombres incertains est égale à la somme arithmétique des incertitudes absolues de ces nombres.**

Soit la somme algébrique : $y = nu + pv - qw + k$ où $n, p$ et $q$ sont des coefficients constants et positifs, k une constante sans incertitude et $\Delta u, \Delta v$ et $\Delta w$ les incertitudes absolues respectives de $u, v$ et $w$. L'incertitude absolue de $y$ est $\Delta y = n\Delta u + p\Delta v + q\Delta w$ .

$$y = nu + pv - qw + k \Rightarrow \Delta y = |n|\Delta u + |p|\Delta v + |q|\Delta w \qquad (1.9)$$

**Important** : Nous écrivons toujours le résultat d'une mesure sous la forme :

$$y_0 = (y \pm \Delta y)\,u \qquad (1.10)$$

$y_0$ : valeur exacte $y$ : valeur approchée

$\Delta y$ : incertitude absolue $u$ : unité de la grandeur

**Exemple 1.6 :** En déterminant la masse $M$ par la méthode de la double pesée, on obtient $m_1 = 12.762g$ et $m_2 = 57.327g$. Sachant que l'incertitude absolue sur $m_1$ et $m_2$ est de $\Delta m = \pm 2mg$, calculer $M$ et $\Delta M$ .

**Réponse** :

$$M = m_2 - m_1 \Rightarrow M = 44.565g$$
$$\Delta M = \Delta m_1 + \Delta m_2 = 4mg = 0.004g$$

Ainsi, le résultat s'écrit toujours sous la forme ci-dessous de telle façon que, le nombre de chiffres significatifs après la virgule dans la valeur approchée, soit le même que dans l'incertitude absolue.

$$M = (44.565 \pm 0.004)g$$

Tandis que l'incertitude relative sur $M$ est :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\frac{\Delta M}{M}=\frac{0.004}{44.565}\Rightarrow\boxed{\frac{\Delta M}{M}=9.10^{-5}}$$

ou

$$\frac{\Delta M}{M}=\frac{\Delta m_1+\Delta m_2}{m_2-m_1}\Rightarrow\boxed{\frac{\Delta M}{M}=9.10^{-5}}$$

❖ **L'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient** (الارتاب النسبي لجداء أو كسر)

Nous devons distinguer deux cas :

**Premier cas : grandeurs indépendantes.**

**Enoncé du théorème :** L'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient dont les grandeurs sont indépendantes les unes des autres est égale à la somme arithmétique des incertitudes relatives sur chaque terme.

**Preuve mathématique** :

Soit le produit $y=ku^n v^p w^{-q}$ où $n,p$ et $q$ sont des nombres réels et $k$ une constante connue avec exactitude ; les incertitudes absolues sur $u,v$ et $w$ sont respectivement $\Delta u$ , $\Delta v$ et $\Delta w$.

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membres de l'équation

$$\log y=\log\left[ku^n v^p w^{-q}\right]$$

D'après les propriétés du logarithme nous pouvons écrire :

$$\log y=\log k+n\log u+p\log v-q\log w$$

Ecrivons à présent la différentielle logarithmique et développons ensuite :

$$\frac{dy}{y}=\frac{dk}{k}+n\frac{du}{u}+p\frac{dv}{v}-q\frac{dw}{w}$$

Nous arrivons à l'expression de l'incertitude relative (après avoir changé le signe – en signe +) et en prenant l'incertitude absolue des nombres :

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y}=|n|\frac{\Delta u}{u}+|p|\frac{\Delta v}{v}+|q|\frac{\Delta w}{w}} \qquad \textbf{(1.11)}$$

Nous retiendrons la règle générale qui gère ce type de calcul :

- Remplacer tous les symboles $di$ par $\Delta i$
- Changer le signe – par le signe +
- Prendre les grandeurs qui ne contiennent pas de $\Delta$ en valeurs absolues

**Deuxième cas : grandeurs dépendantes les unes des autres.**

Soit $$y=k\frac{u^\alpha v^\beta}{(u+v)^\gamma t^\delta}$$

En suivant la même démarche que précédemment nous obtenons :

$$\log y=\log k+\alpha\log u+\beta\log v-\gamma\log(u+v)-\delta\log t$$

A.FIZAZI - Univ-BECHAR

$$\frac{dy}{y}=\frac{dk}{k}+\alpha\frac{du}{u}+\beta\frac{dv}{v}-\gamma\frac{du}{u+v}-\gamma\frac{dv}{u+v}-\delta\frac{dt}{t}$$

Factorisons tous les termes ayant le même $di$ et changeons le signe – par le signe + :

$$\frac{dy}{y}=\frac{dk}{k}+du\left(\frac{\alpha}{u}-\frac{\gamma}{u+v}\right)+dv\left(\frac{\beta}{v}-\frac{\gamma}{u+v}\right)-\delta\frac{dt}{t}$$

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y}=\left|\frac{\alpha}{u}-\frac{\gamma}{u+v}\right|\Delta u+\left|\frac{\beta}{v}-\frac{\gamma}{u+v}\right|\Delta v+\left|\frac{\delta}{t}\right|\Delta t} \quad \textbf{(1.12)}$$

**Exemple1.7 :** Calculer l'incertitude relative puis l'incertitude absolue de l'énergie électrique exprimée par la formule $Q=RI^2t$ .

**Réponse :** selon le théorème de l'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient, nous pouvons écrire :

$$Q=RI^2t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta Q}{Q}=\frac{\Delta R}{R}+2\frac{\Delta I}{I}+\frac{\Delta t}{t}$$

Nous en déduisons l'expression de l'incertitude absolue sur $Q$ :

$$\Delta Q=Q\left(\frac{\Delta R}{R}+2\frac{\Delta I}{I}+\frac{\Delta t}{t}\right)$$

A.FIZAZI _ Univ-BECHAR

# EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

| | |
|---|---|
| **Exercice 1.7**<br>Pour mesurer l'épaisseur d'un cylindre creux on mesure les diamètres intérieur $(D_1)$ et extérieur $(D_2)$ et on trouve :<br>$D_1 = (19,5 \pm 0,1)\,mm$ , $D_2 = (26,7 \pm 0,1)\,mm$<br>Donner le résultat de la mesure et sa précision. | **تمرين 7.1**<br>لقياس سمك اسطوانة مجوفة نقيس القطرين الداخلي $(D_1)$ و الخارجي $(D_2)$ فنجد:<br>$D_1 = (19,5 \pm 0,1)\,mm$ ، $D_2 = (26,7 \pm 0,1)\,mm$<br>إعط نتيجة القياس و دقته. |
| **Exercice 1.8**<br>Soit à déterminer la masse volumique $(\rho)$ de la substance d'un cube homogène à partir de la mesure de sa masse $(m)$ et de son arête $(a)$ . Ecrire le résultat de la mesure. | **التمرين 8.1**<br>نريد تعيين الكتلة الحجمية $(\rho)$ لمادة مكعب متجانس انطلاقا من قياس كتلته $(m)$ و ضلعه $(a)$ .أكتب نتيجة القياس. |
| **Exercice 1.9**<br>La densité $(\delta)$ d'un corps solide par application du théorème d'Archimède est : $\delta = \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}$<br>Où $m_1, m_2, m_3$ sont les résultats de trois mesures de masses effectuées, successivement, avec la même balance. Trouver l'incertitude relative sur $\delta$ . | **التمرين 9.1**<br>الكثافة $(\delta)$ لجسم صلب بتطبيق نظرية أرخميدس هي : $\delta = \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}$<br>حيث $m_3, m_2, m_1$ تمثل نتائج ثلاث قياسات متتالية للكتل باستعمال نفس الميزان. جد الإرتياب النسبي لـــ $\delta$ . |
| **Exercice 1.10**<br>Calculer l'incertitude relative sur la mesure de la capacité $(C)$ d'un condensateur équivalent à deux condensateurs montés :<br>a/ en parallèle b/ en série , et cela en fonction des précisions sur $(C_1)$ et $(C_2)$ . | **التمرين 10.1**<br>أحسب الارتياب النسبي المرتكب على قياس السعة $(C)$ لمكثفة مكافئة لمكثفتين موصلتين على:<br>ا/ التفرع ب/ التسلسل ، و ذلك بدلالة الدقة على كل من $(C_1)$ و $(C_2)$. |
| **Exercice 1.11**<br>Soit l'expression : $\mu = \frac{m_2(\theta_2 - \theta_m)}{\theta_m - \theta_1} - m_1$<br>Calculer l'incertitude absolue sur $\mu$ en fonction des incertitudes absolues $\Delta\theta_m, \Delta\theta_2, \Delta\theta_1, \Delta m_2, \Delta m_1$. | **التمرين 11.1**<br>لتكن العبارة : $\mu = \frac{m_2(\theta_2 - \theta_m)}{\theta_m - \theta_1} - m_1$<br>أحسب الارتياب المطلق على $\mu$ بدلالة الارتيابات المطلقة $\Delta\theta_m, \Delta\theta_2, \Delta\theta_1, \Delta m_2, \Delta m_1$. |
| **Exercice 1.12**<br>Soit la relation : $y = y_0.e^{-wt}$.<br>Calculer l'incertitude absolue sur $y$ en fonctions des incertitudes absolues $\Delta\omega, \Delta t, \Delta y_0$. | **التمرين 12.1**<br>لتكن العلاقة : $y = y_0.e^{-wt}$<br>أحسب الارتياب المطلق على $y$ وذلك بدلالة الارتيابات المطلقة $\Delta\omega, \Delta t, , \Delta y_0$. |

## Corrigés des exercices 1.7 à 1.12: حلول التمارين من 7.1 إلى 12.1

**Exercice1.7 :**

Calculons d'abord l'épaisseur du cylindre : $\boxed{e=\frac{D_2-D_1}{2}}$ ; $\boxed{e=3,6mm}$

L'incertitude absolue sur l'épaisseur est donc : $\boxed{\Delta e=\frac{\Delta D_2+\Delta D_1}{2}}$ ; $\boxed{\Delta e=\pm 0,1mm}$

Ecrivons le résultat de la mesure : $\boxed{e=(3,6\pm 0,1)mm}$

Nous en déduisons l'incertitude relative : $\frac{\Delta e}{e}=\frac{0,1}{3,6}\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta e}{e}=0,03=3\%}$

**Exercice 1.8 :**

Calcul de la masse volumique : $\boxed{\rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{a^3}}$ $\boxed{\rho=3,041 g/cm^3}$

Nous déduisons l'incertitude absolue de l'incertitude relative :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{\Delta m}{m}+3\frac{\Delta a}{a}\Rightarrow \boxed{\Delta\rho=\rho\left(\frac{\Delta m}{m}+3\frac{\Delta a}{a}\right)} \quad \boxed{\Delta\rho\simeq 0,02 g/cm^3}$$

D'où l'incertitude relative : $\frac{\Delta\rho}{\rho}=0,0063=6,3\,{}^{0}/_{00}$

Ecriture du résultat de la mesure : $\boxed{\rho=(3,04\pm 0.02)\,g/cm^3}$

**Remarque importante :**

Le nombre des chiffres significatifs conservés dans un résultat ne doit jamais impliquer une précision supérieure à celle des données.

Un calcul ne peut qu'aboutir à un résultat dont l'incertitude sera au moins égale à celle de la donnée la moins précise.

**Exercice 1.9 :**

Nous avons l'expression : $\delta=\frac{m_2-m_1}{m_3-m_1}$

Remarquons que les trois masses sont dépendantes.

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membre de l'équation :

$$\log\delta=\log(m_2-m_1)-\log(m_3-m_1)$$

Passons à la différentielle logarithmique :

$$\frac{d\delta}{\delta}=\frac{d(m_2-m_1)}{m_2-m_1}-\frac{d(m_3-m_1)}{m_3-m_1}$$

Développons : $\frac{d\delta}{\delta}=\frac{dm_2}{m_2-m_1}-\frac{dm_1}{m_2-m_1}-\frac{dm_3}{m_3-m_1}+\frac{dm_1}{m_3-m_1}$

Factorisons : $\frac{d\delta}{\delta}=dm_1\left(\frac{1}{m_3-m_1}-\frac{1}{m_2-m_1}\right)+\frac{dm_2}{m_2-m_1}-\frac{dm_3}{m_3-m_1}$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

Passons à présent aux incertitudes relatives, en remplaçant $di$ par $\Delta i$ et en changeant le signe $(-)$ des facteurs communs par le signe $(+)$ , et en supposant $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m_3 = \Delta m$ (puisque nous utilisons la même balance). Il vient :

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} = \Delta m\left(\frac{1}{m_3 - m_1} - \frac{1}{m_2 - m_1}\right) + \frac{\Delta m}{m_2 - m_1} + \frac{\Delta m}{m_3 - m_1}$$

Nous obtenons à la fin : $\boxed{\frac{\Delta\delta}{\delta} = \frac{2\Delta m}{m_3 - m_1}}$

**Exercice 1.10 :**

**a/ Groupement en parallèle :**

La capacité du condensateur équivalent à deux condensateurs montés en parallèle est donnée par la formule : $C = C_1 + C_2$.

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membres de l'équation puis passons à la différentielle logarithmique :

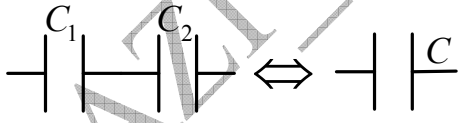
$$\log C = \log\left(C_1 + C_2\right) \Rightarrow \frac{dC}{C} = \frac{dC_1}{C_1 + C_2} + \frac{dC_2}{C_1 + C_2}$$

L'incertitude relative est donc :

$$\boxed{\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta C_1}{C_1 + C_2} + \frac{\Delta C_2}{C_1 + C_2}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta C_1}{C_1}\left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right) + \frac{\Delta C_2}{C_2}\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)}$$

**b/ Groupement en série :**

La capacité du condensateur équivalent à deux condensateurs montés en série est donnée par la formule :




$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membres de l'équation puis passons à la différentielle logarithmique :

$$\log C = \log\left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right) \Rightarrow \log C = \log C_1 + \log C_2 - \log\left(C_1 + C_2\right)$$

L'incertitude relative est donc :

$$\frac{dC}{C} = \frac{dC_1}{C_1} + \frac{dC_2}{C_2} - \frac{dC_1}{C_1 + C_2} - \frac{dC_2}{C_1 + C_2}$$

Factorisons : $\frac{dC}{C} = dC_1\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_1 + C_2}\right) + dC_2\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1 + C_2}\right)$

L'expression précédente peut être écrite sous la forme :

$$\frac{dC}{C} = \frac{dC_1}{C_1}\left(1 - \frac{C_1}{C_1 + C_2}\right) + \frac{dC_2}{C_2}\left(1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)$$

Finalement l'incertitude relative demandée est :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\boxed{\frac{\Delta C}{C}=\frac{\Delta C_1}{C_1}\left|1-\frac{C_1}{C_1+C_2}\right|+\frac{\Delta C_2}{C_2}\left|1-\frac{C_2}{C_1+C_2}\right|}$$

**Exercice 1.11 :**

Ecrivons l'expression donnée sous la forme : $\mu+m_1=\dfrac{m_2\left(\theta_2-\theta_m\right)}{\theta_m-\theta_1}$

En introduisant la fonction logarithmique dans les deux membres de l'équation nous obtenons :

$$\log\left(\mu+m_1\right)=\log m_2+\log\left(\theta_2-\theta_m\right)-\log\left(\theta_m-\theta_1\right)$$

La différentielle logarithmique de l'expression précédente est :

$$\frac{d\left(\mu+m_1\right)}{\mu+m_1}=\frac{dm_2}{m_2}+\frac{d\theta_2}{\theta_2-\theta_m}-\frac{d\theta_m}{\theta_2-\theta_m}-\frac{d\theta_m}{\theta_m-\theta_1}+\frac{d\theta_1}{\theta_m-\theta_1}$$

Ou bien : $\dfrac{d\mu}{\mu+m_1}=-\dfrac{dm_1}{\mu+m_1}+\dfrac{dm_2}{m_2}+\dfrac{d\theta_2}{\theta_2-\theta_m}-\dfrac{d\theta_m}{\theta_2-\theta_m}-\dfrac{d\theta_m}{\theta_m-\theta_1}+\dfrac{d\theta_1}{\theta_m-\theta_1}$

C'est-à-dire :

$$d\mu=-dm_1\frac{\mu+m_1}{\mu+m_1}+dm_2\frac{\mu+m_1}{m_2}+d\theta_2\frac{\mu+m_1}{\theta_2-\theta_m}-d\theta_m\frac{\mu+m_1}{\theta_2-\theta_m}-d\theta_m\frac{\mu+m_1}{\theta_m-\theta_1}+d\theta_1\frac{\mu+m_1}{\theta_m-\theta_1}$$

Et en fin, l'incertitude absolue demandée est :

$$\boxed{\Delta\mu=+\Delta m_1+\Delta m_2\left(\frac{\mu+m_1}{m_2}\right)+\Delta\theta_2\left(\frac{\mu+m_1}{\theta_2-\theta_m}\right)+\Delta\theta_m\left(\frac{\mu+m_1}{\theta_2-\theta_m}+\frac{\mu+m_1}{\theta_m-\theta_1}\right)+\Delta\theta_1\left(\frac{\mu+m_1}{\theta_m-\theta_1}\right)}$$

**Exercice 1.12 :**

Après introduction de la fonction logarithmique dans les deux membres de l'équation nous obtenons : $\log y=\log y_0+\log e^{-\omega t}$

Sa différentielle est :

$$\log y=\log y_0+\log e^{-\omega t}\Rightarrow\log y=\log y_0-\omega t$$

$$d\left(\log y\right)=d\left(\log y_0\right)-d\left(\omega t\right)$$

$$\text{Posons } X=\omega t\Rightarrow\frac{dX}{X}=\frac{d\omega}{\omega}+\frac{dt}{t}\Rightarrow dX=X\left[\frac{d\omega}{\omega}+\frac{dt}{t}\right]$$

D'où :

$$\frac{dy}{y}=\frac{dy_0}{y_0}-\omega t\left(\frac{d\omega}{\omega}+\frac{dt}{t}\right)$$

On passe à l'incertitude relative pour en déduire l'incertitude absolue :

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta y_0}{y_0}+\omega t\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}+\frac{\Delta t}{t}\right)\Leftrightarrow\Delta y=y\left[\frac{\Delta y_0}{y_0}+t\Delta\omega+\omega\Delta t\right]}$$

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

# II/ RAPPEL SUR LE CALCUL VECTORIEL
## تـذكـيـر بـالحـسـاب الـشـعـاعـي

### 1/ GRANDEUR SCALAIRE(المقدار السلمي)

Une grandeur scalaire est toujours exprimée par une valeur numérique suivie de l'unité correspondante.

**Exemple** : le volume, la masse, la température, la charge électrique, l'énergie…

### 2/ GRANDEUR VECTORIELLE(المقدار الشعاعي)

On appelle grandeur vectorielle toute grandeur qui nécessite un sens, une direction, un point d'application en plus de sa valeur numérique appelée intensité ou module.

**Exemple :** le déplacement, la vitesse, la force, le champ électrique…

### 3/ REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UN VECTEUR (التمثيل البياني لشعاع) :

Un vecteur est représenté par un segment orienté (figure2.1).

$\vec{V}$ : représente le vecteur (avec ses quatre caractéristiques).

$\left\|\vec{V}\right\| = \left|\vec{V}\right| = V$ : représente le module ou l'intensité du vecteur.

**Fig 2.1: représentation d'un vecteur**

### 4/ LE VECTEUR UNITAIRE (شعاع الوحدة): c'est un vecteur de module égal à l'unité (le nombre un).

On peut exprimer un vecteur parallèle au vecteur unitaire sous la forme :

$$\vec{V} = \vec{u}V = V\vec{u} \qquad \textbf{(2.1)}$$

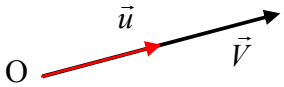



**Fig 2.2: vecteur unitaire**

### 5/LA SOMME GEOMETRIQUE DES VECTEURS (الجمع الهندسي للأشعة) :

Cette opération fait appel au dessin, c'est pour cette raison qu'on la qualifie de géométrique.

- **La somme de deux vecteurs** : c'est une opération commutative.

On calcule le module du vecteur résultant à partir de la **loi des cosinus** (قانون جيوب التمام ) que nous démontrerons plus tard :

$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\theta} \qquad \textbf{(2.2)}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

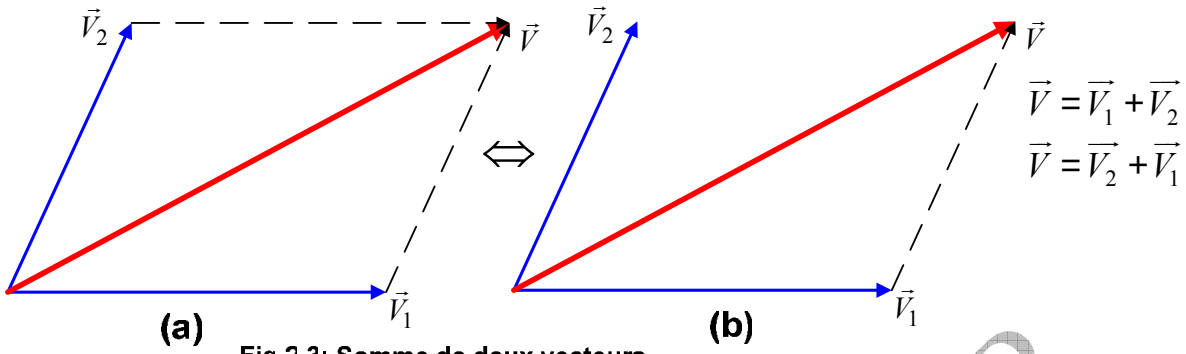



**Fig 2.3: Somme de deux vecteurs**

Pour déterminer la direction de $\vec{V}$, il suffit de chercher la valeur de l'angle $\alpha$ (figure 2.4). Raisonnons à partir du triangle **ACD** de la figure 2.5 **:**

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{V}\\ \sin\theta &= \frac{CD}{BC} = \frac{CD}{V_2}\end{aligned}\right| \Rightarrow \quad \frac{V}{\sin\theta} = \frac{V_2}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V.\sin\alpha = V_2.\sin\theta} \qquad \textbf{(2.3)}$$

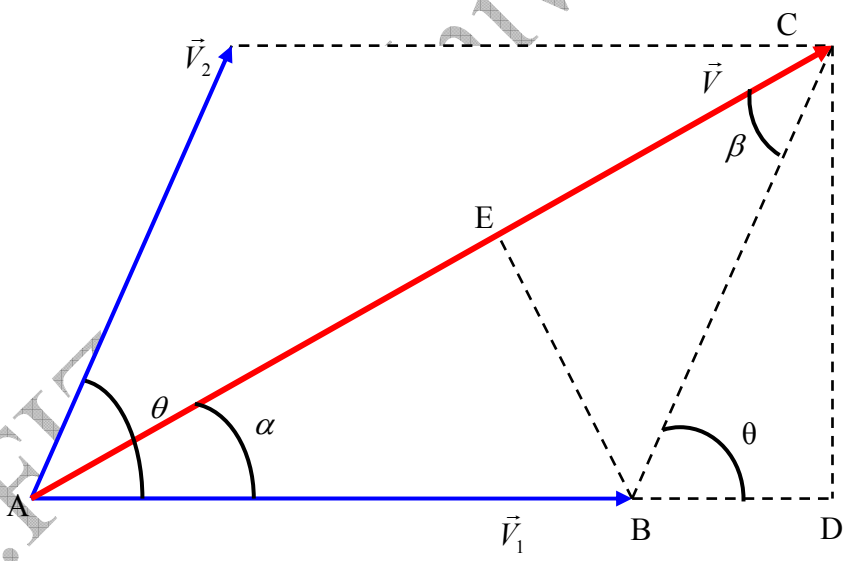



**Fig 2.4: relative à la démonstration de la loi des sinus**

De même dans le triangle **BEC** nous avons :

$$\left.\begin{aligned}\sin\beta &= \frac{BE}{BC}\\ \sin\alpha &= \frac{BE}{AB}\end{aligned}\right| \Rightarrow \quad \frac{V_2}{sin\alpha} = \frac{V_1}{sin\beta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_2.\sin\beta = V_1.\sin\alpha} \qquad \textbf{(2.4)}$$

A.FIZ Univ-BECHAR

De (2.3) et (2.4) nous pouvons en déduire la formule générale (2.5), appelée loi des sinus (قانون الجيوب):

$$\frac{V}{\sin\theta} = \frac{V_1}{\sin\beta} = \frac{V_2}{\sin\alpha} \qquad \textbf{(2.5)}$$

- **Cas particulier :** Si $\theta = \pi/2$ alors $V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$ et $\tan\alpha = \frac{V_2}{V_1}$
- **La somme géométrique de plusieurs vecteurs :** (voir figure2.5)

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 + \vec{V}_5$$

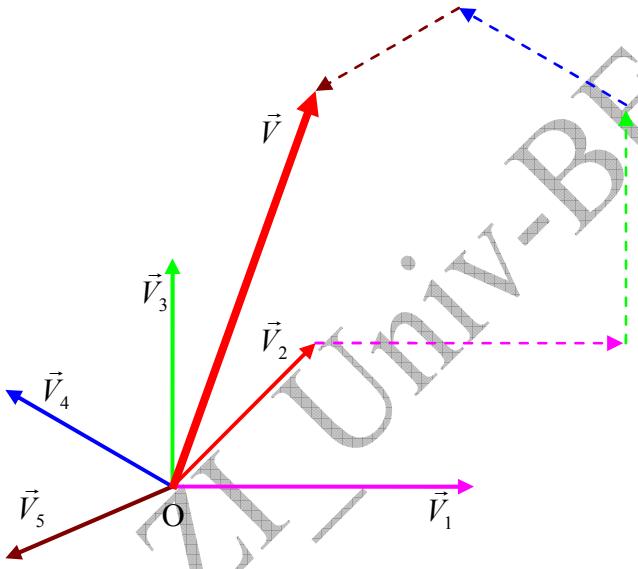



**Fig 2.5: Somme de plusieurs vecteurs**

- **La soustraction de deux vecteurs : (طرح شعاعين )** figure 2.6

Géométriquement, le vecteur $\vec{D}$ représente le résultat de la soustraction entre les deux vecteurs $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_1$. Nous pouvons écrire : $\vec{D} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$

Cette équation peut aussi s'écrire : $\vec{D} = \vec{V}_2 + (-\vec{V}_1)$

La soustraction de vecteurs est anticommutative, c'est ce qui ressort de la figure 2.6 :

$\vec{D}' = -\vec{D}$

- Le module du vecteur $\vec{D}$ :

$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\theta} \qquad \textbf{(2.6)}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

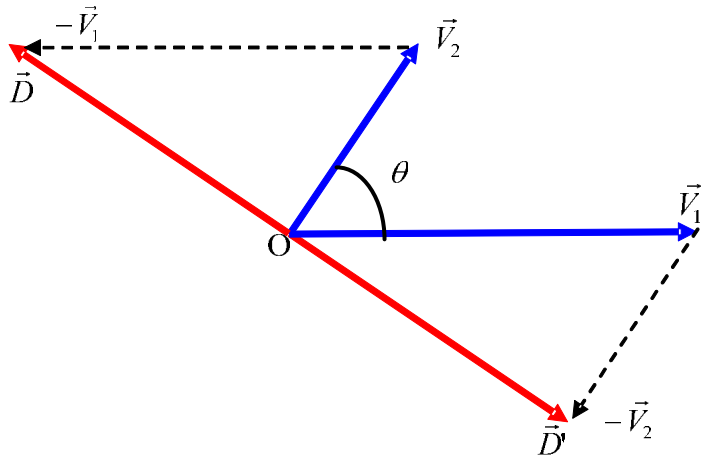



**Fig 2.6: Différence de deux vecteurs**

## 6/ COMPOSANTES D'UN VECTEUR (مركبات شعاع) :

Chaque vecteur peut être considéré comme étant la somme de deux vecteurs ou plus (le nombre de possibilités est illimité).

Dans le plan, soit le repère $\Re(O;\vec{i},\vec{j})$ :

- **En coordonnées rectangulaires** : on décompose le vecteur $\vec{V}$ suivant l'axe des X et l'axe des Y, comme indiqué sur la figure2.7.

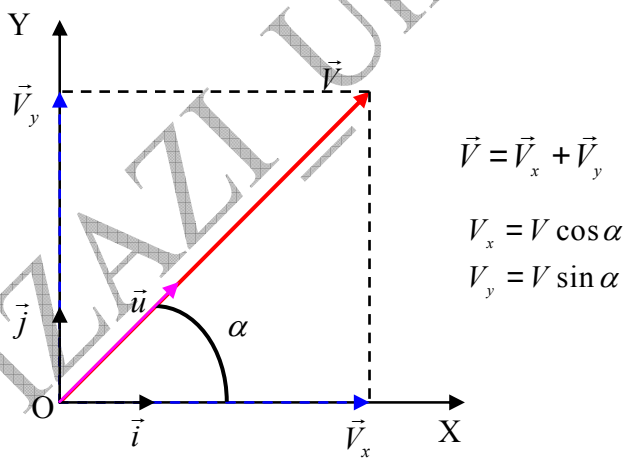



**Fig 2.7: Composantes d'un vecteur**

En désignant les deux vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$, respectivement dans les directions des deux axes OX et OY, nous pouvons écrire :

$$\vec{V}_x = \vec{i}.V_x \ , \quad \vec{V}_y = \vec{j}.V_y \quad ;$$

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y \ ; \quad \vec{V} = \vec{i}.V_x + \vec{j}.V_y \ ; \qquad \textbf{(2.7)}$$

$$\vec{V} = \vec{i}.V\cos\alpha + \vec{j}.V\sin\alpha \ \Rightarrow \ \boxed{\vec{V} = V(\vec{i}.\cos\alpha + \vec{j}.\sin\alpha)}$$

Or $\vec{V} = \vec{u}.V$ , d'où :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\boxed{\vec{u} = \vec{i}.\cos\alpha + \vec{j}.\sin\alpha} \qquad \textbf{(2.8)}$$

Quant à la norme du vecteur $\vec{V}$, elle vaut : $V = \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2}$

En utilisant les coordonnées x et y nous pouvons aussi écrire : $V = \sqrt{x^2 + y^2}$

**Exemple 2.1 :** Trouver la résultante des deux vecteurs $\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ; $\vec{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dans le repère $\Re\,(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

**Réponse :**

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \quad ; \quad \vec{V} = \vec{i}(x_1 + x_2) + \vec{j}(y_1 + y_2) \longrightarrow \boxed{V = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}}$$

**Exemple 2.2 :** Trouver la différence des deux vecteurs $\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ; $\vec{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dans le repère $\Re\,(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

**Réponse :**

$$\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \quad ; \quad \vec{V} = \vec{i}(x_1 - x_2) + \vec{j}(y_1 - y_2) \Rightarrow \boxed{V = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

- **Dans l'espace :** dans le repère R $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (base orthonormée), nous remarquons que $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z \Rightarrow \vec{V} = \vec{i}.V_x + \vec{j}.V_y + \vec{k}.V_z$ . (figure 2.8)

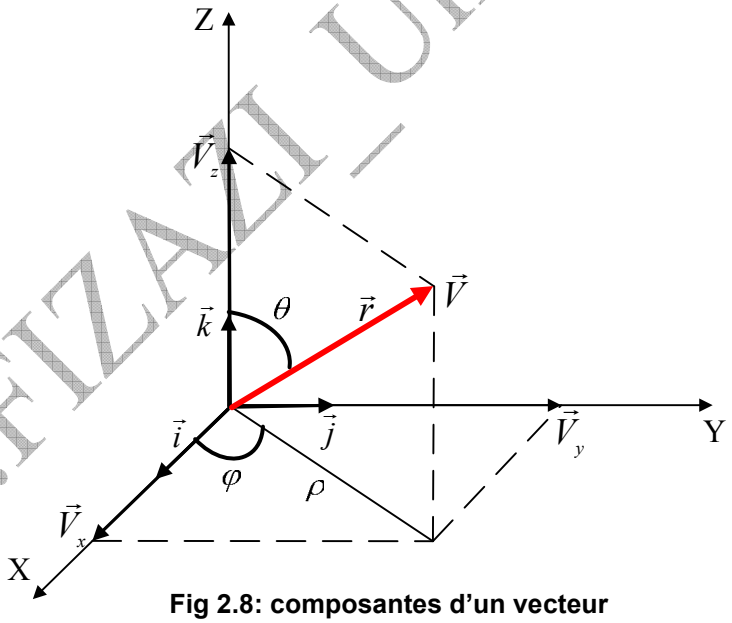



**Fig 2.8: composantes d'un vecteur**

Nous pouvons nous assurer géométriquement que :

A.FIZAZI _ Univ-BECHAR

$$\cos\theta = \frac{V_z}{r} \quad \Rightarrow \quad V_z = r.\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\rho}{r} \quad \Rightarrow \rho = r.\sin\theta;$$

$$\cos\varphi = \frac{V_x}{\rho} \Rightarrow V_x = \rho.\cos\varphi \Rightarrow V_x = r.\sin\theta.\cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{V_y}{\rho} \Rightarrow V_y = \rho.\sin\varphi \Rightarrow V_y = r\sin\theta.\sin\varphi$$

**En résumé :**

$$\boxed{\begin{aligned} V_x &= V\sin\theta.\cos\varphi \\ V_y &= V.\sin\theta.\sin\varphi \\ V_z &= V.\cos\theta \end{aligned}} \qquad \textbf{(2.9)}$$

Quant au module du vecteur $\vec{V}$ il est égal à : $V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}}$

Ou en coordonnées cartésiennes : $V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

- **Remarque** : En notant par $\alpha$ et $\beta$ les angles respectifs formés par le vecteur $\vec{V}$ avec les axes $OX$ et $OY$, et de la même façon que nous avons obtenu l'équation 2.9, il vient :

$$\boxed{V_x = V.\cos\alpha \;,\; V_y = V.\cos\beta \;,\; V_z = V.\cos\theta} \qquad \textbf{(2.10)}$$

Nous pouvons en déduire l'expression :

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = 1} \qquad \textbf{(2.11)}$$

**Exemple 2.3 :** Trouver la distance qui sépare les deux points $A(10,-4,4)u$ et $B(10,6,8)u$, représentés dans le repère rectangulaire $\Re\,(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, avec $u = unité$.

**Réponse :**

En représentant les deux points dans le repère, on se rend compte que la distance demandée n'est autre que le module du vecteur $\vec{D}$, qui est la différence entre les deux vecteurs : $\vec{D} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$

Soit :

$$\vec{D} = \vec{i}(x_2 - x_1) + \vec{j}(y_2 - y_1) + \vec{k}(z_2 - z_1) \Rightarrow \vec{D} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\vec{D} = \vec{i}(0) + \vec{j}(10) + \vec{k}(4) \Rightarrow D = \sqrt{116} = 10.77u$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

**Exemple 2.4 :** Trouver la résultante des cinq vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1 = (4\vec{i} - 3\vec{j})\ \text{u}; \vec{V}_2 = (-3\vec{i} + 2\vec{j})\ u; \vec{V}_3 = (2\vec{i} - 6\vec{j})u; \vec{V}_4 = (7\vec{i} - 8\vec{j})u; \vec{V}_5 = (9\vec{i} + \vec{j})u$$

**Réponse :**

$$\vec{V} = (4-3+2+7+9)\vec{i} + (-3+2-6-8+1)\vec{j} \Rightarrow V = 19\vec{i} - 14\vec{j} \Rightarrow V = \sqrt{361+196} = 23.60u$$

Pour trouver la direction du vecteur $\vec{V}$, nous partons de l'expression $\tan\alpha = \frac{V_y}{V_x}$, $\alpha$ est l'angle formé par le vecteur $\vec{V}$ et l'axe $OX$ :

$$\tan\alpha = {}^{-14}\!/_{19} \approx 0,737 \Rightarrow \alpha \approx 36,38°$$

## 7/ LE PRODUIT SCALAIRE (الجداء السلمي) :

❖ Définition : On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ le nombre réel $\vec{V}_1.\vec{V}_2$ :

$$\boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = V_1.V_2.\cos(\vec{V}_1.\vec{V}_2)} \qquad \textbf{(2.12)}$$

Ou $$\boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \frac{1}{2}\left[\left\|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right\|^2 - \left\|\vec{V}_1\right\|^2 - \left\|\vec{V}_2\right\|^2\right]} \qquad \textbf{(2.13)}$$

❖ Cas particulier :

Si $\vec{V}_1 = \vec{0}$ ou $\vec{V}_2 = \vec{0}$, alors $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$

Si $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$, alors :

$$\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Rightarrow (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$$

$$\vec{V}_1 // \vec{V}_2 \Rightarrow (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1 \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V} = V_1 V_2$$

**Exemple:**

Le travail de la force $\vec{F}$ qui provoque un déplacement $\overrightarrow{AB}$ est donné par la formule $W = F.AB.\cos\alpha$ tel que $\alpha = (\vec{F}; \overrightarrow{AB})$ (on lit $W$ est le produit scalaire de $\vec{F}$ par $\overrightarrow{AB}$), on écrit :

$$\vec{W} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad W = F.AB.\cos\alpha$$

Démontrons à présent la relation $(2.2)$ comme nous l'avons promise :

$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}\ ;\ \vec{V}^2 = \vec{V_1}^2 + \vec{V_2}^2 + 2\vec{V_1}\vec{V_2}\ ;\ \vec{V_1}^2 = \vec{V_1}.\vec{V_1} = V_1 V_1 \cos(\vec{V_1}\vec{V_1}) = V_1^2;$$

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\vec{V_1}\vec{V_2}) \Rightarrow V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\vec{V_1}\vec{V_2})}$$

❖ Expression analytique du produit scalaire (العبارة التحليلية للجداء السلمي)

**Dans le plan(في المستوى) :** Soit les deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ contenus dans le plan, tel que :

$$\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\ ;\ \vec{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

Dans le repère $\Re(O;\vec{i},\vec{j})$

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2=(x_1.\vec{i}+y_1.\vec{j}).(x_2.\vec{i}+y_2.\vec{j})=x_1.x_2.\vec{i}.\vec{i}+x_1.y_2.\vec{i}.\vec{j}+x_2.y_1.\vec{j}.\vec{i}+y_1.y_2.\vec{j}.\vec{j}$$

$\vec{i}\perp\vec{j}\Rightarrow\vec{j}.\vec{i}=\vec{i}.\vec{j}=0$

$\vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=1$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2=x_1.x_2+y_1.y_2.} \qquad \textbf{(2.14)}$$

**Dans l'espace** (في الفضاء) :

Soit les deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ dans le repère $\Re\ (O;\vec{i},\vec{j};\vec{k})$ :

$\vec{i}.\vec{j}=\vec{i}.\vec{k}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{0}$, $\vec{i}=\vec{j}=\vec{k}=1$ هـــام $\vec{V}_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ ; $\vec{V}_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2=x_1.x_2+y_1.y_2+z_1.z_2}$ **(2.15)**

❖ **Propriétés du produit scalaire** (خصائص الجداء السلمي) :

**Commutatif** (تبديلي) $\vec{V}_1.\vec{V}_2=\vec{V}_2.\vec{V}_1$

**Non associatif** (غير تجميعي): $\vec{V}_1.(\vec{V}_2.\vec{V}_3)$ n'existe pas car le résultat serait un vecteur.

**Distributif** (توزيعي) **par rapport à la somme vectorielle :**

$$\vec{V}_1.(\vec{V}_2+\vec{V}_3)=\vec{V}_1.\vec{V}_2+\vec{V}_1.\vec{V}_3$$

❖ **Exemple 2.5 :** Calculer l'angle compris entre les deux vecteurs : $\vec{V}_1=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ et $\vec{V}_2=-\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$.

**Réponse :**

Partant de l'expression du produit scalaire, on peut écrire :

$$\cos(\vec{V}_1\vec{V}_2)=\frac{\vec{V}_1.\vec{V}_1}{V_1V_2}$$

Donc :

$$\vec{V}_1.\vec{V}_1=-3+4-3=-2\ ;\ V_1=\sqrt{9+4+1}=3,74\ ;\ V_2=\sqrt{1+4+9}=3,74$$

$$\cos(\vec{V}_1\vec{V}_2)=\frac{\vec{V}_1.\vec{V}_1}{V_1V_2}=\frac{-2}{14}=-0,143\Rightarrow\theta=(\vec{V}_1\vec{V}_2)=96,2°$$

## 8/ LE PRODUIT VECTORIEL (الجداء الشعاعي) :

❖ **Définition :** On appelle produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ le vecteur $\vec{W}$ perpendiculaire au plan qu'ils constituent.

Nous écrivons par convention : $\vec{W}=\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2=\vec{V}_1\times\vec{V}_2$

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

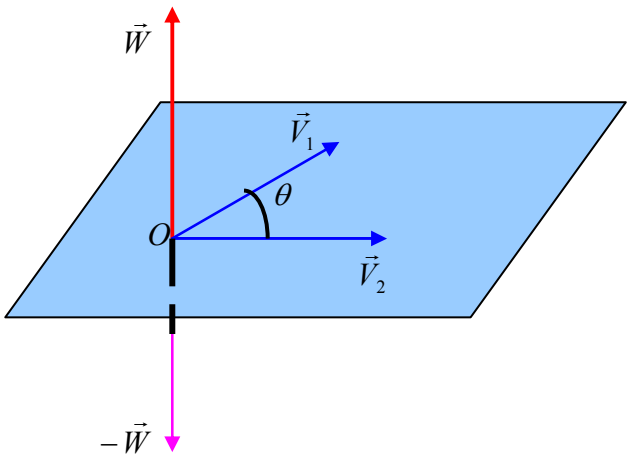



**Fig 2.9: produit vectoriel**

❖ **caractéristiques du vecteur** $\vec{W}$ (مميزات الشعاع)

$\vec{W}$ est **perpendiculaire** au plan formé par les deux vecteurs, son sens est déterminé par la règle de la main droite (l'index indiquant $\vec{W}$), son module est donné par la formule 2.16 :

$$W = \left|\vec{W}\right| = V_1.V_2.\sin(\vec{V}_1.\vec{V}_2) \qquad \textbf{(2.16)}$$

Important :

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$
$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}\ ;\ \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}\ ;\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$$
$$\left|\vec{i} \wedge \vec{j}\right| = \left|\vec{i} \wedge \vec{k}\right| = \left|\vec{j} \wedge \vec{k}\right| = 1$$

**Remarque** : la grandeur $W = \left|\vec{W}\right| = V_1.V_2.\sin(\vec{V}_1;\vec{V}_2)$ représente l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs, ce qui laisse sous entendre la possibilité de lier un vecteur à une certaine surface.

**Méthode utilisée pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs** :

$$\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\ ;\ \vec{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

En utilisant les coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on peut écrire :

$$\vec{W} = \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{W} = \left(y_1z_2 - y_2z_1\right)\vec{i} - \left(x_1z_2 - x_2z_1\right)\vec{j} + \left(x_1y_2 - x_2y_1\right)\vec{k}$$

Le module du vecteur est donné par l'expression :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$W=\sqrt{\left(y_1z_2-y_2z_1\right)^2+\left(x_1z_2-x_2z_1\right)^2+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2}=V_1.V_2.\sin(\vec{V}_1,\vec{V}_2) \qquad \textbf{(2.17)}$$

➢ **Propriétés du produit vectoriel** (خصائص الجداء الشعاعي)

**Anticommutatif** (تبديلي مضاد) $\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2=-\vec{V}_2\wedge\vec{V}_1$

**Non associatif** (غير تجميعي): $\vec{V}_1\wedge\left(\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3\right)\neq\left(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2\right)\wedge\vec{V}_3$

**Distributif** (توزيعي) **par rapport à la somme vectorielle :**

$$\vec{V}_1\wedge\left(\vec{V}_2+\vec{V}_3\right)=\left(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2\right)+\left(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_3\right)$$

❖ **Exemple 2.6 :** Calculer le vecteur $\vec{W}$, produit des deux vecteurs : $\vec{V}_1=(2,1,-1)$ et $\vec{V}_2=(1,0,-2)$, en déduire l'angle $\theta$ compris entre eux.

**Réponse :**

$$\vec{W}=\left[(1\times-2)-(0\times-1)\right].\vec{i}-\left[\left(2\times-2\right)-(1\times-1)\right].\vec{j}+\left[\left(2\times0\right)-(1\times1)\right].\vec{k}\Rightarrow\vec{W}=-2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$$

$$V_1=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$$

$$V_2=\sqrt{1^2+0+2^2}=\sqrt{5}$$

$$W=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}=3,74$$

$$W=V_1.V_2.\sin\theta=3,74\Rightarrow\sin\theta=\frac{W}{V_1.V_2}\Rightarrow\sin\theta=\frac{3,74}{\sqrt{30}}=0,683\Rightarrow\theta=43,06°$$

## 9/ LE PRODUIT MIXTE (الجداء المختلط):

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ est la quantité scalaire définie par :

$$\vec{V}_1.\left(\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3\right)=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=\left(y_2z_3-y_3z_2\right)x_1-\left(x_2z_3-x_3z_2\right)y_1+\left(x_2y_3-x_3y_2\right)z_1 \qquad \textbf{(2.18)}$$

## 10/ MOMENT D'UN VECTEUR PAR RAPPORT A UN POINT DE L'ESPACE

(عزم شعاع بالنسبة لنقطة من الفضاء)

❖ **Définition :** Le moment d'un vecteur par rapport à un point de l'espace est le vecteur défini par :

$$\vec{\tau}_O=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{V} \qquad \textbf{(2.19)}$$

❖ **Remarque :**

$\left\|\vec{\tau}_O\right\|$ = au double de l'aire du triangle $AOB$. (Figure2.10-a-)

## 11/ MOMENT D'UN VECTEUR PAR RAPPORT A UN AXE

(عزم شعاع بالنسبة لمحور)

❖ **Première définition :** Le moment d'un vecteur par rapport à un axe est égal à la projection de ce vecteur par rapport à un point quelconque de cet axe.

A.FIZAZI Univ-BECHAR

❖ **Deuxième définition :** Le moment du vecteur $\vec{V}$ par rapport à un axe $\Delta$, d'origine $O$ et de vecteur unitaire $\vec{u}$, est égal au produit mixte :

$$\tau_{\Delta} = \overrightarrow{\tau_O}.\vec{u} = \left(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}\right).\vec{u} \qquad \textbf{(2.20)}$$

❖ **Remarque** : Le moment d'un vecteur par rapport à un axe est une grandeur scalaire, par contre le moment d'un vecteur par rapport à un point de l'espace est un vecteur (Figure2.10-b-)

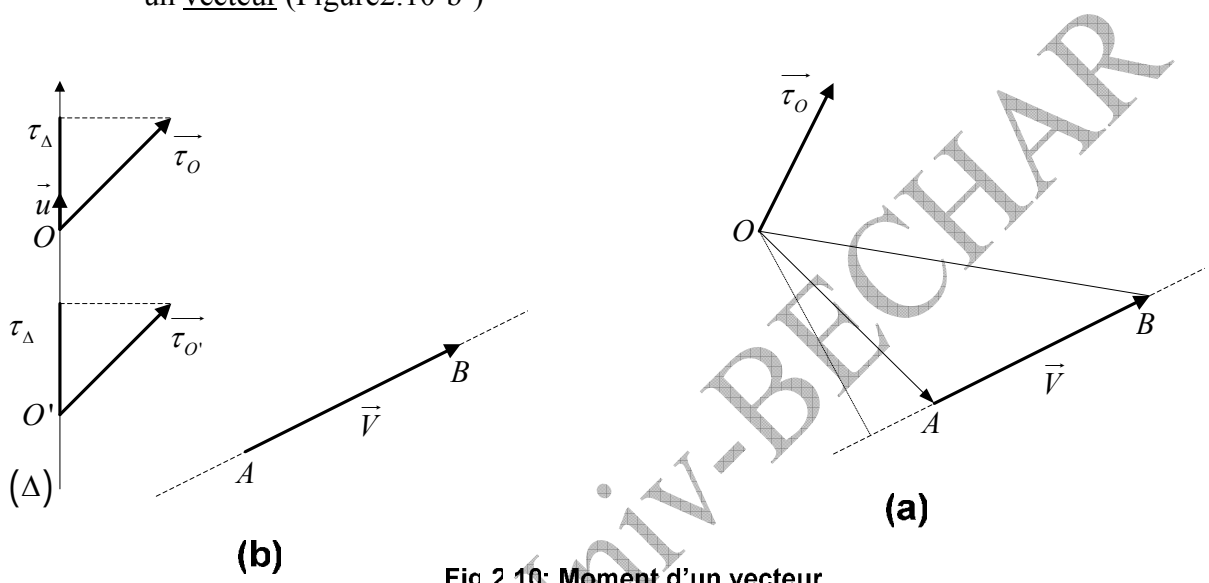



**Fig 2.10: Moment d'un vecteur**

## 12/GRADIENT, DIVERGENCE ET ROTATIONNEL (التدرج، التباعد و الدوران) :

❖ **Définitions :**

- On dit que la fonction $f(x,y,z)$ est un champ scalaire si la fonction $f(x,y,z)$ est un scalaire.
- On dit que la fonction $\vec{V}(x,y,z)$ est un champ vectoriel si la fonction est vectorielle.
- On définit l'opérateur **(المؤثر)** différentiel vectoriel $\vec{\nabla}(nabla)$ par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad \textbf{(2.21)}$$

**Où :**

$\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ sont respectivement les dérivées partielles par rapport à $x, y$ et $z$.

Nous allons définir le gradient, la divergence et le rotationnel à l'aide de cet opérateur.

A.FIZAZI Univ-BECHAR

➢ **LE GRADIENT (التدرج ):**

Si $f(x,y,z)$ est une fonction scalaire, son gradient est un vecteur défini comme étant :

$$\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad \textbf{(2.22)}$$

❖ **Exemple 2.7 :** Calculer le gradient de la fonction $f(x,y,z) = f = 3x^2y^3z$.

**Réponse :** $\overrightarrow{grad}f = 6xy^3z.\vec{i} + 9x^2y^2z.\vec{j} + 3x^2y^3.\vec{k}$

➢ **LA DIVERGENCE (التباعد ):**

Si $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ est une fonction vectorielle, sa divergence est un scalaire défini comme étant :

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad \textbf{(2.23)}$$

❖ **Exemple 2.7 :** Calculer la divergence de la fonction vectorielle

$$\vec{V}(x,y,z) = 2xy\vec{i} - 3yz^2\vec{j} + 9xy^3\vec{k}$$

**Réponse :** $div\vec{V} = 2y - 3z^2 + 0 = 2y - 3z^2$

➢ **LE ROTATIONNEL (الدوران ):**

Si $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ est une fonction vectorielle, son rotationnel est un vecteur défini comme étant :

$$\overrightarrow{rot(\vec{V})} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right).\vec{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right).\vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right).\vec{k} \qquad \textbf{(2.24)}$$

**Démarche à suivre :**

a/ Etablir la matrice suivante :

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = A + B + C$$

b/ Pour calculer $A, B, C$ il suffit de se rappeler de la règle du produit vectoriel :

A.FIZAZI - Univ-BECHAR

$$A=\begin{vmatrix} +\vec{i} & & \\ & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ & V_y & V_z \end{vmatrix}=+\vec{i}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)$$

$$B=\begin{vmatrix} & -\vec{j} & \\ \frac{\partial}{\partial x} & & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & & V_z \end{vmatrix}=-\vec{j}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)$$

$$C=\begin{vmatrix} & & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \\ V_x & V_y & \end{vmatrix}=+\vec{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

c/ On arrive à l'expression finale (2.24) :

$$\begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}=+\vec{i}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)$$

❖ **Exemple 2.7 :** Calculer le rotationnel du vecteur :

$$\vec{V}(x,y,z)=2xy\vec{i}-3yz^2\vec{j}+9xy^3\vec{k}$$

**Réponse :**

$$\overrightarrow{rot(\vec{V})}=\left(27xy^2-6yz\right).\vec{i}-(9y^3-0).\vec{j}+(0-2x).\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot(\vec{V})}=\left(27xy^2-6yz\right).\vec{i}-9y^3\vec{j}-2x\vec{k}$$

## 13/ LE LAPLACIEN (لابلاسيان) :

### ❖ Définitions :

- **En coordonnées cartésiennes :**
  - Le Laplacien d'une fonction scalaire est égal à la divergence de son gradient :

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(f)=\vec{\nabla}^2(f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad \textbf{(2.25)}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

➢ Le Laplacien d'une fonction vectorielle est égal à la divergence de son gradient :

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\left(\vec{V}\right) = \vec{\nabla}^2(\vec{V}) = \frac{\partial^2 \overrightarrow{V_x}}{\partial x^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\vec{k} \qquad \textbf{(2.26)}$$

**REMARQUE**

**Vous trouverez, à la fin de ce document en annexe, un formulaire regroupant le gradient, la divergence, le rotationnel et le laplacien dans les différentes coordonnées : cartésiennes, cylindriques et sphériques.**

A.FIZAZI _ Univ-BECHAR

# EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

**تنبيه: في كل تمارين هذه السلسلة نعتبر أن طويلات الأشعة معبّر عنها بنفس الوحدة.**

**Exercice 2.1**

On considère , dans un repère orthonormé OXYZ, les trois vecteurs : $\vec{V_1} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ , $\vec{V_2} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ et $\vec{V_3} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ .

a/ calculer les modules de $\vec{V}_1$، $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$,

b/ calculer les composantes ainsi que les modules des vecteurs : $\vec{A} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ et $\vec{B} = 2\vec{V}_1 - \vec{V}_2 + \vec{V}_3$,

c/ déterminer le vecteur unitaire porté par $\vec{C} = \vec{V}_1 + \vec{V}_3$,

d/ calculer le produit scalaire $\vec{V}_1.\vec{V}_3$ et en déduire l'angle formé par les deux vecteurs.

e/ calculer le produit vectoriel $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$ .

**تمرين 1.2**

في معلم متجانس و متعامد $OXYZ$، نعتبر الأشعة الثلاثة التالية: $\vec{V_1} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ ؛ $\vec{V_2} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ ؛ $\vec{V_3} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

ا/ أحسب طويلة كل من $\vec{V}_1$ ، $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_3$.

ب/ أحسب مركبات و طويلات الأشعة $\vec{A} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ و $\vec{B} = 2\vec{V}_1 - \vec{V}_2 + \vec{V}_3$

ج/ عين شعاع الواحدة المحمول على $\vec{C} = \vec{V}_1 + \vec{V}_3$

د/ أحسب الجداء السلمي $\vec{V}_1.\vec{V}_3$ ثم إستنتج الزاوية المحصورة بينهما.

ه/ أحسب الجداء الشعاعي $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$

**Exercice 2.2**

Montrer que les grandeurs de la somme et de la différence de deux vecteurs $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ et $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ exprimées en coordonnées rectangulaires sont respectivement :

$$S = \left[ \left(A_x + B_x\right)^2 + \left(A_y + B_y\right)^2 + \left(A_z + B_z\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$D = \left[ \left(A_x - B_x\right)^2 + \left(A_y - B_y\right)^2 + \left(A_z - B_z\right)^2 \right]^{1/2}$$

**التمرين2.2**

تحقق من إن مقدراي المجموع و الفرق لشعاعين $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ و $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ المعبر عنهما بالإحداثيات المستطيلة على التوالي هما:

$$S = \left[ \left(A_x + B_x\right)^2 + \left(A_y + B_y\right)^2 + \left(A_z + B_z\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$D = \left[ \left(A_x - B_x\right)^2 + \left(A_y - B_y\right)^2 + \left(A_z - B_z\right)^2 \right]^{1/2}$$

**Exercice 2.3**

Trouver la sommes des trois vecteurs : $\vec{V_1} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ؛ $\vec{V_2} = -3\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$ ؛ $\vec{V_3} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$.

Calculer le module de la résultante ainsi que les angles qu'elle forme avec $OY, OX$ et $OZ$ .

**التمرين3.2**

أوجد محصلة مجموع الأشعة التالية :

$\vec{V_1} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ؛ $\vec{V_2} = -3\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$ ؛ $\vec{V_3} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$ .

أحسب طويلة المحصلة و الزوايا التي تصنعها مع كل من $OY, OX$ و $OZ$.

**Exercice 2.4**

a/ Montrer que la surface d'un parallélogramme est $\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right|$ tels que $\left|\vec{A}\right|$ et $\left|\vec{B}\right|$ sont les côtés du parallélogramme formé par les deux vecteurs .

b/ Prouver que les vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont

**التمرين4.2:**

ا/ برهن أن مساحة متوازي الأضلاع هي $\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right|$ حيث $\left|\vec{A}\right|$ و $\left|\vec{B}\right|$ ضلعي متوازي الأضلاع المشكل من الشعاعين.

| | |
|---|---|
| perpendiculaires si $\left\|\vec{A}+\vec{B}\right\| = \left\|\vec{A}-\vec{B}\right\|$ | ب/ برهن أن الشعاع $\vec{A}$ يكون عموديا على الشعاع $\vec{B}$ إذا تحققت العلاقة $\left\|\vec{A}+\vec{B}\right\| = \left\|\vec{A}-\vec{B}\right\|$ |

| | |
|---|---|
| **Exercice 2.5**<br>Soit le vecteur :<br>$\vec{V} = \left(2xy + z^3\right)\vec{i} + \left(x^2 + 2y\right)\vec{j} + \left(3xz^2 - 2\right)\vec{k}$<br>Montrer que $\overrightarrow{grad} \wedge \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0}$ | **التمرين2.5**<br>إذا كان الشعاع:<br>$\vec{V} = \left(2xy + z^3\right)\vec{i} + \left(x^2 + 2y\right)\vec{j} + \left(3xz^2 - 2\right)\vec{k}$<br>برهن أن $\overrightarrow{grad} \wedge \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0}$ |

| | |
|---|---|
| **Exercice 2.6**<br>Soient les deux vecteurs $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ , $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$<br>Trouver $\alpha, \beta$ pour que $\vec{B}$ soit parallèle à $\vec{A}$, puis déterminer le vecteur unitaire pour chacun des deux vecteurs. | **التمرين2.6**<br>ليكن الشعاعان $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ; $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$<br>عين $\alpha, \beta$ بحيث يوازي الشعاع $\vec{B}$ الشعاع $\vec{A}$، ثم عين شعاعي الواحدة الموافقة لكل منهما. |

| | |
|---|---|
| **Exercice 2.7**<br>La résultante de deux vecteurs a 30 unités de long et forme avec eux des angles de 25° et 50°.<br>Trouver la grandeur des deux vecteurs. | **التمرين2.7**<br>محصلة شعاعين طولها 30 وحدة و تصنع معهما زاويتين 25° و 50°.<br>أوجد طويلة الشعاعين. |

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

## Corrigés des exercices 2.1 à 2.7 : حلول التمارين من 1.2 إلى 7.2

**Exercice2.1 :**

a/ $\boxed{\vec{V_1} = 6,40}$ , $\boxed{\vec{V_2} = 5,38}$ , $\boxed{\vec{V_3} = 5,91}$

b/ $\boxed{\vec{A} = 10\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}}$ , $\boxed{\vec{B} = 9\vec{i} - 15\vec{j} + 15\vec{k}}$

c/ $\boxed{\vec{C} = 8\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}}$ $\dfrac{\vec{C}}{C} = \vec{u}_c \Rightarrow \boxed{\vec{u}_c = \dfrac{8}{\sqrt{35}}\vec{i} - \dfrac{5}{\sqrt{35}}\vec{j} + \dfrac{7}{\sqrt{35}}\vec{k}}$

$\vec{V}_1.\vec{V}_3 = x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V}_3 = 15 + 4 + 12$ , $\boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_3 = 31}$

d/ $\cos\alpha = \dfrac{\vec{V}_1.\vec{V}_3}{V_1V_3} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{31}{\sqrt{41}.\sqrt{35}} = \dfrac{31}{37,88}$ , $cos\alpha \simeq 0,176 \Rightarrow \boxed{\alpha = 79,86°}$

e/ $\boxed{\vec{V_2} \wedge \vec{V_3} = 5\vec{i} - 26\vec{j} - 17\vec{k}}$

**Exercice2.2 :**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} + (A_z + B_z)\vec{k}$$

$$S = \left[ (A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2 \right]^{1/2}$$

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\vec{i} + (A_y - B_y)\vec{j} + (A_z - B_z)\vec{k}$$

$$D = \left[ (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2 \right]^{1/2}$$

**Exercice2.3 :**

$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ , $\vec{V} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \boxed{V \simeq 8,54}$

$V_x = V.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{V_x}{V} = \dfrac{6}{8,54}$ , $cos\alpha \simeq 0,70 \Rightarrow \boxed{\alpha \simeq 45,6°}$

$V_y = V.\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{V_y}{V} = \dfrac{6}{8,54}$ , $cos\beta \simeq 0,70 \Rightarrow \boxed{\beta \simeq 45,6°}$

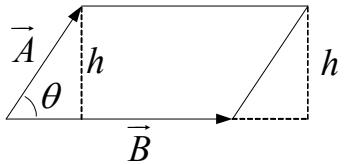
$V_z = V.\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{V_z}{V} = \dfrac{1}{8,54}$ , $cos\theta \simeq 0,70 \Rightarrow \boxed{\theta \simeq 83,1°}$

**Exercice2.4 :**

a/ surface du parallélogramme : $S = h.\left|\vec{B}\right|$

On remarque sur la figure que : $h = \left|\vec{A}\right| \sin\theta$

Donc : $S = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta$




AhmedFIZAZI

On en déduit que : $S = \left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta$

Rappelons-nous que la surface d'un triangle de côtés $\left|\vec{A}\right|$ et $\left|\vec{B}\right|$ est égale à :

$$S_0 = \frac{1}{2}\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta$$

b/ soient les deux vecteurs :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{A} + \vec{B}\right| = \left[\left(A_x + B_x\right)^2 + \left(A_y + B_y\right)^2 + \left(A_z + B_z\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\left|\vec{A} - \vec{B}\right| = \left[\left(A_x - B_x\right)^2 + \left(A_y - B_y\right)^2 + \left(A_z - B_z\right)^2\right]^{1/2}$$

En égalisant les deux dernières expressions, et en développant nous arrivons au résultat : $A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0$, qui n'est autre que le produit scalaire $\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$.

**Exercice2.5 :**

Ecrivons les deux expressions des deux vecteurs :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \vec{V} = \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 + 2y \\ 2xz^2 - 2 \end{pmatrix}$$

En calculant le produit vectoriel de ces deux vecteurs nous trouvons que le résultat est zéro :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 + 2y & 2xz^2 - 2 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

**Exercice2.6 :**

Pour que les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ soient parallèles il faut que la relation $\vec{B} = \lambda.\vec{A}$ soit vérifiée, avec $\lambda$ constante.

Partant de cela on peut écrire :

$$\frac{\vec{B}}{\lambda} = \vec{A} \Rightarrow \frac{\vec{B}}{\lambda} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\lambda} \\ \frac{-3}{\lambda} \\ \frac{4}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

AhmedFIZAZI

On en déduit la valeur de $\lambda$ et par la suite les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{2}{\lambda}=1\Rightarrow\boxed{\lambda=2}\\ \dfrac{-3}{\lambda}=\alpha\Rightarrow\boxed{\alpha=-1,5}\\ \dfrac{4}{\lambda}=\beta\Rightarrow\boxed{\beta=2}\end{array}\right|\Rightarrow\vec{B}=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}\quad;\quad\vec{A}=\begin{pmatrix}1\\-1,5\\2\end{pmatrix}$$

On s'assure des deux résultats en calculant $\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{0}$

Les vecteurs unitaires correspondant à chacun des deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont :

$$\boxed{\vec{A}=\vec{i}-1,5\vec{j}+2\vec{k}}\quad\frac{\vec{A}}{A}=\vec{u}_A\Rightarrow\boxed{\vec{u}_A=\frac{1}{\sqrt{7,25}}\vec{i}-\frac{1,5}{\sqrt{7,25}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{7,25}}\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{B}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}}\quad\frac{\vec{B}}{B}=\vec{u}_B\Rightarrow\boxed{\vec{u}_B=\frac{2}{\sqrt{29}}\vec{i}-\frac{3}{\sqrt{29}}\vec{j}+\frac{4}{\sqrt{29}}\vec{k}}$$

**Exercice2.7 :**

Des données nous pouvons en déduire que l'angle entre les deux vecteurs est :

$$180-(25+50)=105°$$

Appliquons la formule **2.9** pour trouver les deux composantes :

$$\frac{V}{\sin 105°}=\frac{V_x}{\sin 50}=\frac{V_y}{\sin 25}$$

$$\frac{V}{\sin 105°}=\frac{V_x}{\sin 50}\Rightarrow\boxed{V_x=\frac{\sin 50}{\sin 105°}V}\Rightarrow\boxed{V_x=23,8}$$

$$\frac{V}{\sin 105°}=\frac{V_y}{\sin 25}\Rightarrow\boxed{V_y=\frac{\sin 25}{\sin 105°}V}\Rightarrow\boxed{V_y=13,1}$$

AhmedFIZAZI

# III/ PRINCIPAUX SYSTEMES DE COORDONNEES
# الأنظمة الرئيسية للإحداثيات

Afin de déterminer la position instantanée d'un point matériel, nous devons choisir d'abord un repère parmi les différents repères les plus utiles. Dans ce qui suit nous allons rappeler les principaux systèmes de coordonnées.

## 1/ REPERES D'INERTIE OU GALILEENS (المعالم العطالية أو الغليلية):

(Galilée 1564-1642)

Pour déterminer la position d'un mobile dans l'espace, nous devons choisir avant tout un corps solide, que nous appelons référentiel, auquel nous associons des axes de coordonnées.

- **Définition :** tout ensemble de systèmes d'axes de coordonnées, lié à un corps solide $S$ qui est le référentiel (المرجع), constitue un repère (المعلم) lié à ce corps solide $S$.

**Exemple :** la table (référentiel) + 3 axes = repère lié à la table.

La terre (référentiel) + 3 axes quelque soit leur origine commune = repère lié à la terre.

Les repères galiléens sont constitués d'un système libre (c'est-à-dire au repos ou en mouvement rectiligne uniforme).

Dans un référentiel galiléen $R$ donné, on repère une position ponctuelle $M$ à l'aide de trois coordonnées spatiales et une coordonnée temporelle, donc la position est définie par quatre nombres réels comme par exemple $(X,Y,Z,t)$.

Si on note la position d'un point $M$ par $\vec{r} = \overrightarrow{OM}(x,y,z,t)$ au temps $t$, son mouvement dans le repère $R$ est défini par l'application $t \mapsto \vec{r}(t)$.

## 2/ PRINCIPAUX REFERENTIELS GALILEENS (أهم المراجع الغليلية)

- **Repère Copernic** (Copernic1473-1543)

Ce repère est défini par trois axes issus du centre du système solaire et dirigés vers trois étoiles fixes choisies convenablement. (Figure 3.1)

Ce système est utilisé pour l'étude du mouvement des planètes et des vaisseaux spatiaux interplanétaires.

La terre accomplit un tour autour du pôle nord-sud en un jour, sa révolution autour du soleil est d'une année.

- **Le Repère géocentrique (المعلم الجيومركزي)**

Ce repère est défini par trois axes issus du centre d'inertie de la terre et dirigés vers trois étoiles fixes du repère de Copernic. Ce repère est utilisé pour l'étude du mouvement de la lune et des satellites en rotation autour de la terre.

- **Le Repère terrestre (المعلم الأرضي)**

Ce repère est défini par trois axes perpendiculaires issus de n'importe quel point de la terre. Ce repère est utilisé pour l'étude des corps en mouvement liés à la terre. Dans ce repère la terre est fixe, elle constitue donc un repère galiléen.

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

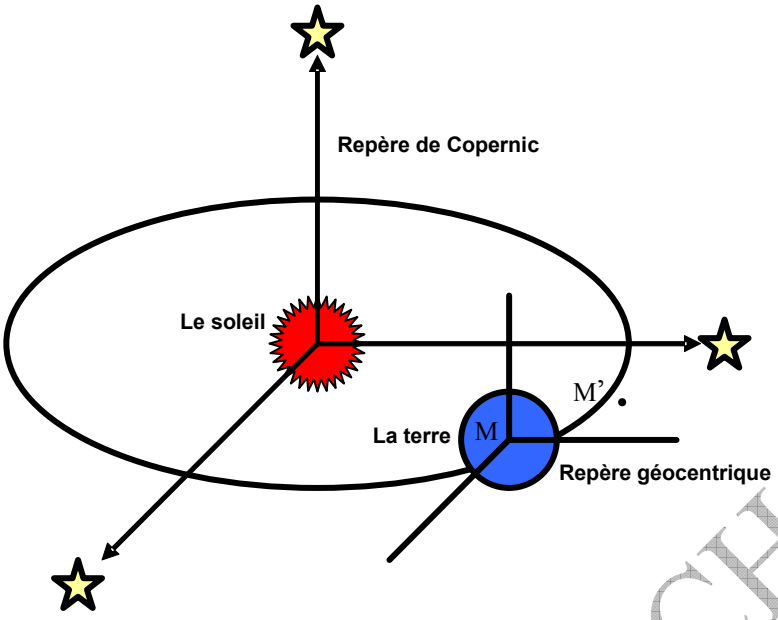



**Fig 3.1: les différents repères**

## 3/ LES COORDONNEES CARTESIENNES (الإحداثيات الكارتيزية)

### a/ Le repère spatial (المعلم الفضائي):

Si le mouvement s'effectue dans l'espace, il est possible de repérer la position du mobile ponctuel $M$ dans le repère $R(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ à l'aide du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ ou bien à l'aide des coordonnées cartésiennes ( de René Descartes 1596-1650) ou rectangulaires et qui sont :

**x : abscisse (فاصلة )**
**y : ordonnée(ترتيب)**
**z : altitude(علو)**

Le vecteur position s'écrit alors : $\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}}$ **(3.1)**

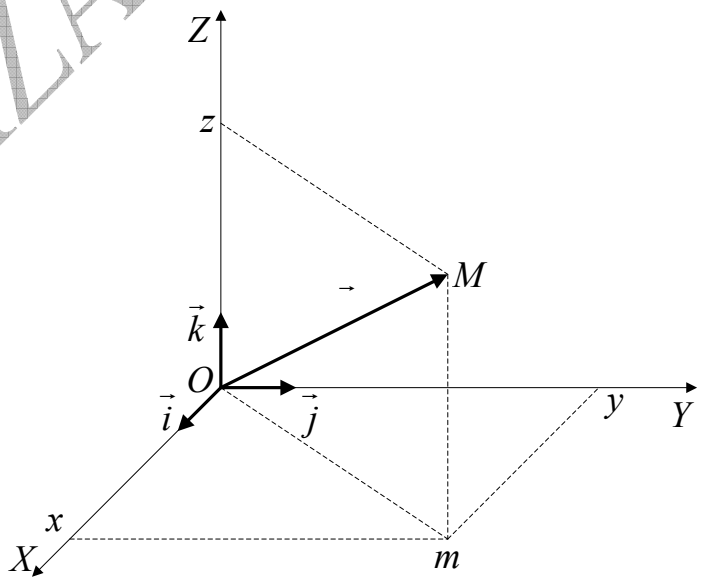



**Fig 3.2: Coordonnées cartésiennes**

A.FIZAZI Univ-BECHAR

### b/ Le repère plan (المعلم المستوي)

Si le mouvement s'effectue dans le plan, il est possible de repérer la position du mobile ponctuel $M$ dans le repère $R(O;\vec{i},\vec{j})$ à l'aide des coordonnées rectangulaires $x$ et $y$, ou bien à l'aide du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

Le vecteur position s'écrit donc : $\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j}}$ **(3.2)**

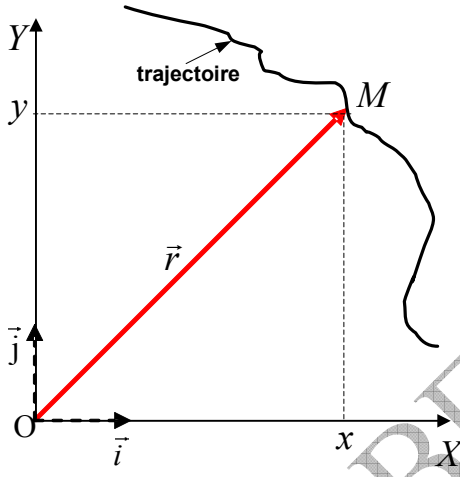



**Fig 3.3: Coordonnées rectangulaires**

### c/ Le repère rectiligne (المعلم المستقيم)

Si le mouvement est rectiligne, on se contente de l'axe $OX$ tel que le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i}} \quad \textbf{(3.3)}$$

## 4/ LES COORDONNEES POLAIRES (الإحداثيات القطبية)

Quand le mouvement est plan, là aussi, on peut repérer la position du mobile $M$ par ses coordonnées polaires $(r,\varphi)$. (Fig3.4)

$r$ : Rayon polaire **(نصف القطر القطبي)**

$\varphi$ : Angle polaire **(الزاوية القطبية)**

Le vecteur position dans ce repère s'écrit donc :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r} \quad \textbf{(3.4)}$$

De la même façon que nous avons obtenu la relation (2.8), nous pouvons écrire dans ce cas :

$$\boxed{\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi} \text{ et } \boxed{\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi}$$

Ainsi nous pouvons écrire le vecteur position en coordonnées polaires comme suit :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = A_r.\vec{u}_r + A_\varphi.\vec{u}_\varphi} \quad \textbf{(3.5)}$$

Où $(A_r, A_\varphi)$ représente les deux composantes de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi)$.

La relation qui lie les coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires est :

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

$$\boxed{\begin{array}{ll} x = r.\cos\theta & \varphi = arccos\, x/r \\ y = r.\sin\theta & \varphi = \arcsin\, y/r \end{array}} \qquad \textbf{(3.6)}$$

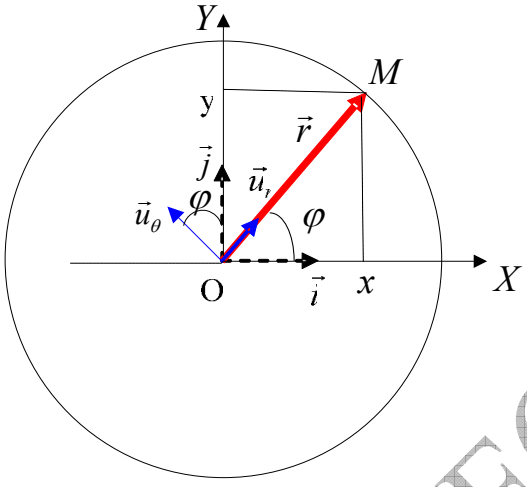



**Fig 3.4: Coordonnée polaires**

## 5/ LES COORDONNEES CYLINDRIQUES (الإحداثيات الأسطوانية)

Si la trajectoire est spatiale, où $\rho$ et $oz$ (figure 3.5) jouent un rôle particulier dans la détermination de la position du mobile, il est préférable de faire appel aux coordonnées cylindriques $(\rho, \varphi, z)$:

$\rho$ : rayon polaire (نصف القطر القطبي)

$\varphi$ : angle polaire(الزاوية القطبية)

$z$ : altitude (العلو)

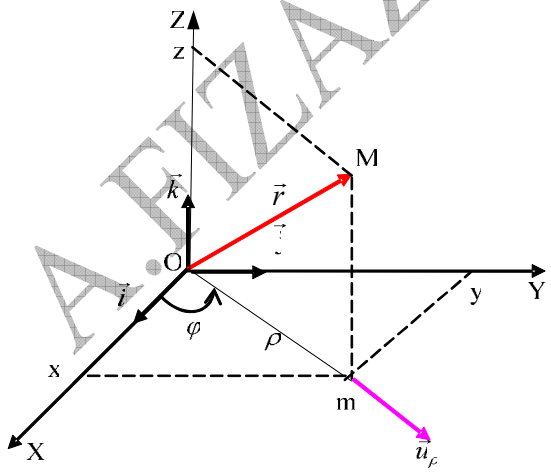



**Fig 3.5: Coordonnées cylindriques**

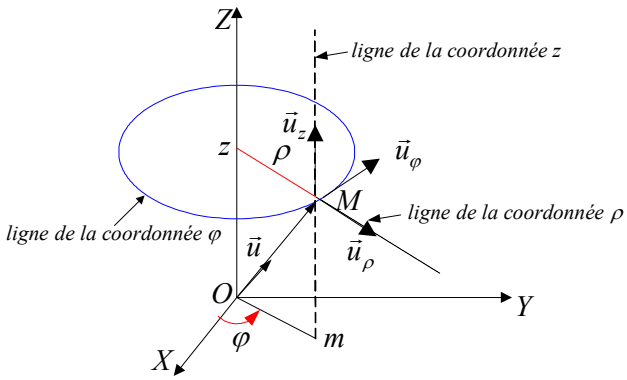



**Fig 3.6: Base des coordonnées cylindriques**

En se référant à la figure 3.5 nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = r.\vec{u}$$

A.FIZAZI_Univ BECHAR

D'où $\boxed{\vec{r} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{k}}$

De même :

$$\boxed{\vec{u}_\rho = \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi}$$

**Attention à ne pas confondre $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_r$ !!!**

Nous pouvons écrire maintenant l'expression du vecteur position sous la forme :

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{OM} = \vec{r} &= \vec{i}.\rho.\cos\varphi + \vec{j}.\rho\sin\varphi + \vec{k}.z \\ \overrightarrow{OM} = \vec{r} &= \vec{i}.x + \vec{j}.y + \vec{k}.z\end{aligned}} \quad \textbf{(3.8)}$$

Nous pouvons transformer l'expression précédente du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sous la forme :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = A_\rho.\vec{u}_\rho + A_\varphi.\vec{u}_\varphi + A_z.\vec{u}_z} \quad \textbf{(3.9)}$$

Où $\left(A_\rho, A_\varphi, A_z = z\right)$ sont les composantes de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z = \vec{k}\right)$. Pour obtenir l'expression du vecteur unitaire $\vec{u}_\varphi$ il suffit de se rendre compte que les vecteurs unitaires qui constituent la base $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z = \vec{k}\right)$ sont perpendiculaires entre eux ; donc $\vec{u}_\varphi$ est le produit vectoriel de $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_\rho$ . Ainsi :

$$\boxed{\vec{u}_\varphi = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi} \quad \textbf{(3.10)}$$

Par identification des relations (3.1) et (3.8) on en déduit les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques :

$$\boxed{\begin{array}{l|l} x = \rho\cos\varphi & \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = \rho\sin\varphi \Rightarrow & \varphi = arctgy/x \\ z = z & \varphi = \arccos x/\rho = \arcsin y/\rho \end{array}} \quad \textbf{(3.11)}$$

**Remarque :** si $z = 0$ nous reconnaissons alors les coordonnées polaires qui ne sont donc qu'un cas particulier des coordonnées cylindriques.

## 6/ LES COORDONNEES SPHERIQUES (الإحداثيات الكروية)

Quand le point O et la distance séparant M de O, jouent un rôle caractéristique, l'utilisation des coordonnées sphériques $\left(r, \theta, \varphi\right)$ est la mieux adaptée, avec :

$r$ : rayon polaire(نصف القطر القطبي )

$\theta$ : azimut (سمت)

$\varphi$ : coaltitude (تمام العرض)

Nous démontrons géométriquement (figure 3.7) les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnés sphériques :

$$\boxed{\begin{array}{l|c|l} x = \rho\cos\varphi & & x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi & \Leftrightarrow & y = r\sin\theta\sin\varphi \\ \rho = r\sin\theta & & z = r\cos\theta \end{array}} \quad \textbf{(3.12)}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arccos {}^{z}\!/_{r} \\ \varphi &= arctg\, {}^{y}\!/_{x} \end{aligned}} \qquad \textbf{(3.13)}$$

Quant à la relation entre les coordonnées cylindriques et les cordonnées sphériques elle est :

$$\begin{array}{ll} \rho = r\sin\theta & r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \varphi = \varphi & \varphi = \varphi \\ z = r\cos\theta & \theta = arctg\, {}^{\rho}\!/_{z} \end{array} \qquad \textbf{(3.14)}$$

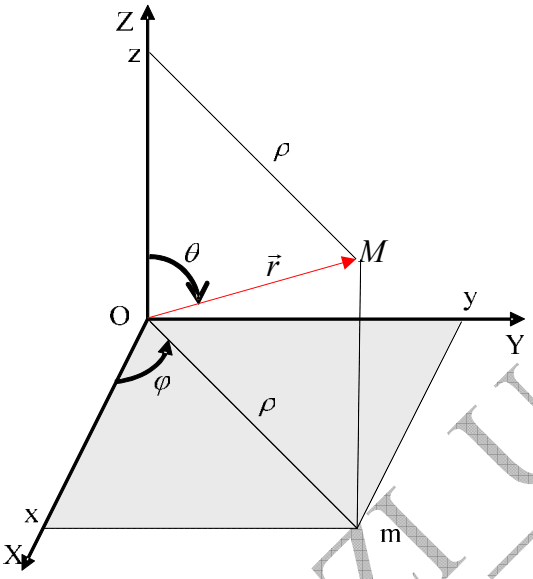



Fig 3.7 : Coordonnées sphériques

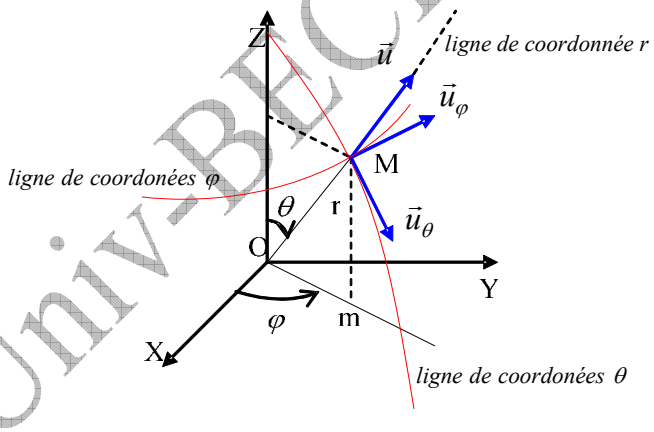



Fig 3.8 : Base des coordonnées sphériques

En coordonnées cartésiennes le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

En coordonnées sphériques on peut l'écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = A_r.\vec{u}_r + A_\varphi.\vec{u}_\varphi + A_\theta.\vec{u}_\theta} \qquad (15.3)$$

Où $\left(A_r, A_\varphi, A_\theta\right)$ sont les composantes de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta\right)$

**Remarque : Pour couvrir tout l'espace en coordonnées sphériques, nous admettons les variations :**

de 0 à $\infty$, $\theta$ de 0 à $\pi$, $\varphi$ de 0 à $2\pi$

- **Expressions des vecteurs unitaires** $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta\right)$ : En se référant à tout ce qui a été dit sur les coordonnées sphériques, nous pouvons écrire :

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

$$\vec{r} = r.\vec{u}_r = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$$

$$\overrightarrow{Om} = \rho.\vec{u}_\rho = \rho\left[\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi\right]$$

$$\overrightarrow{mM} = z.\vec{k} = \vec{k}.r\cos\theta.$$

$$\rho = r.\sin\theta$$

Nous en déduisons : $\vec{r} = r\left[\vec{i}.\cos\varphi.\sin\theta + \vec{j}.\sin\varphi.\sin\theta + \vec{k}.\cos\theta\right]$

Il nous apparaît clairement l'expression de $\vec{u}$ :

$$\boxed{\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\varphi.\sin\theta + \vec{j}.\sin\varphi.\sin\theta + \vec{k}.\cos\theta} \qquad \textbf{(3.16)}$$

Connaissant le vecteur :

$$\boxed{\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi}$$

Il nous reste à déterminer le vecteur $\vec{u}_\theta$. La base $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta\right)$ étant orthogonale, le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ est donc le résultat du produit vectoriel entre $\vec{u}_\varphi$ et $\vec{u}$ .

$$\boxed{\vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta} \qquad \textbf{(3.17)}$$

## 7/ LES COORDONNEES CURVILIGNES (الإحداثيات المنحنية)

Nous pouvons repérer la position du mobile sur la trajectoire elle-même à l'aide de l'abscisse curviligne (الفاصلة المنحنية). Pour ce faire :

-On oriente la trajectoire au hasard,

- on choisit un point fixe 0 sur la trajectoire, comme étant l'origine des abscisses,

L'abscisse curviligne est défini comme étant la grandeur algébrique $s$ de l'arc appartenant à la trajectoire de 0 jusqu'à M.

$$\boxed{\overset{\frown}{OM} = s} \qquad \textbf{(18.3)}$$

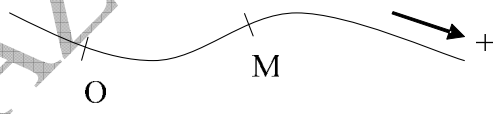



**Fig 3.9 : Coordonnées curvilignes**

A.FIZAZI Univ-BECHAR

# EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

| | |
|---|---|
| **Exercice 3.1**<br>Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j})$ en coordonnées polaires $(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi)$ : $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ | **التمرين 1.3**<br>حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j})$ إلى جملة الإحداثيات القطبية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ |
| **Exercice 3.2**<br>Convertir le vecteur suivant des coordonnées sphériques $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ en coordonnées cartésiennes: $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ $\vec{V} = V_r\vec{u}_r + V_\theta\vec{u}_\theta + V_\varphi\vec{u}_\varphi$ | **التمرين 2.3**<br>حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكروية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ إلى جملة الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\vec{V} = V_r\vec{u}_r + V_\theta\vec{u}_\theta + V_\varphi\vec{u}_\varphi$ |
| **Exercice 3.3**<br>Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en coordonnées cylindriques $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$ : $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{i} + Z\vec{i}$ | **تمرين 3.3**<br>حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ إلى جملة الإحداثيات الأسطوانية $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$: $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{i} + Z\vec{i}$ |
| **Exercice 3.4**<br>Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en coordonnées sphériques $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ : $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ | **التمرين 4.3:**<br>حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ إلى جملة الإحداثيات الكروية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ |
| **Exercice 3.5**<br>Convertir le vecteur suivant en coordonnées sphériques $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{A} = \rho^2.\vec{u}_\rho + \cos\varphi.\vec{u}_\varphi$ | **التمرين 5.3**<br>حوّل عبارة الشعاع التالي إلى الإحداثيات الكروية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{A} = \rho^2.\vec{u}_\rho + \cos\varphi.\vec{u}_\varphi$ |
| **Exercice 3.6**<br>Convertir le vecteur suivant des coordonnées cylindriques $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$ en coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ : $\vec{V} = V_r\vec{u}_r + V_\varphi\vec{u}_\varphi + V_z\vec{u}_z$ | **تمرين 6.3**<br>حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الأسطوانية $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$ إلى جملة الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\vec{V} = V_r\vec{u}_r + V_\varphi\vec{u}_\varphi + V_z\vec{u}_z$ |

**التمرين 7.3:**

جد عبارة المسافة بين نقطتين $M\left(\rho_M,\varphi_M,z_M\right)$ و $N\left(\rho_N,\varphi_N,z_N\right)$ و ذلك بالطريقتين المختلفتين:

1/ بتحويل عبارة الشعاع $\overrightarrow{MN}$ إلى الإحداثيات الكارتيزية،

2/ بالحساب المباشر. بين أن المسافة بين النقطتين $M$ و $N$ تكتب بالشكل التالي:

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\rho_N^2+\rho_M^2+\left(z_N-z_M\right)^2-2\rho_N.\rho_M.\cos\left(\varphi_M-\varphi_N\right)}$$

**Exercice 3.7**

Trouver la distance entre les deux points $M\left(\rho_M,\varphi_M,z_M\right)$ et $N\left(\rho_N,\varphi_N,z_N\right)$ par les deux méthodes :

1/ en convertissant l'expression du vecteur $\overrightarrow{MN}$ en coordonnées cartésiennes.

2/ par le calcul direct.

Montrer que la distance entre les points $M$ et $N$ s'écrit :

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\rho_N^2+\rho_M^2+\left(z_N-z_M\right)^2-2\rho_N.\rho_M.\cos\left(\varphi_M-\varphi_N\right)}$$

A.FIZAZI _ Univ-BECHAR

## Corrigés des exercices 3.1 à 3.7 حلول التمارين من 1.3 إلى 7.3

**Exercice 3.1:**

Si l'expression du vecteur en coordonnées cartésiennes est $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}$, alors, il est possible d'écrire l'expression du même vecteur en coordonnées polaires sous la forme : $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$. Connaissant les expressions des vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{u}_\varphi$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on peut déterminer les valeurs $V$ et $V_\varphi$.

$$\left.\begin{aligned}\vec{u}_r &= \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi \\ \vec{u}_\varphi &= -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi\right) + V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right)$$

En organisant la dernière équation :

$$\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi}_{Y}\right)$$

Ainsi nous aboutissons à un système de deux équations à deux inconnues $V$ et $V_\varphi$ :

$$\begin{cases} V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi = X \\ V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi = Y \end{cases}$$

Après résolution on trouve :

$$\boxed{V_r = X\cos\varphi + Y\sin\varphi} \;;\; \boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi}$$

L'expression du vecteur $\vec{V}$ est donc :

$$\boxed{\vec{V} = \left(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right)\vec{u}_r + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi}$$

Nous constatons que, pour trouver les deux résultats précédents, il y a beaucoup de calculs à faire si on suit la méthode algébrique ordinaire. Il est plus facile et plus rapide si on opte pour la méthode des matrices. Rappelons brièvement cette dernière méthode :
On part de l'étape où nous avons obtenu les deux équations :

$$X = V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi$$
$$Y = V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi$$

Nous créons une matrice de déplacement :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_r \\ V_\varphi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_r \\ V_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Le résultat est :

$$\boxed{V_r = X\cos\varphi + Y\sin\varphi} \;;\; \boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi}$$

L'expression du vecteur $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ en coordonnées polaires est donc :

$$\boxed{\vec{V} = \left(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right)\vec{u}_r + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi}$$

**Exercice 3.2:**

Le vecteur s'écrit : $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\theta.\vec{u}_\theta + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, il s'écrit $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

Rappelons-nous des expressions des vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\vec{u}_r = \vec{i}.\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}.\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}.\cos\theta$$
$$\vec{u}_\theta = \vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta$$
$$\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi$$

D'où en remplaçant :

$$\vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}.\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}.\cos\theta\right) + V_\theta\left(\vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta\right) + V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right)$$

Développons et organisons la dernière équation pour trouver l'expression du vecteur $\vec{V}$ en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi + -V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + \cos\varphi}_{Y}\right) + \vec{k}\left(\underbrace{V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta}_{Z}\right)$$

Les coordonnées cartésiennes sont :

$$X = V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi$$
$$Y = V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi$$
$$Z = V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta$$

Le vecteur $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\theta.\vec{u}_\theta + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$ s'écrit donc dans la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ :

$$\boxed{\vec{V} = \left(V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi\right)\vec{i} + \left(V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi\right)\vec{j} + \left(V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta\right)\vec{k}}$$

**Exercice 3.3:**

Le vecteur $\vec{V}$ dans la base $\left(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$ s'écrit sous la forme : $\vec{V} = V_\rho.\vec{u}_\rho + V_\varphi.\vec{u}_\varphi + V_z.\vec{u}_z$

Connaissant les expressions des vecteurs unitaires $\left(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$ en fonction de $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ on peut écrire :

$$\left.\begin{aligned}\vec{u}_\rho &= \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi\\ \vec{u}_\varphi &= -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\\ \vec{u}_z &= \vec{k}\end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi\right) + V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right) + V_z\vec{k}$$

En organisant l'expression obtenue elle devient :

$$\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_\rho\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_\rho\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi}_{Y}\right) + \underbrace{V_z}_{Z}\vec{k}$$

On obtient un système d'équations de trois équations à trois inconnues $V_\rho$, $V_\varphi$ et $V_z$

$$\begin{cases} X = V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi\\ Y = V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi\\ Z = V_z\end{cases}$$

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

On a le droit de choisir la méthode que nous maîtrisons le mieux pour arriver au résultat attendu. Si on choisit la méthode des matrices le raisonnement est le suivant :

On crée une matrice de déplacement à partir du système d'équations obtenu :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_\rho \\ V_\varphi \\ V_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_\rho \\ V_\varphi \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Le résultat se déduit directement :

$$\boxed{V_\rho = X\cos\varphi + Y\sin\varphi} \;;\; \boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi} \;;\; \boxed{V_z = Z}$$

$$\boxed{\vec{V} = \left(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right)\vec{u}_\rho + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi + Z\vec{u}_z}$$

**Exercice 3.4:**

Le vecteur $\vec{V}$ dans la base $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$ s'écrit sous la forme : $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\theta.\vec{u}_\theta + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$

Connaissant les expressions des vecteurs unitaires $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , on peut écrire :

$$\vec{u}_r = \vec{i}.\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}.\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}.\cos\theta$$
$$\vec{u}_\theta = \vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta$$
$$\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi$$

$$\vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}.\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}.\cos\theta\right) + V_\theta\left(\vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta\right) + V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right)$$

Développons puis organisons l'équation précédente pour obtenir :

$$\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi + -V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + \cos\varphi}_{Y}\right) + \vec{k}\left(\underbrace{V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta}_{Z}\right)$$

On constitue un système de trois équations à trois inconnues $V$ , $V_\theta$ et $V_\varphi$ :

$$\begin{cases} X = V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi \\ Y = V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi \\ Z = V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta \end{cases}$$

Si on choisit la méthode des matrices, qui a fait preuve d'à aboutir au résultat escompté très facilement et très rapidement, on doit d'abord construire la matrice de déplacement à partir du système d'équations précédent :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & -\sin\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

On trouve :

$$\boxed{V_r = X\sin\theta\cos\varphi + Y\sin\theta\sin\varphi + Z\cos\theta} \;;\; \boxed{V_\theta = X\cos\theta\cos\varphi + Y\cos\theta\sin\varphi - Z\sin\theta}$$

$$\boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi}$$

En fin de compte l'expression du vecteur $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ en coordonnées sphériques est :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{V} = &\left(X\sin\theta\cos\varphi + Y\sin\theta\sin\varphi + Z\cos\theta\right)\vec{u}_r + \left(X\cos\theta\cos\varphi + Y\cos\theta\sin\varphi - Z\sin\theta\right)\vec{u}_\theta + \\ &\left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi\end{aligned}}$$

**Exercice 3.5:**

Commençons par transformer le vecteur $\vec{B} = \rho^2.\vec{u}_\rho + \cos\varphi.\vec{u}_\varphi$ en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A} = \rho^2\left(\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi\right) + \cos\varphi\left(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi\right)$$

En développant et en organisant l'équation, nous obtenons l'expression du vecteur $\vec{A}$ en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A} = \vec{i}\left(\underbrace{\rho^2.\cos\varphi - \cos\varphi.\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{\rho^2\sin\varphi + \cos^2\varphi}_{Y}\right) + \underbrace{0}_{Z}\vec{k}$$

$$X = \rho^2.\cos\varphi - \cos\varphi.\sin\varphi \;;\; Y = \rho^2\sin\varphi + \cos^2\varphi \;;\; Z = 0$$

On doit maintenant transformer cette dernière expression en coordonnées sphériques en faisant appel au résultat de l'exercice 3.4 :

$$\vec{A} = \left(X\sin\theta\cos\varphi + Y\sin\theta\sin\varphi + Z\cos\theta\right)\vec{u}_r + \left(X\cos\theta\cos\varphi + Y\cos\theta\sin\varphi - Z\sin\theta\right)\vec{u}_\theta + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi$$

Il ne nous reste plus qu'à remplacer $X, Y, Z$ par leurs valeurs respectives trouvées ci-dessus :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{A} = &\left[\left(\rho^2.\cos\varphi - \cos\varphi.\sin\varphi\right)\sin\theta\cos\varphi + \left(\rho^2\sin\varphi + \cos^2\varphi\right)\sin\theta\sin\varphi\right]\vec{u}_r + \\ &\left[\left(\rho^2.\cos\varphi - \cos\varphi.\sin\varphi\right)\cos\theta\cos\varphi + \left(\rho^2\sin\varphi + \cos^2\varphi\right)\cos\theta\sin\varphi\right]\vec{u}_\theta + \\ &\left[\left(-\rho^2.\cos\varphi + \cos\varphi.\sin\varphi\right)\sin\varphi + \left(\rho^2\sin\varphi + \cos^2\varphi\right)\cos\varphi\right]\vec{u}_\varphi\end{aligned}}$$

**Exercice 3.6:**

Le vecteur $\vec{V}$ dans la base $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\right)$ est $\vec{V} = V_\rho.\vec{u}_\rho + V_\varphi.\vec{u}_\varphi + V_z.\vec{u}_z$. Partant des expressions connues des vecteurs unitaires $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\right)$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, on peut écrire :

$$\left.\begin{aligned}\vec{u}_\rho &= \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi \\ \vec{u}_\varphi &= -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi \\ \vec{u}_z &= \vec{k}\end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi\right) + V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right) + V_z\vec{k}$$

Organisée elle devient :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_\rho \cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_\rho \sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi}_{Y}\right) + \underbrace{V_z}_{Z}\vec{k}$$

Par identification nous arrivons à :

$$X = V_r \cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi$$
$$Y = V_r \sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi$$
$$Z = V_z$$

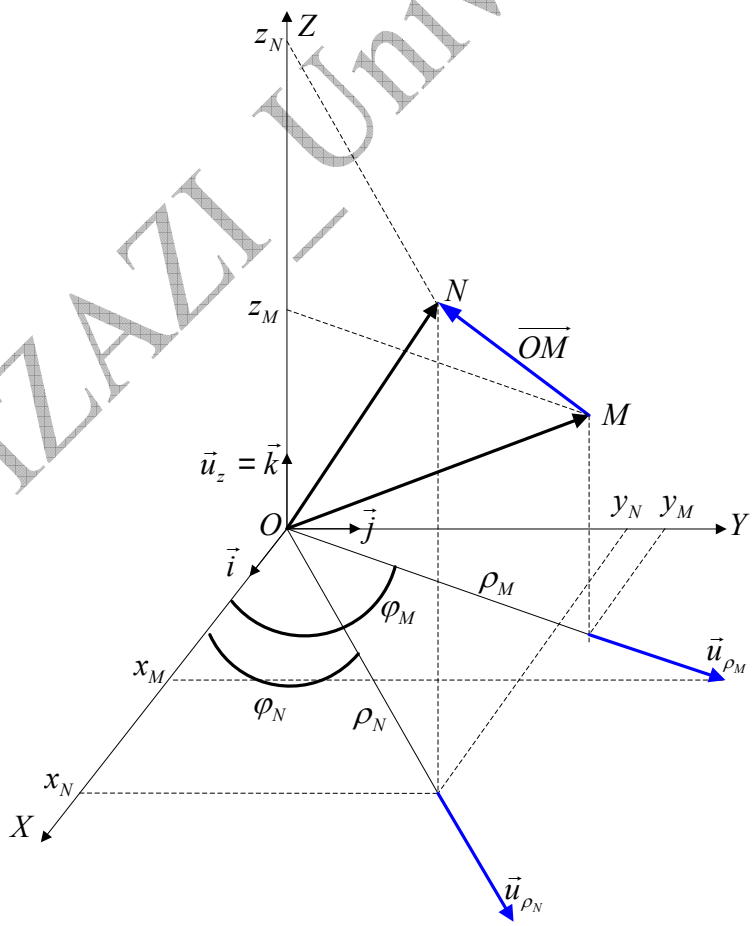
Le résultat final est : $\boxed{\vec{V} = \vec{i}\left(V_r \cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi\right) + \vec{j}\left(V_r \sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi\right) + \vec{k}V_z}$

**Exercice 3.7:**

**1/ Première méthode** : Trouver la distance entre les deux points $M(\rho_M, \varphi_M, z_M)$ et $N(\rho_N, \varphi_N, z_N)$ en transformant l'expression du vecteur $\overrightarrow{MN}$ en coordonnées cartésiennes.

La figure montre que la distance entre les points $M$ et $N$ est égale au module du vecteur $\overrightarrow{MN}$ :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \left(\rho_N \vec{u}_{\rho_N} + z_N \vec{u}_z\right) - \left(\rho_M \vec{u}_{\rho_M} + z_M \vec{u}_z\right)$$
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \left(\rho_N \vec{u}_{\rho_N} - \rho_M \vec{u}_{\rho_M}\right) + \left(z_N \vec{u}_z - z_M \vec{u}_z\right) \rightarrow (1)$$




A.FIZAZI_Univ-BECHAR

Expressions des vecteurs unitaires $\vec{u}_{\rho_N}, \vec{u}_{\rho_M}$ et $\vec{u}_z$ :

$$\vec{u}_{\rho_N} = \vec{i}.\cos\varphi_N + \vec{j}.\sin\varphi_N$$

$$\vec{u}_{\rho_M} = \vec{i}.\cos\varphi_M + \vec{j}.\sin\varphi_M$$

$$\vec{u}_z = \vec{k}$$

Remplaçons $\vec{u}_{\rho_N}, \vec{u}_{\rho_M}$ dans l'équation $(1)$ :

$$\overrightarrow{MN} = \rho_N\left(\vec{i}.\cos\varphi_N + \vec{j}.\sin\varphi_N\right) - \rho_M\left(\vec{i}.\cos\varphi_M + \vec{j}.\sin\varphi_M\right) + \left(z_N\vec{u}_z - z_M\vec{u}_z\right)$$

Nous organisons l'équation pour qu'elle devienne :

$$\overrightarrow{MN} = \left(\rho_N\cos\varphi_N - \rho_M\cos\varphi_M\right)\vec{i} + \left(\rho_N\sin\varphi_N - \rho_M\sin\varphi_M\right)\vec{j} + \left(z_N - z_M\right)\vec{k}$$

La distance entre les points $M$ et $N$ st égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{MN}$ :

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\left(\rho_N\cos\varphi_N - \rho_M\cos\varphi_M\right)^2 + \left(\rho_N\sin\varphi_N - \rho_M\sin\varphi_M\right)^2 + \left(z_N - z_M\right)^2}$$

Après calculs nécessaires on trouve :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{{\rho_N}^2 + {\rho_M}^2 - \left[2\rho_N.\rho_M\left(\cos\varphi_N.\cos\varphi_M - \sin\varphi_N.\sin\varphi_M\right)\right] + \left(z_N - z_M\right)^2}} \rightarrow (2)$$

**2/ <u>Deuxième méthode</u>** : trouver la distance entre les points $M\left(\rho_M, \varphi_M, z_M\right)$ et $N\left(\rho_N, \varphi_N, z_N\right)$ par le calcul direct :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \left(\rho_N\vec{u}_{\rho_N} + z_N\vec{u}_z\right) - \left(\rho_M\vec{u}_{\rho_M} + z_M\vec{u}_z\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(\rho_N\vec{u}_{\rho_N} - \rho_M\vec{u}_{\rho_M}\right) + \left(z_N - z_M\right)\vec{u}_z$$

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{{\rho_N}^2 + {\rho_M}^2 - 2\rho_N.\rho_M\cos(\vec{u}_{\rho_N}, \vec{u}_{\rho_M}) + \left(z_N - z_M\right)^2}$$

D'après la figure, nous voyons que l'angle compris entre les deux vecteurs unitaires $\vec{u}_{\rho_N}, \vec{u}_{\rho_M}$ est égal à $\varphi_N - \varphi_M$. Nous obtenons donc:

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{{\rho_N}^2 + {\rho_M}^2 - 2\rho_N.\rho_M\cos(\varphi_N - \varphi_M) + \left(z_N - z_M\right)^2}} \rightarrow (3)$$

Pour vérifier que les deux résultats $(2)$ et $(3)$ sont compatibles, il suffit de procéder à une transformation trigonométrique adéquate de l'équation $(2)$ :

$$\cos\varphi_N.\cos\varphi_M - \sin\varphi_N.\sin\varphi_M = \cos\left(\varphi_N - \varphi_M\right) = \cos\left(\varphi_M - \varphi_N\right)$$

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

# IV/CINEMATIQUE
# عـــلـــم الـــحـــركـــيـــات

## A-IV/ CARACTERISTIQUES DU MOUVEMENT
## مميزات الحركة

### 1/ INTRODUCTION (مقدمة)

- La cinématique est l'étude des mouvements sans se préoccuper des causes responsables de ces mouvements (comme les forces par exemple…)
- Le point matériel est tout corps matériel dont les dimensions sont théoriquement nulles et pratiquement négligeables par rapport à la distance parcourue.

L'état de mouvement ou de repos d'un corps sont deux notions essentiellement relatives : par exemple une montagne est au repos par rapport à la terre mais en mouvement par rapport à un observateur qui regarde la terre de loin et pour lequel le globe terrestre (avec tout ce qu'il renferme) est en perpétuel mouvement.

Quiconque veut étudier un mouvement doit à priori s'imposer un référentiel (ou un repère) par rapport auquel le mouvement est analysé. Ceci se traduit par le fait qu'un mouvement ne peut se définir que par rapport à un repère.

Cette étude du mouvement s'effectue selon l'une des deux formes :

- **vectorielle :** en utilisant les vecteurs : position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{a}$.
- **algébrique** : en définissant l'équation du mouvement suivant une trajectoire donnée.

### 2/ POSITION DU MOBILE (موضع المتحرك):

La position d'un point matériel $M$ au temps $t$ est repérée dans un repère $\Re(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par un vecteur position $\overrightarrow{OM}$ (figure 4.1). La formule 4.1 exprime le vecteur position en coordonnées cartésiennes.

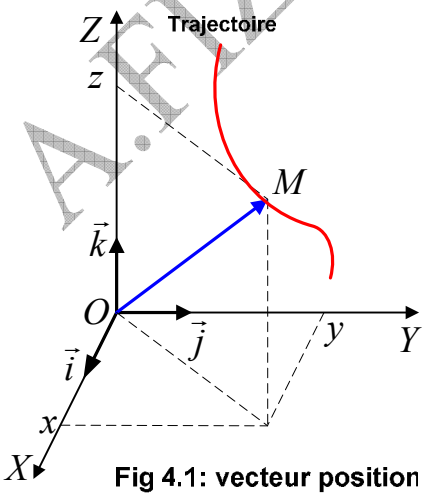



Fig 4.1: vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \qquad (4.1)$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

## 3/ LES EQUATIONS HORAIRES (المعادلات الزمنية):

Un point matériel est au **repos** dans un repère choisi si ses coordonnées $x, y, z$ sont indépendantes du temps, et il est en **mouvement** si ses coordonnées varient en fonction du temps.

(On a choisi des coordonnées cartésiennes, mais on aurait pu choisir n'importe quelles autres coordonnées).

Ces coordonnées peuvent être notées par :

$$\boxed{x(t), y(t), z(t)} \qquad \textbf{(4.2)}$$

On appelle ces fonctions, les **équations horaires** du mouvement. On peut les exprimer sous la forme :

$$\boxed{x = f(t), y = g(t), z = h(t)} \qquad \textbf{(4.3)}$$

### ➢ La trajectoire (المسار )

La trajectoire est l'ensemble des positions occupées par le mobile au cours de son mouvement pendant des instants successifs. La trajectoire peut être matérielle ( la route suivie par une automobile par exemple ) ou imaginaire (trajectoire de la lune par exemple).

L'étude d'un mouvement plan se fait en coordonnées rectangulaires dans le repère $R(O;\vec{i},\vec{j})$ où la position est définie par les deux coordonnées : $x(t), y(t)$

La fonction $x \mapsto y(x)$ s'appelle **équation cartésienne de la trajectoire (المعادلة الكارتيزية للمسار).**

**On obtient l'équation de la trajectoire par élimination du temps entre les deux équations horaires.**

**Exemple 4.1 :** Les équations horaires du mouvement d'un point matériel tiré dans l'espace sont $x = 2t$ ; $y = 0$ ; $z = -5t^2 + 4t$ (toutes les unités sont dans le système international).

1/ Trouver l'équation cartésienne de la trajectoire, quelle est sa forme ?

2/ Ecrire l'expression du vecteur position au temps $t = 2s$

**Réponse :**

1/ On tire $t$ de l'équation de $x$ qu'on remplace dans $z$ :

$$x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2}$$

$$\boxed{z = -1.25.x^2 + 2.x}$$ C'est l'équation d'une parabole.

2/ Expression du vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y\vec{j} + z.\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = (2t).\vec{i} + (-5t^2 + 4t).\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{OM}_{(t=2)} = 4\vec{i} - 12\vec{k}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM}_{(t=2)} = 4\vec{i} - 12\vec{k}}$$

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

**Exemple 4.2 :** Le mouvement d'un point matériel est défini dans un repère cartésien par ses deux équations horaires :

$$x = a\sin(\omega t + \varphi)$$
$$y = a\cos(\omega t + \varphi)$$

Quelle est donc la trajectoire suivie ?

**Réponse :**

En élève au carré les deux équations, puis on fait la somme membre à membre pour aboutir à l'équation d'un cercle de rayon $a$ :

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= a^2\sin^2(\omega.t+\varphi) \\ y^2 &= a^2\cos^2(\omega.t+\varphi) \end{aligned}\right| \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

## 4/ LE VECTEUR VITESSE (شعاع السرعة):

On considère que la vitesse est la distance parcourue par unité de temps.

### ❖ Vecteur vitesse moyenne (شعاع السرعة المتوسطة)

Regardons la figure 4.2 : entre l'instant $t$ où le mobile occupe la position $M$, et l'instant $t'$ où le mobile occupe la position $M'$, le vecteur vitesse moyenne est défini comme étant l'expression 4.4.

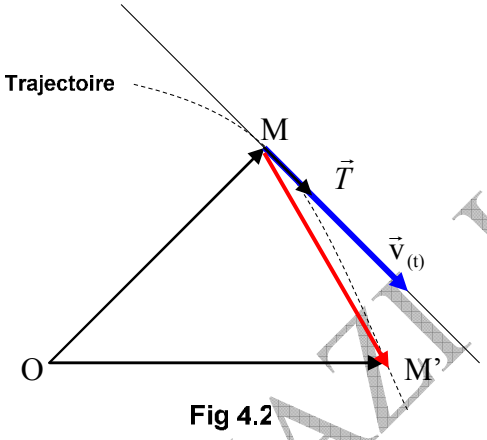



Fig 4.2

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t} \quad ; \quad v_{moy} = \frac{\left|\overrightarrow{MM'}\right|}{\Delta t} \qquad \textbf{(4.4)}$$

$\overrightarrow{MM'}$'s'appelle le vecteur déplacement

### ❖ Vecteur vitesse instantanée (شعاع السرعة اللحظية)

Le vecteur vitesse instantanée, c'est à dire au temps $t$, est la dérivée (مشتقة) du vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{v}_t = \lim_{t\to t'} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{t-t'} = \lim_{t'\to t} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \qquad \boxed{\vec{v}_t = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}} \qquad \textbf{(4.5)}$$

✓ **IMPORTANT : Le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}_{(t)}$ est porté par la tangente à la trajectoire au point $M$ ; il est toujours orienté dans le sens du mouvement** (Figure 4.3).

Dans le repère cartésien par exemple, on en déduit l'expression du vecteur vitesse instantanée à partir de l'expression du vecteur position en dérivant :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = \dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k}} \qquad \textbf{(4.6)}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

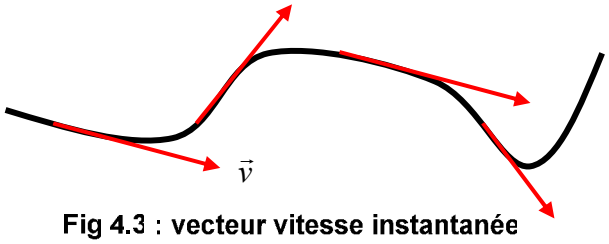



**Fig 4.3 : vecteur vitesse instantanée**

✓ **CONVENTIONS** (مصطلحات )

- Notation de Newton : on note la dérivée par rapport au temps en mettant un point sur le symbole de la variable. Si la dérivée est par rapport à une variable autre que le temps, la notation est de mettre une apostrophe(') après le symbole de la variable à dériver.
- Notation de Leibnitz : On note la dérivée de $y$, par exemple, par rapport au temps, par $\frac{dy}{dt}$ .

  Ainsi nous pouvons écrire $\dot{x} = \frac{dx}{dt}; \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}; \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}$

❖ **Module du vecteur vitesse instantanée** (شدة شعاع السرعة اللحظية)

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \qquad (4.7)$$

L'unité de la vitesse dans le système international $MKS$ est $m/s = m.s^{-1}$.

Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ en coordonnées cartésiennes sont donc :

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R \rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \end{pmatrix}_R$$

## 5/ LE VECTEUR ACCELERATION (شعاع التسارع):

Nous considérons que l'accélération est la variation de la vitesse par unité de temps.

❖ **Vecteur accélération moyenne** (شعاع التسارع المتوسط)

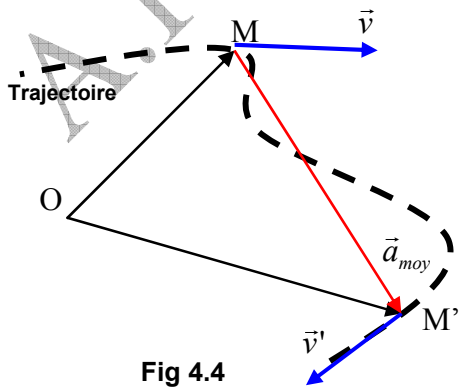



**Fig 4.4**

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}; \qquad a_{moy} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \qquad (4.8)$$

En considérant deux instants différents $t$ et $t'$ correspondants aux vecteurs position

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ et les vecteurs vitesse instantanée $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ (figure 4.4), le vecteur accélération moyenne est défini par l'expression 4.8

❖ **Vecteur accélération instantanée** (شعاع التسارع اللحظي)

Le vecteur accélération instantanée d'un mouvement est défini comme étant la dérivée du vecteur vitesse instantanée par rapport au temps.

$$\vec{a} = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t} = \lim_{t' - t} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \qquad \boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2}} \qquad \textbf{(4.9)}$$

On peut écrire maintenant en résumé les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes, avec les conventions de Newton et Leibnitz :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = \dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = \ddot{x}.\vec{i} + \ddot{y}.\vec{j} + \ddot{z}.\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}.\vec{i} + \frac{dy}{dt}.\vec{j} + \frac{dz}{dt}.\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{k}} \quad (4.10)$$

**Important : Le vecteur accélération est toujours dirigé vers la partie concave de la trajectoire**. (figure4.5)

❖ **Module du vecteur accélération instantanée** (طويلة شعاع التسارع اللحظي)

Ce module est donné par la formule 4.11

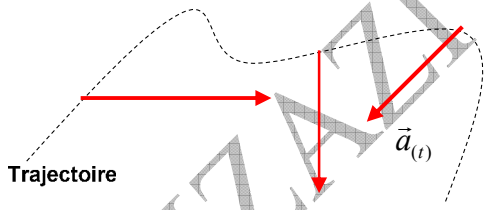



Fig 4.5 : vecteur accélération

$$\boxed{a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}} \qquad \textbf{(4.11)}$$

**CONCLUSION :** Dans un repère cartésien les vecteurs position, vitesse et accélération sont :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R \rightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \end{pmatrix}_R \rightarrow \vec{a} \begin{pmatrix} \ddot{x} = \dot{v}_x = a_x \\ \ddot{y} = \dot{v}_y = a_y \\ \ddot{z} = \dot{v}_z = a_z \end{pmatrix}_R \qquad \textbf{(4.12)}$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \rightarrow \vec{v} = v_x.\vec{i} + v_y.\vec{j} + v_z.\vec{k} \rightarrow \vec{a} = a_x.\vec{i} + a_y.\vec{j} + a_z.\vec{k}$$

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

**Remarque :** Le mouvement est dit accéléré si $\vec{a}.\vec{v} \succ 0$, et décéléré ou retardé si $\vec{a}.\vec{v} \prec 0$. Quant au sens du mouvement il est indiqué par le sens de la vitesse $\vec{v}$.

**Exemple 4.3 :** Soit le vecteur position $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x = 2t^2 \\ y = 4t - 5 \\ z = t^3 \end{pmatrix}$. En déduire le vecteur vitesse et le vecteur accélération instantanées, puis calculer le module de chacun d'eux.

**Réponse :** Nous dérivons deux fois de suite l'expression du vecteur position pour obtenir les vecteurs demandés et ensuite nous déduisons leurs modules :

$$\vec{v} = 4t.\vec{i} + 4\vec{j} + 3t^2\vec{k} \rightarrow \quad \vec{a} = 4\vec{i} + 0\vec{j} + 6t\vec{k}$$

$$v = \sqrt{16t^2 + 16 + 9t^4} \quad , \quad a = \sqrt{16 + 36t^2}$$

A.FIZAZI _ Univ-BECHAR

# EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

**Exercice 4.1**

Le mouvement rectiligne d'un point est défini par l'équation horaire : $s = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$.

a/ Calculer la vitesse et l'accélération à la date $t$.

b/ Etudier le mouvement du point lorsque t croît de $0$ à $+\infty$.(Dire dans quel sens se déplace le point et si le mouvement est accéléré ou retardé).

**التمرين1.4**

الحركة المستقيمة لنقطة مادية محددة بالمعادلة الزمنية: $s = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$

ا/ أحسب السرعة و التسارع في اللحظة t.

ب/ أدرس حركة النقطة لمّا يزداد الزمن $t$ من 0 إلى $+\infty$.( وضّح في أي اتجاه تنتقل النقطة و هل الحركة متسارعة أو متباطئة).

**Exercice 4.2**

Déterminer la trajectoire du mouvement plan défini par les équations :

$$x = \sin^2 t \ ; \ y=1+cos2t$$

Dessiner cette trajectoire dans le repère $Oxy$.

**التمرين:2.4**

عيّن مسار الحركة المستوية المعرّفة بالمعادلتين: $x = \sin^2 t \ ; \ y=1+cos2t$.

أرسم هذا المسار في المعلم $Oxy$.

**Exercice 4.3**

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le mouvement d'un mobile $M$ est défini par les équations suivantes : $x = t^3 - 3t \ ; \ y=-3t^2 \ ; \ z=t^3 + 3t$

a/ Calculer les coordonnées à la date t, du vecteur vitesse $\vec{v}$, et celles du vecteur accélération $\vec{a}$, du mobile M.

b/ Calculer la norme du vecteur $\vec{v}$ et montrer que ce vecteur fait un angle constant avec $Oz$.

**تمرين:3.4**

في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، تحدّد الحركة لمتحرّك $M$ بالمعادلات التالية:

$$x = t^3 - 3t \ ; \ y=-3t^2 \ ; \ z=t^3 + 3t$$

ا/ أحسب في اللحظة $t$ إحداثيات شعاع السرعة $\vec{v}$ ، و شعاع التسارع $\vec{a}$ ، للمتحرّك $M$.

ب/ أحسب طويلة الشعاع $\vec{v}$ و بيّن أن هذا الشعاع يصنع زاوية ثابتة مع $Oz$.

**Exercice4.4**

Un point est mobile dans le plan à partir de la date $t = 1$. Ses équations horaires sont :

$$x = \ln t \ ; \ y=t+\frac{1}{t}.$$

a/Ecrire l'équation de la trajectoire.

b/ Calculer les valeurs algébriques de la vitesse et de l'accélération au temps $t$.

**تمرين 4.4:**

تنتقل نقطة في مستوى ابتداء من اللحظة $t = 1$. معادلتاه الزمنيتان هما:

$$x = \ln t \ ; \ y=t+\frac{1}{t}$$

ا/ أكتب معادلة المسار.

ب/ أحسب القيم الجبرية للسرعة و التسارع في اللحظة $t$.

**التمرين5.4:**

في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},)$، يرسم متحرّك في الاتجاه المباشر نصف قطع زائد معادلته $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. تعيّن النقطة $M$ على القطع الزائد بالزاوية $\varphi$. حدّد شعاعي السرعة $\vec{v}$ و التسارع $\vec{\gamma}$ بدلالة المشتقتين $\dot{\varphi}$ و $\ddot{\varphi}$.

**Exercice 4.5**

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, un mobile $M$ décrit dans le sens direct l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Le point $M$ est repéré sur l'ellipse par l'angle $\varphi$.

Déterminer les vecteurs vitesse et accélération $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ en fonction des dérivées $\dot{\varphi}$ et $\ddot{\varphi}$.

**التمرين 6.4:**

ليكن في مستوى $(P)$، معلم متعامد و متجانس $xOy$ و متحرّك $M$ ينتقل في هذا المستوى. في اللحظة $t$ ، إحداثياته معرفتان بـــ:

$$x=\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\ ;\ y=2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$$

ا/ما هو مساره؟

ب/ أحسب إحداثيات شعاع السرعة $\vec{v}$ و شعاع التسارع $\vec{a}$ لهذا المتحرّك في اللحظة $t$. ما هي العلاقة الموجودة بين $\overrightarrow{OM}$ و $\vec{a}$ ؟ ما هي المدة اللازمة حتى يمرّ المتحرك من نفس الموضع من المنحنى ؟

ج/ بين اللحظتين $t_1=0$ و $t_2=4\pi$ ، حدّد مواقع المتحرّك و كذا إحداثيتي $\vec{v}$ حتى تكون طويلة التسارع $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

**Exercice 4.6**

Soit, dans un plan $(P)$, un repère orthonormé $xOy$ et un mobile $M$ se déplaçant dans ce plan. A la date $t$ , ses coordonnées sont définies par :

$$x=\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\ ;\ y=2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$$

a/ Quelle est la trajectoire ?

b/ Calculer les coordonnées à la date $t$ du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur accélération $\vec{a}$ de ce mobile. Quelle relation y a- t- il entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{a}$ ? Au bout de combien de temps le mobile repasse-il par une même position sur la courbe ?

c/ Entre les dates $t_1=0$ et $t_2=4\pi$, déterminer les positions du mobile et les coordonnées de $\vec{v}$ pour avoir un vecteur accélération de longueur $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

A.FIZAZI

## Corrigés des exercices 4.1 à 4.7 حلول التمارين من 1.4 إلى 7.4

**Exercice 4.1** :

1/ Pour calculer la vitesse il suffit de dériver l'équation horaire par rapport au temps :

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 18t + 12}$$

En dérivant la vitesse par rapport au temps on obtient l'accélération :

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = 12t - 18}$$

2/ L'étude du mouvement du mobile nécessite une étude mathématique de la fonction $s = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$. Le mouvement est accéléré ou retardé selon le signe du produit $av$. Quant au sens du mouvement il est indiqué par le signe de $v$.

Dressons le tableau de variation :

$v = 6t^2 - 18t + 12 = 0 \Rightarrow t = 1$ ; $t=2$ ; $a = 12t - 18 = 0 \Rightarrow t = 1,5$

| $t$ | $0$ | | $1$ | | $1,5$ | | $2$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | + | 0 | − | | − | 0 | + | |
| $a$ | − | | − | | 0 | + | + | |
| $a.v$ | − | | + | | − | | + | |
| **Mouvmt** | **Retardé sens +** | | **Accéléré sens -** | | **Retardé sens -** | | **Accéléré sens +** | |

**Exercice 4.2 :**

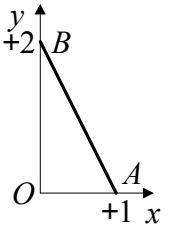
Commençons par la transformation trigonométrique : $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$,

Remplaçons dans l'expression de $y$ qui devient : $y = 2\cos^2 t$,

Une autre transformation trigonométrique nous mène à : $y = 2\left(\sin^2 t - 1\right)$,

Il ne nous reste plus qu'à remplacer $\sin^2 t$ par $x$ pour obtenir l'équation de la trajectoire qui est : $\boxed{y = 2(1 - x)}$.

Pour dessiner la trajectoire il faut remarquer que $0 \le x \le +1$, car quelque soit $t$, $0 \le \sin^2 t = x \le +1$. Nous en déduisons que la trajectoire est un segment de droite joignant les points $A(+1, 0)$ et $B(0, +2)$ .




**Exercice 4.3 :**

Deux dérivations consécutives des équations horaires nous conduisent aux expressions des coordonnées des vecteurs vitesse et accélération du mobile à l'instant $t$ :

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = \dot{x} = 3\left(t^2 - 1\right) \\ v_y = \dot{y} = -6t \\ v_z = \dot{z} = 3\left(t^2 + 1\right) \end{cases} \quad ; \quad \vec{a}=\begin{cases} a_x = \ddot{x} = 6t \\ a_y = \ddot{y} = -6 \\ a_z = \ddot{z} = 6t \end{cases}$$

2/ Le module du vecteur vitesse est égal à $v^2 = 18\left(1+t^2\right)^2 \Rightarrow \boxed{v = 3\sqrt{2}\left(1+t^2\right)}$

Calculons maintenant l'angle compris entre $\vec{v}$ et $Oz$ . Pour cela calculons le module du produit scalaire :

$$\vec{v}.\vec{k} = v.k.\cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = v.cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) \quad , \quad cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = \frac{\vec{v}.\vec{k}}{v}$$

$$\vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}.\vec{k} = \left(\dot{x}.0\right) + \left(\dot{y}.0\right) + \left(\dot{z}.0\right) = 3\left(1+t^2\right)$$

$$cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = \frac{\vec{v}.\vec{k}}{v} = \frac{3\left(1+t^2\right)}{3\sqrt{2}\left(1+t^2\right)} \Rightarrow cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\left(\vec{v},Oz\right) = \frac{\pi}{4} rad}$$

**Exercice 4.4 :**

a/ Eliminons le temps entre les deux équations horaires pour obtenir l'équation de la trajectoire :

$$x = \ln t \Rightarrow t = e^x$$

$$y = e^x + \frac{1}{e^x} \Rightarrow \boxed{y = e^x + e^{-x}}$$

b/ calculons les modules de la vitesse et de l'accélération au temps $t$ par dérivations successives des deux équations horaires par rapport au temps :

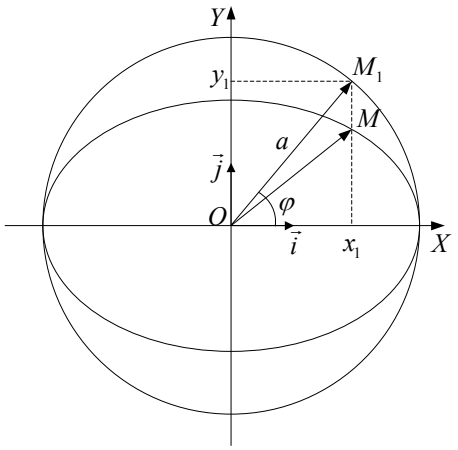
$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{t} \\ v_y &= 1 - \frac{1}{t^2} \end{aligned}\right| \Rightarrow v = \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2} \quad ; \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} + 1}}$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= -\frac{1}{t^2} \\ a_y &= \frac{2t}{t^4} = \frac{2}{t^3} \end{aligned}\right| \Rightarrow a = \sqrt{\left(\frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{t^3}\right)^2} \quad ; \quad \boxed{a = \sqrt{\frac{4}{t^6} + \frac{1}{t^4}}}$$

**Exercice 4.5 :**

**Rappel mathématique concernant l'ellipse :** suivons le raisonnement qui accompagne la figure ci-dessous :

A.FIZAZI Univ-BECHAR




*Equation du cercle* $x^2 + y^2 - a^2 = 0 \rightarrow (1)$

*Equation de l'ellipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \rightarrow (2)$

*Coordonnées du point M:* $\begin{cases} x_1 = a\cos\varphi \\ y_1 = a\sin\varphi \end{cases}$

*remplaçons x et y dans l'équation* $(1)$:

$\forall M,\ a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi - a^2 = 0 \Rightarrow \cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1 = 0 \rightarrow (3)$

*Par identification des équations* $(2)$ *et* $(3)$ *nous obtenons deux résultats importants qui caractérisent l'ellipse:*

$(2) = (3) : \cos\varphi = \frac{x}{a} \Rightarrow \boxed{x = a\cos\varphi}$ , $\sin\varphi = \frac{y}{b} \Rightarrow \boxed{y = b\sin\varphi}$

Maintenant que nous avons les coordonnées du point $M$ , nous pouvons repérer ce point sur l'ellipse par l'angle $\varphi$ tel que $\cos\varphi = \frac{x}{a}$ ; $\sin\varphi = \frac{y}{b}$

La vitesse du point $M$ est égale à :

$\overrightarrow{OM} = a\cos\varphi.\vec{i} + b\sin\varphi.\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = -a\dot{\varphi}\sin\varphi.\vec{i} + b\dot{\varphi}\cos\varphi.\vec{j}}$

L'accélération du point $M$ est : $\boxed{\vec{\gamma} = -a\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right).\vec{i} + b\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right).\vec{j}}$

**Exercice 4.6 :**

1/ Pour obtenir l'équation de la trajectoire il suffit d'éliminer le temps entre les équations horaires :

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{t}{2} &= \frac{x}{\sqrt{2}} \\ \sin\frac{t}{2} &= \frac{y}{2\sqrt{2}} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1}$$

La trajectoire est donc une **ellipse**.

2/ En dérivant les équations horaires par rapport au temps, on obtient les deux composantes du vecteur vitesse :

$$\vec{v}_x = \dot{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{t}{2}$$

$$\vec{v}_y = \dot{y} = \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$$

En dérivant les deux composantes du vecteur vitesse par rapport au temps, on obtient les deux composantes du vecteur accélération :

$$\vec{a}_x = \dot{v}_x = -\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\frac{t}{2}$$

$$\vec{a}_y = \dot{v}_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{t}{2}$$

Ecrivons à présent l'expression vectorielle de l'accélération pour trouver sa relation avec le vecteur position :

$$\vec{a} = -\frac{1}{4}x.\vec{i} - -\frac{1}{4}y.\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{1}{4}\left(x.\vec{i} - y.\vec{j}\right) \quad ; \quad \boxed{\vec{a} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OM}}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

Puisque la trajectoire est une ellipse, le mouvement va se répéter à l'infini pour une variation du temps de $0$ à $\infty$.

Soit $T$ l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs du mobile par la même position et dans le même sens.

L'abscisse du mobile au temps $t$ est : $x = \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$

L'abscisse du mobile au temps $t+T$ est : $x' = \sqrt{2}\cos\frac{(t+T)}{2}$

Puisque le mouvement est périodique il faut que $x = x'$ :

$$cos\alpha = cos(\alpha + 2\pi) \;\; ; \quad \cos\frac{t}{2} = \cos\frac{(t+T)}{2} \Rightarrow \frac{T}{2} = 2\pi \Rightarrow \boxed{T = 4\pi}$$

3/ Position du mobile et ses coordonnées pour une accélération de module $\frac{\sqrt{5}}{4}$ :

$$a = \frac{\sqrt{5}}{4},$$

$$a^2 = \frac{2}{16}\cos^2\frac{t}{2} + \frac{2}{4}\sin^2\frac{t}{2} = \frac{5}{16} \Rightarrow 2\cos^2\frac{t}{2} + 8\sin^2\frac{t}{2} = 5$$

$$2\left(1 - \sin^2\frac{t}{2}\right) + 8\sin^2\frac{t}{2} = 5 \Rightarrow 6\sin^2\frac{t}{2} = 3 \Rightarrow \sin^2\frac{t}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{t}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; , \; t \succ 0 \; ; \; \frac{t}{2} = \begin{cases} +\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ +\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

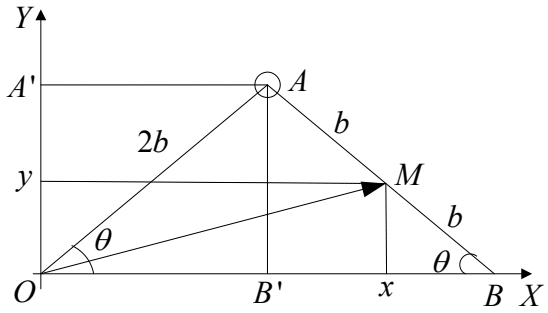
En prenant en considération la condition $0 \le t \le 4\pi$, nous résumons les résultats dans le tableau suivant :

| $k$ | $t$ | $x$ | $y$ | $v_x$ | $v_y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{\pi}{2}$ | +1 | +2 | $-\frac{1}{2}$ | +1 |
| 1 | $\frac{3\pi}{2}$ | −1 | +2 | $-\frac{1}{2}$ | −1 |

**Exercice 4.7 :**

1/ A l'aide de la figure ci-dessous on écrit l'expression du vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$$




A.FIZAZI_Univ-BECHAR

Il reste à déterminer les deux équations horaires, c'est-à-dire les coordonnées en fonction du temps :

$$x = \overline{OA} + b\cos\varphi \ , \ x = 2b\cos\varphi + b\cos\varphi \Rightarrow \ x = 3b\cos\varphi$$

$$y = \overline{AA'} - b\sin\varphi \ , \ y = 2b\sin\varphi - b\sin\varphi \ \Rightarrow y = b\sin\varphi$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{i}.3b\cos\varphi + \vec{j}.b\sin\varphi}$$

On en déduit l'équation de la trajectoire par élimination du temps entre les équations horaires :

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 9b^2\cos^2\varphi \\ y^2 = b^2\sin^2\varphi \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9b} = \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ C'est l'équation d'une ellipse.

2/ La deuxième dérivée du vecteur position par rapport au temps nous conduit à l'expression du vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \omega^2\left(\vec{i}.3b.\cos\omega t + \vec{j}.b.\sin\omega t\right) \ \Leftrightarrow \ \vec{a} = -\omega^2.\overrightarrow{OM}$$

D'où le module de cette accélération :

$$a = 9b^2.\cos^2\omega t + b^2.\sin^2\omega t \Rightarrow \boxed{a = b\sqrt{9\cos^2\omega t + \sin^2\omega t}}$$

A.FIZAZI _ Univ-BECHAR

# B-IV/ MOUVEMENTS RECTILIGNES
# الحركات المستقيمة

## 1/ MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME (الحركة المستقيمة المنتظمة)

- **Définition : Un point matériel est en mouvement rectiligne niforme si sa trajectoire est une droite et son vecteur vitesse constant (donc son vecteur accélération nul).**
- **Equation horaire :** on choisit l'axe $OX$ comme repère rectiligne et on fixe la condition initiale $t = 0$ ; $x = x_0$ (abscisse initiale).

Partant de la définition ci-dessus, et grâce à une intégration on arrive à exprimer l'abscisse $x$ en fonction du temps :

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0 \Rightarrow dx = v_0.dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0.dt$$

$$x\Big|_{x_0}^{x} = v_0 t\Big|_0^t \quad \Rightarrow x\text{-}x_0 = v_0 t$$

Dans une dernière étape on obtient l'équation horaire du mouvement rectiligne qui est une fonction du temps de premier degré:

$$\boxed{x = v_0.t + x_0} \qquad \textbf{(4.13)}$$

On appelle $x$ l'abscisse instantanée, et $x_0$ l'abscisse initiale.

**Fig 4.6 repère rectiligne**

- **Diagrammes du mouvement(مخططات الحركة)**

Les diagrammes du mouvement rectiligne uniforme sont la représentation graphique de l'accélération, de la vitesse et du déplacement en fonction du temps. (Figure 4.7)

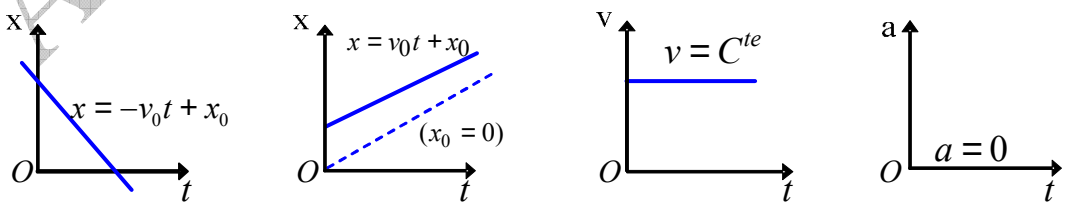



**Fig 4.7 : Diagrammes du mouvement**

**Exemple 4.4 :** Les équations horaires du mouvement d'un point matériel sont $x = 2t$ ; $y = 2t + 4$ ; $z = 0$ (toutes les unités sont dans le système international). Montrer que le mouvement est rectiligne et uniforme.

A.FIZAZI Univ-BECHAR

**Remarque :** Dans un repère cartésien, si l'une des coordonnées est nulle le mouvement est dit plan (mais il peut être rectiligne aussi) ; si deux coordonnées sont nulles le mouvement ne peut être que rectiligne ; si les trois coordonnées sont différents de zéro, dans ce cas le mouvement est dit spatial.

**Réponse :** Démontrons d'abord que le mouvement est rectiligne ; pour cela on doit chercher l'équation de la trajectoire. Après élimination du temps entre les deux équations horaires données on trouve : $y = x + 4 \Rightarrow$ équation d'une droite, donc le mouvement est rectiligne.

Pour que ce mouvement soit uniforme il faut que la vitesse soit constante en direction, en sens et en module.

Le vecteur vitesse est $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow v = \sqrt{2^2 + 2^2} \Rightarrow v = \sqrt{8} = 2.83 ms^{-1}$

Ceci implique que le mouvement est uniforme. En définitif le mouvement est rectiligne et uniforme.

## 2/ MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMEMENT VARIE

## (الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام )

- **Définition :** Le mouvement d'un point matériel est rectiligne uniformément varié si sa trajectoire est une droite et son accélération est constante.
- **La vitesse algébrique** : En considérant les conditions initiales $t = 0$ ; $v = v_0$ (vitesse initiale), et partant des définitions précédentes, et en intégrant on peut écrire :

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt \Rightarrow v\Big|_{v_0}^{v} = at\Big|_0^t$$

On obtient à la fin l'équation de la vitesse instantanée qui est une fonction du temps de premier degré:

$$\boxed{v = v_0 . t + v_0} \qquad \textbf{(14.4)}$$

- **Equation horaire du mouvement :** Si on prend $t = 0$ ; $x = x_0$ (abscisse initiale), et partant de ce qui précède on écrit :

$$v = \frac{dx}{dt} = at + v_0 \Rightarrow dx = (at + v_{0)})dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (at + v_{0)})dt$$

L'équation horaire est donc :

$$\boxed{x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0} \qquad \textbf{(15.4)}$$

- **Diagrammes du mouvement :** On voit sur la figure 4.8 les diagrammes du mouvement rectiligne uniformément varié relatifs à l'accélération, la vitesse et le déplacement.

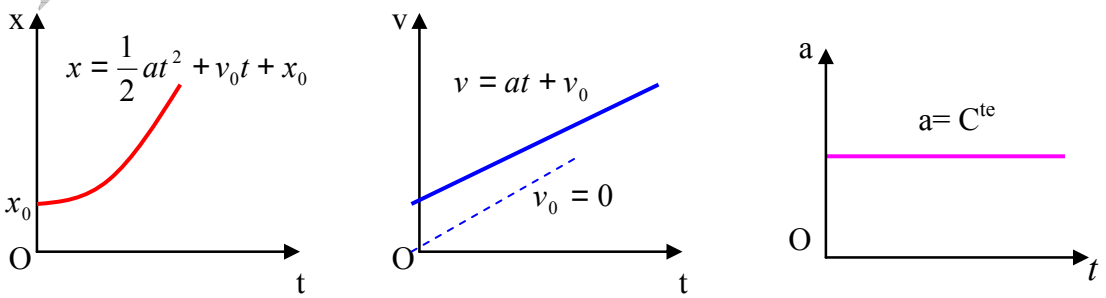



**Fig 4.8 : Diagrammes du mouvement**

A.FIZAZI Univ-BECHAR

**Laissons à l'étudiant le soin de démontrer à titre d'exercice que :** $v^2 - v_0^{\,2} = 2a(x - x_0)$

**Rappel** : Le mouvement rectiligne est accéléré (متسارعة) si $\vec{a}.\vec{v} > \vec{0}$, et il est retardé (متباطئة) si $\vec{a}.\vec{v} < \vec{0}$

**Exemple 4.5** : Un corps ponctuel se déplace suivant l'axe $OX$ avec une vitesse d'équation : $v = 2t - 6 \quad (ms^{-1}) \;;\; t \geq 0$.

a/ En déduire l'équation de l'accélération ainsi que l'équation horaire de ce mouvement sachant qu'à l'instant $t = 0$ , $x = 5\text{m}$. Quelle est la nature du mouvement ?

b/ Indiquer les étapes (accélérée et retardée) du mouvement.

**Réponse :** On obtient l'équation de l'accélération en dérivant l'expression de la vitesse par rapport au temps : $a = \dfrac{dv}{dt} = 2ms^{-2}$. L'accélération est constante.

En intégrant l'expression de la vitesse on obtient l'équation horaire :

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = x_0 + \int_0^t v dt \Rightarrow x = x_0 + \int_0^t (2t - 6) \Rightarrow \boxed{x = t^2 - 6t + 5}$$

$$x = x_0 + t^2 - 6t \;;\; t = 0 \;,\; x = 5 \Rightarrow x_0 = 5$$

Le mouvement est rectiligne uniformément varié

b/ Les phases du mouvement : on dresse le tableau de variation suivant :

| t | 0 | | 1 | | 3 | | 5 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | | | - | | 0 | | + | |
| a | | | + | | | | + | |
| x | | ↘ | 0 | ↘ | -4 | ↗ | 0 | ↗ |
| av | | | - | | 0 | | + | |
| | Mouvement retardé | | | | * | | Mouvement accéléré | |

***Tableau de variation 4.1***

## 2/ MOUVEMENT RECTILIGNE A ACCELERATION VARIABLE

**(الحركة المستقيمة متغيرة التسارع)**

- **Définition :** Le mouvement d'un point matériel est dit rectiligne à accélération variable si sa trajectoire est une droite et que son accélération est fonction du temps ($a = f(t)$).

**Exemple 4.6 :** Un corps ponctuel se déplace suivant une droite avec l'accélération $a = 4 - t^2$ (toutes les unités sont dans le système international $MKS$).

Trouver les expressions de la vitesse et du déplacement en fonction du temps en considérant les conditions suivantes : $t = 3s \;;\; v = 2ms^{-1} \;;\; x = 9m$

**Réponse :** Pour obtenir l'expression littérale de la vitesse on doit intégrer l'équation de l'accélération :

$$v = \int_0^t a dt + v_0 \Rightarrow v = v_0 + \int_0^t (4 - t^2) dt \quad v = 4t - \frac{1}{3}t^3 + v_0$$

Intégrant de nouveau afin d'obtenir l'expression littérale du déplacement :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$x = x_0 + \int_0^t v dt \quad \Rightarrow x = -\frac{1}{12}t^4 + 2t^2 - v_0 t + x_0$$

Il nous reste à déterminer l'abscisse et la vitesse initiales du corps. D'après les données, on remplace dans les expressions obtenues précédemment le temps par $t = 3s$ pour trouver l'abscisse et la vitesse initiales :

$$t = 3s \Rightarrow x_0 = \frac{3}{4}m \quad ; \quad v_0 = -1ms^{-1}$$

En fin de compte, les expressions de la vitesse et du déplacement sont:

$$\boxed{x = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 - t + \frac{3}{4}} \qquad \boxed{v = 4t - \frac{1}{3}t^3 - 1}$$

## 3/ MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOIDAL (الحركة المستقيمة الجيبية)

➢ **Définition :** Le mouvement d'un point matériel est rectiligne sinusoïdal si son équation horaire peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{x = X_m.\cos(\omega.t + \varphi)} \qquad \textbf{(16.4)}$$

Ou même $x = X_m.\sin(\omega.t + \alpha)$

$X_m$ : Amplitude ou élongation maximale **(السعة أو المطال الأعظمي),** son unité est le mètre.

$x$ : Élongation ou abscisse instantanée **(الفاصلة أو المطال اللحظي),** elle varie entre deux valeurs extrêmes : $-1 \le \cos(\omega t + \varphi) \le +1 \Rightarrow -X_m \le x \le +X_m$, son unité est le mètre.

$\omega$ : Pulsation du mouvement **(نبض الحركة),** son unité est le **radian/seconde.**

$\varphi$ : Phase initiale **(الطور الإبتدائي أو الصفحة الإبتدائية),** son unité est le **radian.**

$\omega t + \varphi$ : Phase instantanée **(الطور اللحظي أو الصفحة اللحظية),** son unité est le **radian.**

➢ **La vitesse :** En dérivant l'équation horaire on obtient l'expression de la vitesse instantanée : $v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$

$$\boxed{v = -X_m.\omega\sin(\omega t + \varphi)} \qquad \textbf{(17.4)}$$

Cette vitesse varie entre deux valeurs extrêmes :

$$-1 \le \sin(\omega t + \varphi) \le +1 \Rightarrow -X_m.\omega \le v \le +X_m.\omega$$

➢ **L'accélération :** En dérivant l'équation de la vitesse on obtient l'expression de l'accélération instantanée :

$$a = \ddot{x} = \dot{v} = \frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{a = -X_m\omega^2\cos(\omega.t + \varphi)} \qquad \textbf{(18.4)}$$

Cette vitesse varie entre deux valeurs extrêmes :

$$+X_m\omega^2 \ge a \ge -X_m\omega^2$$

Nous pouvons écrire l'expression de l'accélération sous la forme :

$$\boxed{a = -\omega^2.x} \qquad \textbf{(19.4)}$$

L'accélération est proportionnelle à l'élongation avec un signe opposé.

A.FIZAZI Univ-BECHAR

Contrairement à la vitesse, l'accélération s'annule au passage du mobile par la position d'équilibre (origine des abscisses), et prend une valeur maximale lorsque l'élongation est maximale. Nous avons résumé sur la figure 4.9 les principales caractéristiques du mouvement rectiligne sinusoïdal.

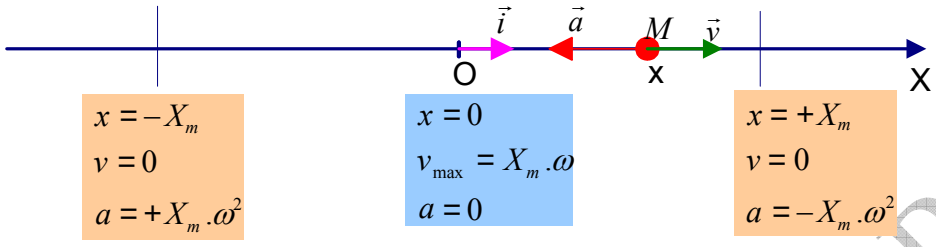



**Fig 4.9**

➢ **Equation différentielle du mouvement (المعادلة التفاضلية للحركة) :**

L'équation de l'accélération peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2.x = 0} \qquad \textbf{(20.4)}$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2.x = 0$$

La solution mathématique de cette équation différentielle est de la forme :

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Après transformation trigonométrique nous pouvons écrire : $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

$X_m$ et $\varphi$ sont les constantes différentielles qui sont déterminées grâce aux conditions initiales sur l'élongation $x_0$ et la vitesse $v_0$ ; d'où l'on obtient un système de deux équations à deux inconnues qui nous permet de déterminer $X_m$ et $\varphi$.

$$t = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x_0 = X_m \cos\varphi \\ v_0 = -X_m \sin\varphi \end{vmatrix}$$

➢ **Les diagrammes du mouvement :** La figure 4.10 représente les diagrammes du déplacement, de la vitesse et de l'accélération du mouvement rectiligne sinusoïdal (pour simplifier nous avons choisi $\varphi = 0$ ).

A.FIZAZI – Univ-BECHAR

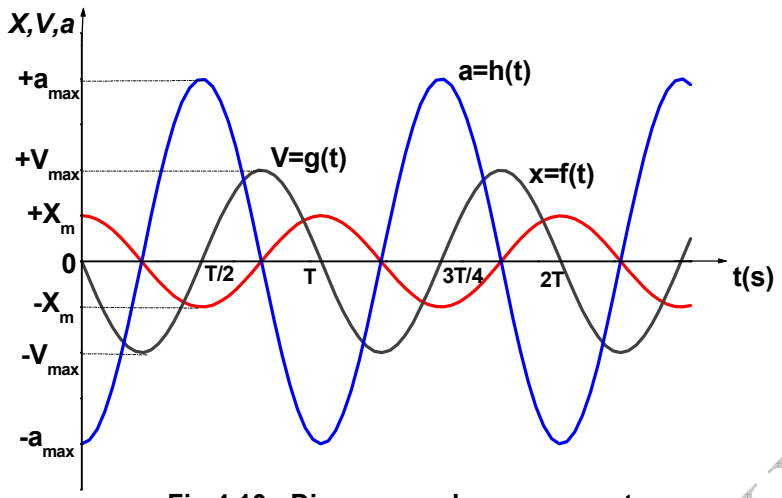



**Fig 4.10 : Diagramme du mouvement**

**Exemple 4.7** : Un vibreur sinusoïdal représenté par l'équation $x = 4\sin(0.1t + 0.5)$ (toutes les unités sont dans le système international *MKS* ).

Trouver :

a/ l'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale du mouvement,

b/ la vitesse et l'accélération,

c/ les conditions initiales,

d/ la position, la vitesse et l'accélération au temps $t = 5s$ ,

e/ Dessiner les diagrammes du mouvement.

**Réponse :** Procédons par identification de l'équation horaire générale du mouvement rectiligne sinusoïdal et l'équation donnée dans l'énoncé de cet exercice.

$$x = 4\sin(0.1t + 0.5) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$$

a/ L'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale du mouvement.

$$\boxed{X_m = 4m} \; ; \; T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 20\pi = 62.8s}$$

$$N = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{N = 1.59.10^{-2} Hz}; \qquad \boxed{\varphi = 0.5rad}$$

b/ Calcul de la vitesse et de l'accélération :

$$\boxed{v = \dot{x} = 0.4\cos(0.1t + 0.5)}$$

$$a = \dot{v} = -0.04\sin(0.1t + 0.5) = -0.04x \qquad \boxed{a = -0.04x}$$

c/ Détermination des conditions initiales :

$$t = 0 \Rightarrow x_0 = 4\sin 0.5 = 1.92m \Rightarrow \boxed{x_0 = 1.92m}$$

$$v_0 = 0.4\cos 0.5 \approx 0.35ms^{-1} \Rightarrow \boxed{v_0 = 0.35m}$$

d/ Désignation de la position, la vitesse et l'accélération au temps $t = 5s$ :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$t = 5s: \quad x = 4sin(0.5 + 0.5) \Rightarrow \boxed{x = 3.36m}$$

$$v = 0.4cos1 \Rightarrow \boxed{v = 0.22ms^{-1}}$$

$$a = -0.04sin1 \Rightarrow \boxed{a = 0.034ms^{-2}}$$

e/ Diagramme du mouvement : **Nous conseillons à l'étudiant de tracer lui-même ces diagrammes et de ne pas se contenter de jeter un simple coup d'œil sur la figure 4.11.**

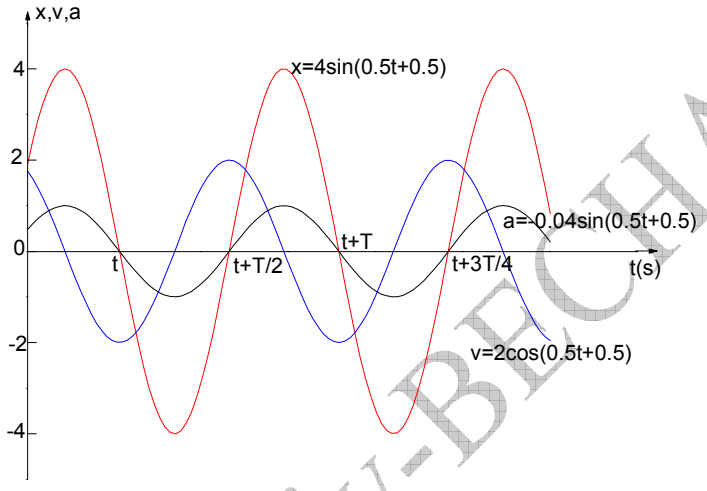



**Fig 4.11 : Diagrammes du mouvement**

A.FIZAZI _ Univ-BECHAR

# EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

**Exercice 4.8**

La position d'un mobile en fonction du temps est indiquée sur la figure ci-dessous. Indiquer :

1/ en quel endroit le mouvement se fait dans la direction des $X$ positifs ou négatifs ?

2/ à quel instant le mouvement est retardé ou accéléré ?

3/ quand le corps passe par l'origine ?

4/ quand la vitesse est nulle ?

5/ faire un graphique de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps,

6/ estimer d'après le graphique, la vitesse moyenne pour les intervalles de temps :

$1s \le t \le 1,8s$ , $1s \le t \le 2,2s$ , $1s \le t \le 3s$

**التمرين 8.4:**

موضع المتحرك بدلالة الزمن مبيّن على الشكل أسفله. بيّن:

1/ في أي موضع تتمّ الحركة في جهة الفواصل $X$ الموجبة أو السالبة؟

2/ في أي لحظة تكون الحركة متسارعة أو متباطئة؟

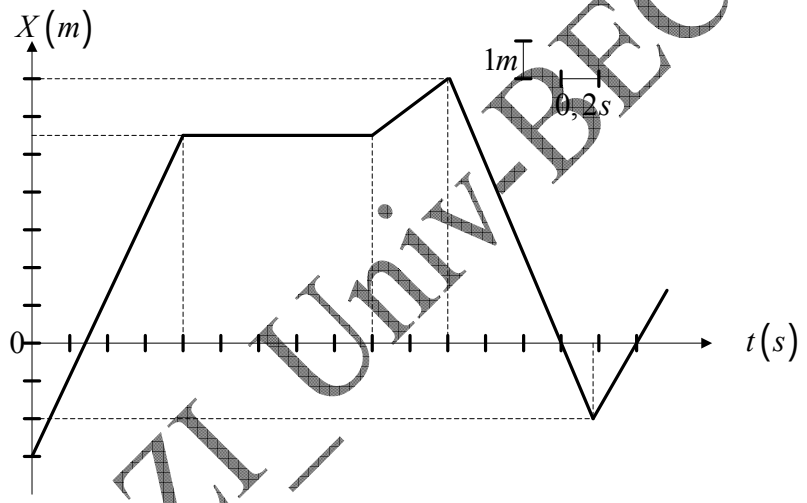
3/متى يمرّ الجسم من مبدإ الفواصل؟

4/ متى تنعدم السرعة؟

5/ قم برسم بياني للسرعة و التسارع بدلالة الزمن،

6/ انطلاقا من الرسم البياني، قيّم السرعة المتوسطة من أجل الفواصل الزمنية:

$1s \le t \le 3s$ , $1s \le t \le 2,2s$ , $1s \le t \le 1,8s$




Z AZI _ Univ-BEC

**Exercice 4.9**

Un point matériel se déplace sur l'axe $x'ox$ de façon qu'entre le carré $v^2$ de sa vitesse et son abscisse $x$, il existe la relation $v^2 = Ax + B$ ,où $A$ et $B$ sont des constantes.

1/ Calculer l'accélération du mobile. Que peut on dire du mouvement ?

2/ Connaissant la nature du mouvement, trouver par une autre méthode les valeurs de $A$ et $B$ en fonction des caractéristiques du mouvement.

**التمرين 9.4**

تنتقل نقطة مادية على المحور $x'ox$ بحيث توجد ، بين مربع سرعتها $v^2$ و فاصلتها $x$، العلاقة $v^2 = Ax + B$ ، $A$ و $B$ ثابتان.

1/ أحسب تسارع المتحرّك. ماذا يمكن أن نقول عن الحركة؟

2/ بمعرفة طبيعة الحركة، أوجد بطريقة أخرى قيمتي $A$ و $B$ بدلالة مميزات الحركة.

**Exercice 4.10**

Une pierre est lancée verticalement vers le haut depuis le toit d'un immeuble avec une vitesse de

**تمرين 10.4:**

تقذف حجارة شاقوليا إلى الأعلى بسرعة $29,4ms^{-1}$ انطلاقا من سطح عمارة. بعد $4s$ من قذف الحجارة

| | |
|---|---|
| $29,4ms^{-1}$.On laisse tomber une seconde pierre $4s$ après avoir jeté la première. Démontrer que la première pierre dépassera la seconde $4s$ exactement après que l'on ait lâché la seconde.<br>$g = 9,8ms^{-2}$. | الأولى نترك حجارة ثانية تسقط. برهن أن الحجارة الأولى تتجاوز الحجارة الثانية $4s$ بالضبط بعد تركنا للثانية.<br>$g = 9,8ms^{-2}$ |

| | |
|---|---|
| **Exercice 4.11**<br>Un homme au sommet d'un immeuble lance une boule verticalement vers le haut avec une vitesse $12m.s^{-1}$. La boule atteint le sol $4,25s$ plus tard.<br>1/ Quelle est la hauteur maximale atteinte par la boule ?<br>2/ Quelle est la hauteur de l'immeuble ?<br>3/ Avec quelle vitesse atteint-elle le sol ?<br>$g = 9,8ms^{-2}$ | **تمرين 11.4:**<br>يقذف رجل من قمّة عمارة شاقوليا إلى الأعلى كرة بسرعة $12m.s^{-1}$ . تصل الكرة إلى الأرض بعد $4,25s$ من قذفها.<br>1/ ما هو الارتفاع الأعظمي الذي تبلغه الكرة؟<br>2/ كم هو علو العمارة؟<br>3/ ما هي السرعة التي تصطدم بها الكرة مع الأرض؟<br>$g = 9,8ms^{-2}$ |

| | |
|---|---|
| **Exercice 4.12**<br>L'unité de longueur est le centimètre, l'unité de temps la seconde.<br>Une automobile se déplace en mouvement rectiligne. Son accélération est donnée par $a = -\frac{\pi^2}{4}x$, tel que , à la date $t = 1s$, on ait l'abscisse $x = 4cm$ et la vitesse $v = 2\pi cm.s^{-1}$.<br>1/ déterminer la nature du mouvement, écrire son équation horaire.<br>2/ calculer toutes les constantes qui caractérisent le mouvement,<br>3/ montrer que $x$ peut s'écrire sous la forme : $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$. | **التمرين 12.4:**<br>وحدة الطول هي السنتيمتر، وحدة الزمن هي الثانية.<br>تنتقل سيارة بحركة مستقيمة. يعطى تسارعها بـــ $a = -\frac{\pi^2}{4}x$ ، بحيث أن في اللحظة $t = 1s$ تكون الفاصلة $x = 4cm$ و السرعة $v = 2\pi cm.s^{-1}$.<br>1/ حدّد طبيعة الحركة، أكتب معادلتها الزمنية.<br>2/ أحسب كل الثوابت التي تميّز الحركة،<br>3/ بيّن أنه يمكن كتابة $x$ على الشكل:<br>$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$. |

| | |
|---|---|
| **Exercice 4.13**<br>Un corps est animé d'un mouvement rectiligne dont l'accélération est donnée par $a = 32 - 4v$ ( avec comme conditions initiales $x = 0$ et $v = 4$ pour $t = 0$ ).<br>Trouver $v$ en fonction de $t$, $x$ en fonction de $t$ et $x$ en fonction de $v$. | **تمرين 13.4:**<br>ينتقل جسم بحركة مستقيمة بتسارع $a = 32 - 4v$ ( بشروط ابتدائية $x = 0$ و $v = 4$ من أجل $t = 0$ ).<br>أوجد $v$ بدلالة $t$ ، $x$ بدلالة $t$ و $x$ بدلالة $v$. |

## Corrigés des exercices 4.8 à 4.13 حلول التمارين من 8.4 إلى 13.4

**Exercice 4.8 :**

1/ Tout le mouvement s'effectue dans le sens positif des abscisses $X$, sauf pour l'intervalle de temps $2,2s \le t \le 2,8s$ pour lequel le mouvement se fait dans le sens négatif. Le mobile est au repos entre les instants $t = 0,8s$ et $t = 1,8s$.

2/ Le mouvement est accéléré instantanément aux instants $t = 1,8s$ et $t = 2.8s$ ; il est retardé instantanément aux instants $t = 1,8s$ et $t = 2.8s$.

3/ Le mobile passe par l'origine aux instants $t = 0,3s$ , $t=2,8s$ , $t=3,2s$.

4/ La vitesse s'annule entre les deux instants $t = 0,8s$ et $t = 1,8s$.

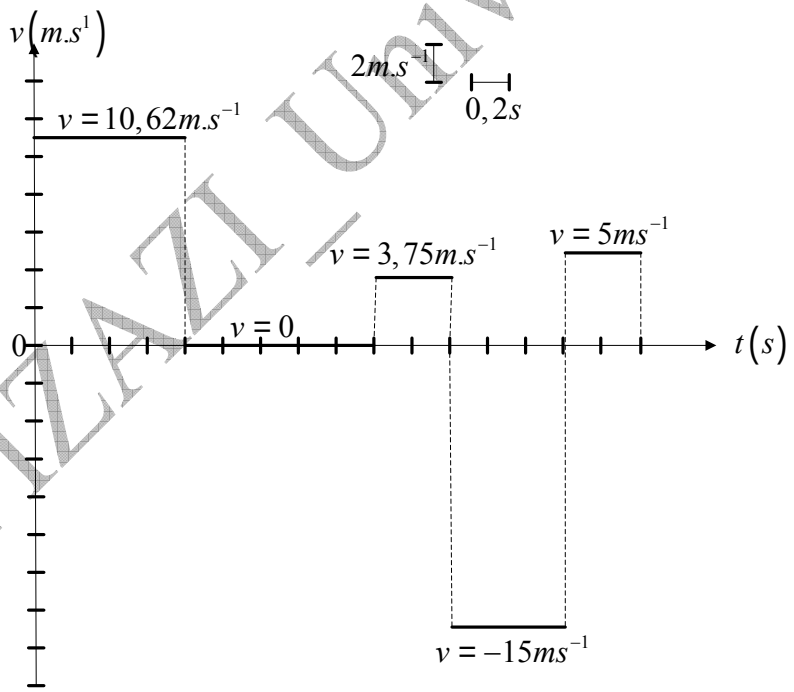
5/ La figure ci-dessous donne la représentation graphique de la vitesse en fonction du temps.

6/ on calcul la vitesse à partir de la formule $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ :

$$1 \le t \le 1,8s \quad , \quad v_{moy} = 0$$

$$1s \le t \le 2,2s \ , \ v_{moy} = \frac{1,5}{1,2} = 1,25ms^{-1}$$

$$1s \le t \le 3s \ , \ v_{moy} = \frac{1,5-9+2}{2} = -2,25ms^{-1}$$




**Exercice 4.9 :**

1/ On dérive les deux membres de l'équation par rapport au temps :

$$2v\frac{dv}{dt} = A\frac{dx}{dt} \quad , \quad 2v.a = A.v \Rightarrow \boxed{a = \frac{A}{2}}$$

A.FIZAZI _ Univ-BECHAR

Puisque l'accélération est constante et la trajectoire une droite, le mouvement est rectiligne uniformément varié.

2/ Détermination de A et B :

$$v = at + v_0 \Rightarrow v^2 = a^2t^2 + v_0^2 + 2a.v_0.t$$

$$v^2 = a(at^2 + 2v_0t) + v_0^2 \Rightarrow v^2 = 2a(\underbrace{\frac{1}{2}at^2 + v_0t}_{x}) + v_0^2 \Rightarrow 2a.x + v_0^2 \rightarrow (1)$$

D'après les données : $v^2 = Ax + B \rightarrow (2)$

Par identification des deux équations $(1)$ et $(2)$ on en déduit : $\boxed{A = \frac{a}{2} \quad ; \quad B = v_0^2}$

**Exercice 4.10 :**

Pour les deux pierres le mouvement est rectiligne uniformément varié. On oriente l'axe $OZ$ vers le haut. On calcule la distance parcourue par la deuxième pierre durant les 4secondes, soit son abscisse sur l'axe $OZ$ :

$$z_1 = -\frac{1}{2}gt_1^2 \quad ; \quad \boxed{z_1 = -78,4m}$$

D'après l'énoncé, on en déduit que la première dépasse la deuxième après 8 secondes depuis son lancement. Calculons son abscisse à cet instant :

$$z_2 = -\frac{1}{2}gt_2^2 + v_0t_2 \quad ; \quad \boxed{z_2 = -78,4m}$$

Les deux pierres au moment de leur rencontre se trouvent à la même hauteur $(z = z_1 = z_2)$, 8 secondes après le lancement de la première et 4 secondes après l'abondant de la deuxième en chute libre.

**Exercice 4.11 :**

1/ On choisit l'axe $OZ$ orienté positivement vers le haut, son origine la terrasse de l'immeuble.

Le mouvement de la balle est uniformément varié. La balle atteint sa hauteur maximale quand sa vitesse s'annule, elle s'arrête alors pour tomber en chute libre. :

$$v^2 - v_0^2 = -2gh \Rightarrow \boxed{h = \frac{v_0^2}{2g}} \quad , \quad \boxed{h \simeq 7,35m}$$

2/ La hauteur de l'immeuble est égale à l'abscisse de la balle au moment de sa collision avec le sol( soit à $t = 4,25s$ ) :

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0.t \quad ; \quad \boxed{|z| = 37,5m}$$

3/ La vitesse de la collision de la balle avec le sol :

$$v = -gt + v_0 \quad ; \quad \boxed{v = -29,65ms^{-1}}$$

Le signe – résulte de l'orientation de l'axe.

**Exercice 4.12 :**

1/ Remarquons que nous avons une équation différentielle de premier ordre :

$$a = -\frac{\pi^2}{4}x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\pi^2}{4}x = 0$$

qui est l'équation caractéristique du mouvement rectiligne sinusoïdal.

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

Sa solution est, comme nous l'avons mentionnée dans le cours, de la forme :

$$x = A\cos\frac{\pi}{2}t + B\sin\frac{\pi}{2}t$$

On en déduit l'expression de la vitesse en dérivant l'équation horaire :

$$v = -A\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}t + B\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t$$

D'après les conditions initiales :

$$t = 1s \ , \ x=4cm \ , \ 4=0+B\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{B = 4cm}$$

$$t = 1s \ , \ v=-2\pi cm.s^{-1} \ , \ -2\pi = -A\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{A = 4cm}$$

L'équation horaire s'écrit alors :

$$x = 4\cos\frac{\pi}{2}t + 4\sin\frac{\pi}{2}t \Rightarrow \boxed{x = 4\left(\cos\frac{\pi}{2}t + \sin\frac{\pi}{2}t\right)}$$

2/ Les caractéristiques du mouvement rectiligne sinusoïdal sont : la pulsation, l'amplitude et la phase initiale. Pour trouver les valeurs de ces constantes il est nécessaire de transformer l'équation horaire sous la forme :

$$x = X_m\cos(\omega t + \varphi) \rightarrow (1)$$

Multiplions les deux membres par $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour obtenir :

$$x\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{2}t\right)$$

Puisque : $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, nous pouvons écrire l'équation horaire sous la forme :

$$x = 4\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}t.\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}t.\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}t.\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}t.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Procédons à une transformation trigonométrique pour aboutir à :

$$x = 4\sqrt{2}\left(c\cos\frac{\pi}{2}t.\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}t.\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = 4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right) \rightarrow (2)$$

En dernier lieu on arrive à l'expression de l'équation horaire qui va nous permettre d'obtenir les constantes du mouvement. Par identification des équations $(1)$ et $(2)$ :

$$x = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right) = X_m.\cos(\omega t + \varphi)$$

On obtient finalement :

La pulsation : $\boxed{\omega = \frac{\pi}{2}rad.s^{-1}}$, l'amplitude : $\boxed{X_m = 4\sqrt{2}cm}$,

la phase initiale : $\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{4}rad}$

3/ L'équation horaire peut s'écrire à présent sous la forme :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\boxed{x = 4\sqrt{2}.10^{-2}.\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)}(m)$$

**Exercice 4.13 :**

L'expression donnée est une équation différentielle de premier ordre.

$$a = 32 - 4v \Leftrightarrow \dot{v} + 4v = 32$$

Sa solution est de la forme : $v = Ae^{-4t} + \frac{4}{32}$

Pour trouver la valeur de la constante $A$ on fait appel aux conditions initiales :

$$t = 0 \ , \ v = 4 \ , \ 4 = Ae^{0} + 8 \Rightarrow \boxed{A = -4}$$

Donc la vitesse en fonction du temps est : $\boxed{v = -4e^{-4t} + 8} \rightarrow (1)$

Pour trouver l'équation horaire du mouvement on doit intégrer l'équation de la vitesse :

$$v = \frac{dx}{dt} = -4e^{-4t} + 8 \Rightarrow dx = \left(-4e^{-4t} + 8\right)dt \Rightarrow x = \int\left(-4e^{-4t} + 8\right)dt$$

$$x = e^{-4t} + 8t + B$$

Calculons la valeur de la constante $B$ à partir des conditions initiales :

$$t = 0 \ , \ x = 0 \Rightarrow 0 = e^{-0} + B \Rightarrow \boxed{B = -1}$$

**Donc $x$ en fonction de $t$ est :** $\boxed{x = e^{-4t} + 8t - 1} \rightarrow (2)$

Pour exprimer $x$ en fonction de $v$, il suffit d'éliminer le temps entre les deux équations $(1)$ et $(2)$ :

De $(1)$ : $v = -4e^{-4t} + 8 \Rightarrow t = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{8-v}{4}\right)$

Remplaçons dans $(2)$ : $x = e^{-4\left[-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{8-v}{4}\right)\right]} + 8.\left(-\frac{1}{4}\ln\frac{8-v}{4}\right) - 1 \Rightarrow x = \left(\frac{8-v}{4}\right) - 2\ln\left(\frac{8-v}{4}\right) - 1$

Finalement : $\boxed{x = -2\ln\left(\frac{8-v}{4}\right) - \frac{1}{4}v + 1}$

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

# C-IV /MOUVEMENT DANS LE PLAN
# الحركات المستوية

Si la trajectoire appartient à un plan, il est possible de repérer la position d'un mobile soit par les coordonnées rectangulaires soit par les coordonnées polaires.

## 1/ ETUDE DU MOUVEMENT EN COORDONNEES POLAIRES

(دراسة الحركة بالإحداثيات القطبية) :

➢ **Position du mobile :** Soit $M$ un point matériel dont la trajectoire est une courbe plane quelconque($C$).

La position du mobile en **coordonnées cartésiennes**, comme nous l'avons déjà signalée est définie par :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}} \qquad \textbf{(21.4)}$$

Mais en **coordonnées polaires** le vecteur position s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r} \qquad \textbf{(22.4)}$$

Où : $\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta$

Donc : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r(\vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta)$

**Remarque :** et $\theta$ dépendent du temps : $r = f(t)$ et $\theta = g(t)$

➢ **La vitesse :**

✓ **En coordonnées cartésiennes :**

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}} \qquad \textbf{(23.4)}$$

✓ **En coordonnées polaires** : D'après le figure 4.12 , nous pouvons écrire les expressions des deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{u}_\theta$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ :

$$\boxed{\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta \quad ; \quad \vec{u}_\theta = -\vec{i}.\sin\theta + \vec{j}.\cos\theta} \qquad \textbf{(24.4)}$$

Leurs dérivées consécutives sont :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\vec{i}.\sin\theta.\frac{d\theta}{dt} + \vec{j}\cos\theta.\frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_\theta.\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{u}_\theta.\frac{d\theta}{dt}}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{i}.\cos\theta.\frac{d\theta}{dt} - \vec{j}.\sin\theta.\frac{d\theta}{dt} = -\vec{u}_r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{u}_r\frac{d\theta}{dt}} \qquad \textbf{(4.25)}$$

A l'aide des relations (4.25), exprimons la vitesse en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\frac{dr}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \Leftrightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta} \qquad \textbf{(4.26)}$$

En conséquence, la vitesse a deux composantes, transversale $\vec{v}_\theta$ et radiale $\vec{v}$ . Ci-dessous figurent les deux expressions des deux composantes ainsi que le module de la vitesse en coordonnées polaires :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=\dot{r}.\vec{u}_r+r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta\\ \vec{v}=\vec{v}_r+\vec{v}_\theta\end{array}\right|\Rightarrow\begin{array}{l}\vec{v}_r=\dot{r}.\vec{u}_r\\ \vec{v}_\theta=r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta\end{array}\Rightarrow v=\sqrt{\dot{r}^2+(r.\dot{\theta})^2}$$

➢ **L'accélération :**

**En coordonnées rectangulaires** : $\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}$

**En coordonnées polaires** : Nous dérivons la relation de la vitesse 4.26 par rapport au temps et en utilisant l'expression 4.25, nous obtenons la formule de l'accélération :

$$\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\dot{r}.\frac{d\vec{u}_r}{dt}+\ddot{r}.\vec{u}_r+r.\dot{\theta}.\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}+r.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta+\dot{r}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}=\dot{r}.(\vec{u}_\theta.\frac{d\theta}{dt})+\ddot{r}.\vec{u}_r+r.\dot{\theta}.(-\vec{u}_r\frac{d\theta}{dt})+r.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta+\dot{r}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$$

En ordonnant cette expression, et en utilisant la notation de Newton, on arrive à la formule définitive de l'accélération en coordonnées polaires :

$$\vec{a}=\dot{r}.\vec{u}_\theta.\dot{\theta}+\ddot{r}.\vec{u}_r+r.\dot{\theta}.(-\vec{u}_r\dot{\theta})+r.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta+\dot{r}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{a}=(\underbrace{\ddot{r}-r.\dot{\theta}^2}_{a_r}).\vec{u}_r+(\underbrace{2\dot{r}.\dot{\theta}+r.\ddot{\theta}}_{a_\theta}).\vec{u}_\theta}\qquad\textbf{(4.27)}$$

Remarquons que l'accélération a deux composantes, radiale $\vec{a}$ et transversale $\vec{a}_\theta$ :

$$\boxed{\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_\theta}\qquad\textbf{(4.28)}$$

Quant à son module il est égal à :

$$\boxed{a=\sqrt{(\ddot{r}-r.\dot{\theta}^2)^2+(2\dot{r}.\dot{\theta}+r.\ddot{\theta})^2}}\qquad\textbf{(4.29)}$$

➢ **Cas particulier, Le mouvement circulaire(حالة خاصة: الحركة الدائرية) :**

Puisque $r=R=C^{te}$, le vecteur vitesse est donc :

$$\boxed{\vec{v}=R\dot{\theta}\vec{u}_\theta}\qquad\textbf{(4.30)}$$

Et l'expression du vecteur accélération est :

$$\boxed{\vec{a}=-R.\dot{\theta}^2..\vec{u}_r+R.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta}\qquad\textbf{(4.31)}$$

Remarquons que cette accélération a deux composantes :

✓ **Accélération normale (التسارع الناظمي)** notée par $\vec{a}_N$, portée par la normale, dirigée vers le centre , et de sens contraire à $\vec{a}$ , elle indique la **variation de la direction** de la vitesse.

$$\boxed{\vec{a}_N=-\vec{a}_r=R\dot{\theta}^2\vec{u}_r\Rightarrow a_r=a_N=R\dot{\theta}^2}\qquad\textbf{(4.32)}$$

✓ **Accélération tangentielle (التسارع المماسي)** notée par $\vec{a}_T$, portée par la tangente à la trajectoire au point $M$ , elle indique la **variation du module** de la vitesse.

$$\boxed{\vec{a}_\theta=\vec{a}_T=R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta\Rightarrow a_\theta=a_T=R\ddot{\theta}}\qquad\textbf{(4.33)}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

➢ **Autre cas particulier, le mouvement circulaire uniforme (الحركة الدائرية المنتظمة):**

Pour ce mouvement la vitesse est constante en module. Et puisque $r = R = C^{te}$, la vitesse est donc :

$$\boxed{v = R\dot{\theta} = R\omega} \qquad \textbf{(4.34)}$$

Nous reconnaissons la vitesse angulaire $\omega$ qui représente l'angle balayé par unité de temps et dont l'unité est le radian par seconde $\left(rad.s^{-1}\right)$.

Quant à l'accélération elle vaut :

$$\boxed{a = a_r = a_N = R\dot{\theta}^2 = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow \vec{a}_N = -R\omega^2.\vec{u}_r} \qquad \textbf{(4.35)}$$

## 2/ LES COMPOSANTES NORMALE ET TANGENTIELLE DE LA VITESSE ET DE L'ACCELERATION DANS LE REPERE DE FRENET :

On considère maintenant un mouvement dont la trajectoire est une courbe plane quelconque (C) . Nous dessinons un repère composé de l'axe MT, tangent à la trajectoire au point M et porte le vecteur vitesse, et de l'axe MN perpendiculaire à l'axe MT.

Soient $\vec{u}_T$ et $\vec{u}_N$ les deux vecteurs unitaires suivant MT et MN respectivement. On remarque sur la figure 4.13 que la vitesse s'écrit alors:

$$\boxed{\vec{v} = v.\vec{u}_T} \qquad \textbf{(4.36)}$$

L'accélération s'écrit : $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

Donc : $$\boxed{\vec{a} = a_T.\vec{u}_T + a_N.\vec{u}_N} \qquad \textbf{(4.37)}$$

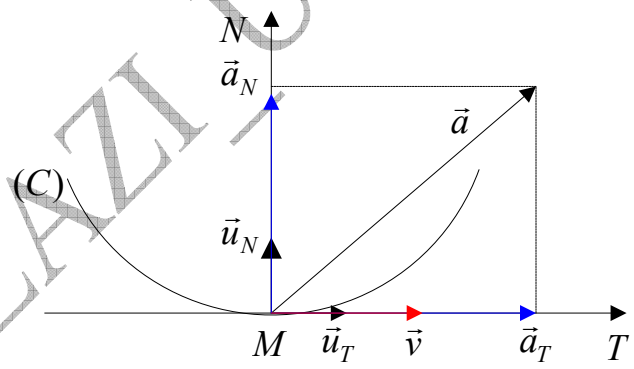



**Fig 4.13: vitesse et accélération dans le repère Frenet**

De ce qui précède, apparaît :

$$\left.\begin{aligned} a_T &= \frac{dv}{dt} \\ a_N &= \frac{v^2}{R} \end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{a} = \dot{v}.\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}.\vec{u}_N \Rightarrow a = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

On appelle les expressions (4.36) et (4.37), respectivement les composantes de la vitesse et de l'accélération dans le repère de Frenet, ou les composantes propres, ou encore les composantes locales.

A.FIZAZI Univ-BECHAR

Si $ds$ est le déplacement élémentaire il est tout à fait logique que le vecteur position est :

$$\boxed{\vec{r} = \int \vec{u}_T .ds} \qquad \textbf{(4.38)}$$

Pour clore ce chapitre, abordons l'exemple suivant :

**Exemple 4.8 :** La trajectoire plane d'un point matériel en coordonnées polaires est donnée par l'équation : $\rho.\cos^2\frac{\varphi}{2} = a$, où $a$ est une constante.

On suppose que le module $v$ de la vitesse de ce point matériel est proportionnel à $\rho$ : $v = k\rho$, où $k$ est une constante positive.

Calculer les composantes normale $v_\rho$ et transversale $v_\varphi$ du vecteur vitesse.

**Réponse :**

On sait que : $\vec{v} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\varphi$

Remarquer que nous avons remplacé les lettres par $\rho$ et $\theta$ par $\varphi$ ( le but : n'apprenez pas les lettres !!!).

Partant des données nous faisons les calculs suivants :

$$\rho\cos^2(\varphi/2) = a \Rightarrow \rho = \frac{a}{\cos^2(\varphi/2)}$$

En dérivant l'expression de $\rho$ par rapport au temps, nous obtenons la vitesse normale $v_\rho$ :

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow v_\rho = \frac{a.\cos(\varphi/2).\sin(\varphi/2)}{\cos^4(\varphi/2)}.\dot{\varphi}$$

Quant à la vitesse transversale elle est :

$$v_\varphi = \rho.\dot{\varphi}$$

Mais $\dot{\varphi}$ reste inconnue. Pour cela il faut la calculer ce $\dot{\varphi}$ à partir de $v^2 = {v_\rho}^2 + {v_\varphi}^2$

D'après les données : $v^2 = k^2.\rho^2 = k^2.\frac{a^2}{\cos^4(\varphi/2)}$

Donc :

$$k^2.\frac{a^2}{\cos^4(\varphi/2)} = \frac{a^2.\sin^2(\varphi/2)}{\cos^6(\varphi/2)}.\dot{\varphi}^2 + \frac{a^2}{\cos^4(\varphi/2)}.\dot{\varphi}^2 \Rightarrow k^2 = \left[\frac{\sin^2(\varphi/2)}{\cos^2(\varphi/2)} + 1\right].\dot{\varphi}^2$$

D'où : $\dot{\varphi}^2 = k^2.\cos^2(\varphi/2) \Rightarrow \dot{\varphi} = k.\cos(\varphi/2)$

En remplaçant $\dot{\varphi}$ par sa valeur littérale dans les deux composantes de la vitesse, on trouve ce qui est demandé :

$$v_\rho = \frac{a.k.\sin(\varphi/2)}{\cos^2(\varphi/2)} \Rightarrow \boxed{v_\rho = v.\sin(\varphi/2)}$$

$$\boxed{v_\theta = \frac{a.k}{\cos(\varphi/2)}}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

# EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

**Exercice 4.14**

Une particule se déplace dans un plan $XY$ selon la loi : $v_x = 4t^3 + 4t$ et $v_y = 4t$.

Si le mobile se trouvait au point $(1,2)$ à l'instant $t = 0$ , trouver l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.

**التمرين 14.4:**

تنتقل جسيمة في المستوى $XY$ وفق القانون $v_x = 4t^3 + 4t$ و $v_y = 4t$. إذا وجد المتحرّك في النقطة $(1,2)$ في اللحظة $t = 0$، أوجد معادلة المسار بالإحداثيات الكارتيزية.

**Exercice 4.15**

Une particule se déplace dans un plan $XY$ selon la loi : $a_x = -4\sin t$ et $a_y = 3\cos t$.

Sachant que pour $t = 0$ on ait $x = 0$ ، $y = -3$ ، $v_x = 4$ و $v_y = 0$ ، trouver :

1/ l'équation de la trajectoire, quelle est son allure ?

2/ la valeur de la vitesse à l'instant $t = \frac{\pi}{4}s$.

**التمرين 15.4:**

تنتقل جسيمة في المستوى $XY$ وفق القانون $a_x = -4\sin t$ و $a_y = 3\cos t$. علما أنه من أجل $t = 0$ لدينا $x = 0$ ، $y = -3$ ، $v_x = 4$ و $v_y = 0$ ، أوجد:

1/ معادلة المسار، ما شكله؟

2/ قيمة السرعة في اللحظة $t = \frac{\pi}{4}s$.

**Exercice 4.16**

Soit le mouvement défini par sa trajectoire $y = 3(x+2)$ et son équation horaire $s(t) = 2t^2$. Sachant que $x = -2$ et $y = 0$ quand $s(0) = 0$ et que $s$ croit avec la croissance de $y$ :

1/ trouver les équations paramétriques $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement,

2/ déterminer l'accélération normale et l'accélération tangentielle du mouvement.

**التمرين 16.4:**

لتكن الحركة المعرّفة بمسارها $y = 3(x+2)$ و بمعادلتها الزمنية $s(t) = 2t^2$. علما أن $x = -2$ و $y = 0$ لمّا $s(0) = 0$، كما أن $s$ يتزايد مع تزايد $y$ :

1/ أوجد المعادلتين الوسيطيتين $x(t)$ و $y(t)$ للحركة،

2/ حدد التسارع الناظمي و التسارع المماسي للحركة.

**Exercice 4.17**

On donne les équations paramétriques de la trajectoire plane d'un point mobile par rapport à un référentiel : $x = 2t$ et $y = 4t^2 - 4t$

1/ Déterminer l'équation de la trajectoire, Quelle est son allure ?

2/Calculer la vitesse du mobile,

3/Montrer que son accélération est constante,

4/Déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération dans un repère de Frenet.

5/En déduire le rayon de courbure.

**التمرين 17.4:**

تعطى المعادلتان الوسيطيتان للمسار المستوي لمتحرّك بالنسبة لمرجع: $x = 2t$ و $y = 4t^2 - 4t$.

1/ حدّد معادلة المسار، ما شكله؟

2/أحسب سرعة المتحرّك،

3/ برهن أن تسارعه ثابت،

4/ حدّد المركبتين الناظمية و المماسية للتسارع في معلم فرينت،

5/ إستنتج نصف قطر الانحناء.

**Exercice 4.18**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $xOy$ d'origine O et de base $(\vec{i}, \vec{j})$. Les coordonnées $x$ et $y$ d'un point $M$ mobile dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ varient avec le temps suivant la loi:

**التمرين 18.4:**

ينسب المستوى إلى معلم متعامد و متجانس $xOy$ مبدأه $O$ و قاعدته $(\vec{i}, \vec{j})$ . تتغير الإحداثيتان $x$ و $y$

لنقطة $M$ متحركة في المستوى $(O,\vec{i},\vec{j})$ مع الزمن حسب القانون : $x = 2\cos\frac{t}{2}$ و $y = 2\sin\frac{t}{2}$.

1/ حدد طبيعة المسار.

2/ حدد مركبتي شعاع السرعة $\vec{v}$،

3/ حدد عبارة السرعة $\frac{ds}{dt}$ و كذا عبارة الإحداثية $s$ المنحنية لنقطة $M$ في اللحظة $t$، بأخذ الشرط الإبتدائي $s = 0$ لما $t = 0$ ،

4/ حدد المركبتين المماسية و الناظمية للتسارع في معلم فرينت،

5/ إستنتج نصف قطر الانحناء.

6/ المسار باق على حاله في حين تتأثر النقطة $M$ بتسارع زاوي $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = 0,2t$ . في أي لحظة تبلغ النقطة $M$ سرعة $10ms^{-1}$ ، علما أنها انطلقت من السكون. ما هي المسافة التي قطعتها؟

$x = 2\cos\frac{t}{2}$ et $y = 2\sin\frac{t}{2}$.

1/ Déterminer la nature de la trajectoire,

2/ Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ ,

3/ Déterminer l'expression de la vitesse $\frac{ds}{dt}$, ainsi que celle de l'abscisse curviligne $s$ du point $M$ à l'instant $t$, en prenant comme condition initiale $s = 0$ quand $t = 0$,

4/ déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération dans un repère de Frenet,

5/ en déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

6/ La trajectoire reste la même, mais maintenant le point $M$ subit une accélération angulaire $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = 0,2t$. A quelle date le point $M$ atteindra-t-il une vitesse de $10ms^{-1}$, sachant qu'il est parti du repos. Quelle distance a-t-il alors parcourue ?

**التمرين 19.4:**

تنتقل جسيمة خاضعة لحقول كهربائية و مغناطيسية معقدة في مرجع غليلي. المعادلتان الزمنيتان بالإحداثيات القطبية هما $r = r_0 e^{-\frac{t}{b}}$ و $\theta = \frac{t}{b}$ ، $_0$ و $b$ ثابتان موجبان.

1/ أحسب شعاع السرعة للحركة،

2/ بيّن أن الزاوية $(\vec{v},\vec{u}_\theta)$ ثابتة. كم تساوي هذه الزاوية؟

3/ أحسب شعاع التسارع للحركة،

4/ بيّن أن الزاوية $(\vec{a},\vec{u}_N)$ ثابتة. كم تساوي هذه الزاوية؟(نستعين بالسؤال2)،

5/ أحسب نصف قطر انحناء المسار.

**Exercice 4.19**

Une particule soumise à des champs électriques et magnétiques complexes est en mouvement dans un référentiel galiléen. Les équations horaires sont, en coordonnées polaires : $r = r_0 e^{-\frac{t}{b}}$ et $\theta = \frac{t}{b}$, $_0$ et $b$ sont des constantes positives.

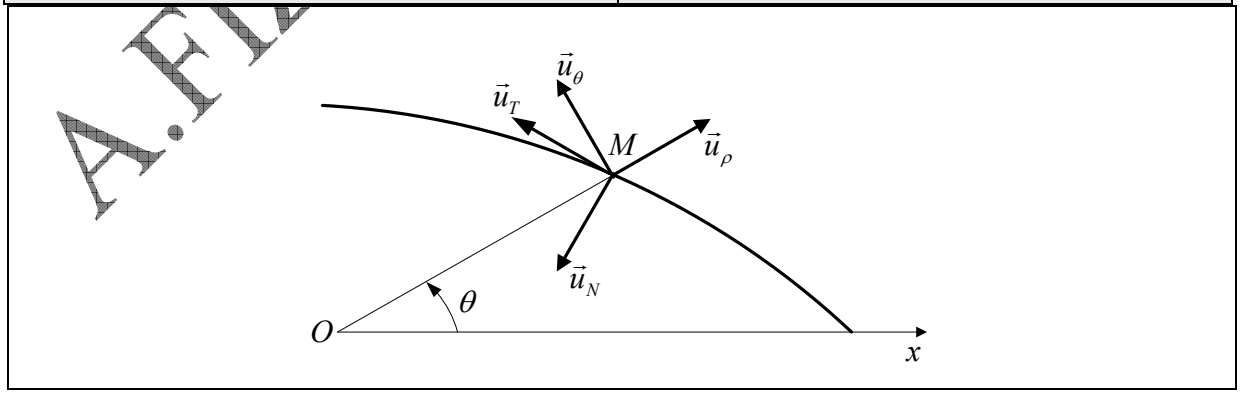
1/ Calculer le vecteur vitesse de la particule,

2/ Montrer que l'angle $(\vec{v},\vec{u}_\theta)$ est constant. Que vaut cet angle ?

3/ Calculer le vecteur accélération de la particule,

4/ Montrer que l'angle $(\vec{a},\vec{u}_N)$ est constant. Que vaut cet angle ? (On se servira de la question2),

5/ Calculer le rayon de courbure de la trajectoire.




**التمرين 20.4:**

مدور $OA$ يدور بسرعة زاوية ثابتة $\omega$ حول محور

**Exercice 4.20**

Un bras $OA$ tournant avec une vitesse $\omega$ autour

$O$، و مشترك بواسطة مفصل عند $A$ مع قضيب $AB$. القضيب $AB$ متمفصل عند $B$ بواسطة زلاقة قابلة للانزلاق على طول المحور $Ox$. يمكن للقضيبين $OA$ و $AB$ أن يتقاطعا في حين تمرّ الزلاقة خلف المفصل $O$. إذا كان $AB = L$ و $OA = R$:

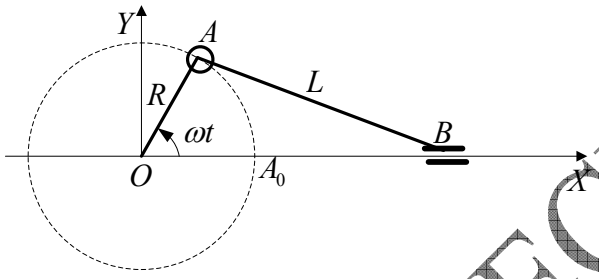
1/ أوجد المعادلة الزمنية لحركة $B$ علما أن $A$ يمرّ في $A_0$ عند الزمن $t = 0$،

2/ في أي لحظات تنعدم السرعة؟

d'un axe $O$, est articulé en $A$ avec une tige $AB$. La tige $AB$ est solidaire d'un curseur $B$ pouvant coulisser le long de l'axe $Ox$. le bras et la tige peuvent se croiser lorsque la tige passe par derrière l'articulation en $O$. Sachant que $AB = L$ et $OA = R$:

1/ trouver l'équation horaire du mouvement de $B$, sachant que B passe en $A_0$ au temps $t = 0$,

2/ à quel instants la vitesse s'annule-t-elle ?




BECHAR

**التمرين 21.4:**

في مستو $(XOY)$ لمعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، تنتقل نقطة $P$ على دائرة نصف قطرها $R$ و مركزها $I(R,0,0)$.

في اللحظة $t = 0$، توجد $P$ في $A(2R,0,0)$ و تكسب السرعة الموجبة $\vec{v}_0(0,v_0,0)$.

نرمز إلى الإحداثيات القطبية لـ $P$ بـ $\theta$ و.

1/ كوّن المعادلة القطبية للدائرة، إستنتج معادلتها الديكارتية.

2/ مثّل على الشكل القاعدة القطبية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ لـ $P$. أحسب بدلالة $\theta$ و مشتقاتها المتتالية بالنسبة للزمن إحداثيات شعاعي السرعة $\vec{v}$ و التسارع $\vec{a}$ لـ $P$ في المعلم $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{k})$.

3/ لتكن الفاصلة المنحنية $s$ لـ $P$ (المبدأ في $A$ ):

- إعط عبارة $s$ بدلالة $\theta$،
- مثّل على الشكل القاعدة الذاتية $(\vec{u}_T,\vec{u}_N)$ لـ $P$.
- أحسب بدلالة $\theta$ و مشتقاتها المتتالية بالنسبة للزمن إحداثيات $\vec{v}_0$ و $\vec{a}$ في هذا المعلم.
- أحسب المركبتين القطبيتين $\vec{u}_T$ و $\vec{u}_N$.
- أوجد من جديد في هذه الشروط المركبتين القطبيتين لـ $\vec{v}_0$ و $\vec{a}$.

4/ نرمز بـ $\omega$ للسرعة الزاوية لـ $P$، والتي نعتبرها في كل ما يتبع ثابتة.

- إعط بدلالة $t$ ، عبارتي $\theta$ ثم .
- إستنتج عباراتي $\vec{v}$ و $\vec{a}$ في القاعدتين القطبية و

**Exercice 4.21**

Dans le plan $(XOY)$ d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, un point $P$ se déplace sur un cercle de rayon $R$ et de centre $I(R,0,0)$.

A l'instant $t = 0$, $P$ se trouve en $A(2R,0,0)$ et possède la vitesse positive $\vec{v}_0(0,v_0,0)$.

On désigne par et $\theta$ les coordonnées polaires de $P$.

1/ Former l'équation polaire du cercle, en déduire son équation cartésienne.

2/ Représenter sur la figure la base polaire $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ de $P$. Calculer en fonction de $\theta$ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes polaires des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et $\vec{a}$ de $P$ dans le repère $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{k})$.

3/ Soit $s$ l'abscisse curviligne de $P$ (l'origine est en A).

- Donner l'expression de $s$ en fonction de $\theta$.
- Représenter sur la figure la base intrinsèque $(\vec{u}_T,\vec{u}_N)$ de $P$.
- Calculer en fonction de $\theta$ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes de $\vec{v}_0$ et $\vec{a}$ dans cette base.
- Calculer les composantes polaires de $\vec{u}_T$ et de $\vec{u}_N$. Retrouver dans ces conditions les composantes polaires de $\vec{v}_0$ et $\vec{a}$.

4/ On désigne par $\omega$ la vitesse angulaire de $P$, dont on suppose dans tout ce qui suit qu'elle est constante.

| | |
|---|---|
| • Donner en fonction de $t$ , les expressions de $\theta$ puis de .<br>• En déduire les expressions de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en fonction de $t$ de $\vec{v}_0$ et $\vec{a}$ dans les bases polaire et de Frenet. | قاعدة فرينت. |

A.FIZAZI _ Univ-BECHAR

## Corrigés des exercices 4.14 à 21.4 حلول التمارين من 14.4 إلى 21.4

**Exercice 4.14 :**

En intégrant nous obtenons les deux équations horaires :

$$v_x = 4t^3 + 4t \ , \ x = \int \left(4t^3 + 4t\right)dt \Rightarrow x = t^4 + 2t^2 + C_x$$

$$v_y = 4t \ , \ y = \int 4t.dt \Rightarrow y = 2t^2 + C_y$$

Les conditions initiales nous permettent de déterminer les deux constantes d'intégration $C_x$ et $C_y$ :

$$t = 0 \ , \ x = 1 \ , \ y = 2 \Rightarrow C_x = 1 \ , \ C_y = 2$$

On obtient : $x = t^4 + 2t^2 + 1 \ , \ y = 2t^2 + 2$

D'où l'équation de la trajectoire :

$$x = \left(t^2 + 1\right)^2 \ , \ y = 2\left(t^2 + 1\right) \Rightarrow \boxed{y = 2\sqrt{x}}$$

**Exercice 4.15 :**

1/ En intégrant deux fois de suite, nous obtenons les deux équations horaires du mouvement :

$$a_x = -4\sin t \Rightarrow v_x = 4\cos t + v_{0x} \ , \ x = 4\sin t + v_{0x}.t + C_x$$
$$a_y = 3\cos t \Rightarrow v_y = 3\sin t + v_{0y} \ , \ y = 3\sin t + v_{0y}.t + C_y$$

Les conditions initiales nous permettent d'obtenir les constantes d'intégration : $v_{0x}$ ، $v_{0y}$ ، $C_x$ et $C_y$ :

$$t = 0 \ , \ x = 0 \ , \ y = -3 \ , \ v_x = 4 \ , \ v_y = 0 \ \Rightarrow v_{0x} = 0 \ , \ v_{0y} = 0 \ , \ C_x = 0 \ , \ C_y = 0$$

Nous obtenons :

$$v_x = 4\cos t \ , \ v_y = 3\sin t$$
$$x = 4\sin t \ , \ y = -3\cos t$$

L'équation de la trajectoire est donc :

$$x = 4\sin t, \ \ y = -3\cos t \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{16} = 1}$$

La trajectoire est une ellipse.

2/ La vitesse au temps $t = \frac{\pi}{4} s$ est :

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}\Rightarrow v=\sqrt{16\sin^2\frac{\pi}{4}+9\cos^2\frac{\pi}{4}}\Rightarrow \boxed{v=3,53ms^{-1}}$$

**Exercice 4.16 :**

L'équation horaire en coordonnées curviligne est $s(t)=2t^2$. Nous avons vu dans le cours que la vitesse est $v=\frac{ds}{dt}$. Calculons cette vitesse : $v=\frac{ds}{dt}=4t$. Ceci nous informe que les équations horaires $x$ et $y$ sont du second degré par rapport au temps. Partant de cela nous pouvons écrire :

$$\left.\begin{aligned}x=\alpha t^2+\beta t+x_0\Rightarrow v_x=2\alpha t+\beta\\ y=\gamma t^2+\delta t+y_0\Rightarrow v_y=2\gamma t+\delta\end{aligned}\right|\Rightarrow v^2=\left(4\alpha^2t^2+\beta^2+4\alpha\beta.t\right)+\left(4\gamma^2t^2+\delta^2+4\gamma\delta.t\right)$$

Organisons cette dernière équation sous la forme :

$$v^2=\left(4\alpha^2+4\gamma^2\right)t^2+\left(4\alpha\beta+4\gamma\delta\right)t+\beta^2+\delta^2$$

Nous avons trouvé précédemment $v^2=4t^2$

Par identification des deux équations précédentes, nous obtenons un système de trois équations à trois inconnues :

$$\left(4\alpha^2+4\gamma^2\right)t^2=4t^2\rightarrow(1)$$
$$\left(4\alpha\beta+4\gamma\delta\right)t=0\rightarrow(2)$$
$$\beta^2+\delta^2=0\rightarrow(3)$$

De $(3)$ on en déduit $\beta=\delta=0$, des conditions initiales on tire $x_0=-2$ et $y_0=0$.

Les deux équations horaires sont donc :

$$x=\alpha t^2-2\ ,\ \ y=\gamma t^2\rightarrow(4)$$

Reste à déterminer $\alpha$ et $\gamma$.

Nous remplaçons dans l'équation de la trajectoire pour obtenir :

$$y=(x+2)=3\left(\alpha t^2-2+2\right)\Rightarrow y=3\alpha t^2\rightarrow(5)$$

On égalise les deux équations $(4)$ et $(5)$ pour déduire la valeur de $\gamma$ :

$$y=3\alpha t^2=\gamma t^2\Rightarrow\gamma=3\alpha$$

De l'équation $(1)$ on obtient : $4\alpha^2+4\gamma^2=4$. Donc :

$$\left.\begin{aligned}\gamma=3\alpha\\ 4\alpha^2+4\gamma^2=4\end{aligned}\right|\Rightarrow\alpha=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}\ ,\ \ \gamma=\pm3\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Puisque l'abscisse curviligne $s$ croît avec $y$, nous n'acceptons que les racines positives, et par substitution dans l'équation $(4)$ on obtient:

$$\boxed{x=\sqrt{\frac{2}{5}}t^2-2\ ,\ y=3\sqrt{\frac{2}{5}}t^2}$$

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

**Exercice 4.17 :**

1/ Equation de la trajectoire : On élimine le temps entre les équations horaires pour obtenir $y = f(x)$ : $t = \frac{1}{2}x \Rightarrow \boxed{y = x^2 - 2x}$. La trajectoire est une parabole.

2/ La vitesse du mobile : On dérive le vecteur position par rapport au temps :

$$\left.\begin{array}{l} v_x = 2 \\ v_y = 8t - 4 \end{array}\right| \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{(8t-4)^2 + 4}} \left(ms^{-1}\right)$$

3/ Accélération du mobile : En dérivant le vecteur vitesse par rapport au temps on arrive à :

$$\left.\begin{array}{l} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = 8 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a = 8ms^{-2} = C^{te}}$$

4/ L'accélération tangentielle est la dérivée du module de la vitesse par rapport au temps, donc :

$$a_T = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{a_T = \frac{8(8t-4)}{\sqrt{(8t-4)^2 + 4}}} \left(ms^{-2}\right)$$

L'accélération normale vaut :

$$a_N^2 = a^2 - a_T^2 \Rightarrow \boxed{a_N = \frac{16}{\sqrt{\left[(8t-4)^2 + 4\right]}}} \left(ms^{-2}\right)$$

5/ Le rayon de courbure est :

$$a_N = \frac{v^2}{r} \;,\; r = \frac{v^2}{a_N} \Rightarrow \boxed{r = \frac{16}{\sqrt{\left[(8t-4)^3 + 4\right]}}} (m)$$

**Exercice 4.18 :**

1/ En éliminant le temps entre les équations paramétriques, et cela en les élevant au carré d'abord puis en les additionnant membre à membre, on obtient l'équation de la trajectoire $\boxed{x^2 + y^2 = 4}$. La trajectoire tracée par le mobile est un cercle de centre $O$ et de rayon $R = 2$.

2/ Les deux composantes du vecteur accélération et le module du vecteur vitesse sont:

$$v_x = -\sin\frac{t}{2} \;,\; v_y = \cos\frac{t}{2} \;;\; v^2 = v_x^2 + v_y^2 \Leftrightarrow v^2 = 1 \;,\; \boxed{v = \frac{ds}{dt} = 1ms^{-1}}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

3/ L'intégration du vecteur vitesse $v = \frac{ds}{dt}$ , conduit à l'équation horaire du mouvement en coordonnées curvilignes : $s = \int v.dt \Rightarrow v = t + C$

Et puisque au temps $t = 0$, $s = 0$, donc $C = 0$ et l'équation horaire est $\boxed{s = t}$.

4/ On dérive la vitesse par rapport au temps pour aboutir à l'accélération :

$a_x = -\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}$ ; $a_y = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}$ ; $\boxed{a^2 = a_x^2 + a_y^2 = 0,25 ms^{-2}}$

Dans la base de Frenet :

$$\boxed{a_T = \frac{dv}{dt} = 0}\ ,\quad a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} \Rightarrow \boxed{a_N = 0,5 ms^{-2}}$$

5/ Le rayon d courbure est : $R = \frac{v^2}{a_N} \Rightarrow \boxed{R = 2m}$

6/ L'accélération angulaire est logiquement la dérivée de la vitesse angulaire par rapport au temps : $\ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt} = 0,2t$

La vitesse angulaire est donc : $\omega = \int 0,2t.dt \Rightarrow \omega = 0,1t^2 + C$

Et puisqu'à $t = 0$, $s = 0$, alors $C = 0$ et la vitesse angulaire vaut : $\boxed{\omega = 0,1t^2}$.

Nous pouvons à présent déduire la vitesse instantanée : $v = \omega R = 0,1Rt^2 \Rightarrow \boxed{v = 0,2t^2}$

La vitesse atteint la valeur $10 ms^{-2}$ à l'instant $10 = 0,2t^2 \Rightarrow \boxed{t = 7,1s}$

En intégrant la vitesse angulaire, nous obtenons l'angle balayé, et de là on calcule la distance parcourue : $\theta = \frac{0,1}{3}t^3$ , $s = R\theta = \frac{0,1}{3}.2.(7,1)^3 \Rightarrow \boxed{s \simeq 23,9m}$

**Exercice 4.19 :**

1/ Partant des différentes expressions connues, on peut calculer le vecteur accélération du mobile :

$$\vec{r} = r.\vec{u}_r = \frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_r \quad ; \quad \theta = \frac{t}{b} \quad ; \quad \dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta \quad ; \quad \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}.\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\vec{u}}_r \Rightarrow \vec{v} = -\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_r + \frac{r_0}{b}.e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_\theta \quad ; \quad \boxed{\vec{v} = \frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}\left(-\vec{u}_r + \vec{u}_\theta\right)}$$

2/ Pour calculer l'angle $(\vec{v}, \vec{u}_\theta) = \alpha$ on fait appel aux propriétés du produit scalaire :

$$\vec{v}.\vec{u}_\theta = v.u_\theta.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{v}.\vec{u}_\theta}{v.u_\theta}$$

On remplace $\vec{v}$ et $v$ par leur expressions respectives :

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha=\dfrac{\vec{v}.\vec{u}_\theta}{v.u_\theta}=\dfrac{\dfrac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}\left(-\vec{u}_r+\vec{u}_\theta\right).\vec{u}_\theta}{\dfrac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.u_\theta}\\ -\vec{u}_r.\vec{u}_\theta=0\ \ ;\ \ \vec{u}_\theta.\vec{u}_\theta=1\ \ ,\ \ u_\theta=1\end{array}\right|\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{u_\theta}=1\Rightarrow\boxed{\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right)=\alpha=0}\ \ ;\ \ \vec{v}\,//\,\vec{u}_\theta$$

Ce résultat indique que $\vec{v}$ et $\vec{u}_\theta$ sont colinéaires.

3/ Pour calculer le vecteur accélération, on dérive le vecteur vitesse par rapport au temps (c'est ce qui a été démontrée dans le cours) :

$$\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta\Rightarrow\vec{a}=\left(\frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}}-\frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}}\right)\vec{u}_r+\left(-2\frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}}\right)\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{a}=\left(-2\frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}}\right)\vec{u}_\theta}$$

4/ Pour calculer l'angle $\left(\vec{a},\vec{u}_N\right)=\beta$, on utilise les propriétés du produit scalaire :

$$\vec{a}.\vec{u}_N=a.u_N.\cos\beta\Rightarrow\cos\beta=\frac{\vec{a}.\vec{u}_N}{a.u_N}$$

On remplace $\vec{a}$ et $a$ par leurs expressions respectives pour arriver à :

$$\cos\beta=\frac{\vec{a}.\vec{u}_N}{a.u_N}=\frac{-2\dfrac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_\theta.\vec{u}_N}{-2\dfrac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.u_N}=\frac{\vec{u}_\theta.\vec{u}_N}{u_N}\rightarrow(1)$$

Nous avons vu à la question $(2)$ que $\vec{v}$ et $\vec{u}_\theta$ ont la même direction, soit $\left(\vec{v}=v.\vec{u}_\theta\right)$ ; de même $\vec{v}=v.\vec{u}_T$, donc $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_T$ sont parallèles, ce qui nous permet d'écrire : $\vec{u}_\theta=u_\theta.\vec{u}_T$.

Remplaçons maintenant $\vec{u}_\theta$ dans $(1)$ : $\cos\beta=\dfrac{u_\theta\vec{u}_T.\vec{u}_N}{u_N}$

Et puisque $\vec{u}_T.\vec{u}_N=0$, donc $\cos\beta=0\Rightarrow\boxed{\beta=\frac{\pi}{2}rad}\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{u}_N$

**Exercice 4.20 :**

1/ Nous voyant sur la figure ci-dessous que l'abscisse instantanée du point $M$ est l'équation horaire demandée, elle est égale à :

$$\overrightarrow{AB}^2=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)^2$$

$$AB^2=OB^2+OA^2-2.OA.OB.\cos\omega t$$

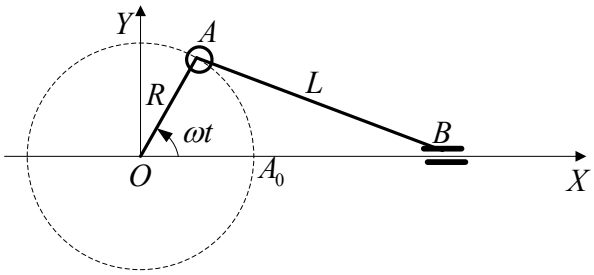
$$L^2=x^2+R^2-2Rx\cos\omega t\Leftrightarrow L^2=x^2+R^2\left(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t\right)-2Rx\cos\omega t$$

$$L^2=\left(x-R\cos\omega t\right)^2+R^2\sin^2\omega t\Rightarrow\boxed{x=R\cos\omega t+\left(L^2-R^2\sin^2\omega t\right)^{1/2}}$$

Nous pouvons nous assurer que $x=R+L$ quand $\omega.t=0$ .

2/ Instants où la vitesse s'annule.

A.FIZAZI Univ-BECHAR




Cherchons d'abord l'expression de la vitesse :

$$v = \frac{dx}{dt} = -R\omega\left(\sin\omega t + \frac{R\sin^2\omega t}{2\left(L^2 - R^2\sin^2\omega t\right)^{1/2}}\right)$$

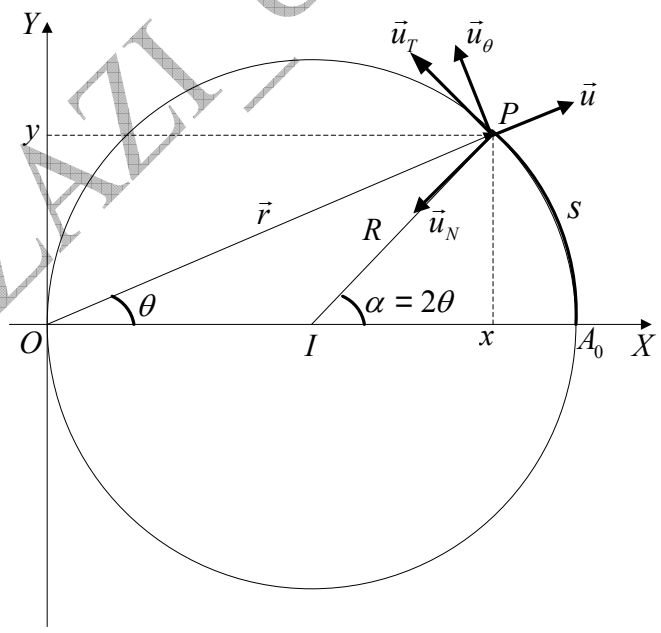
La vitesse s'annule donc aux instants :

$$v = -R\omega\left(\sin\omega t + \frac{R\sin^2\omega t}{2\left(L^2 - R^2\sin\omega t\right)^{1/2}}\right) = 0$$

$$\sin\omega t + \frac{R\sin^2\omega t}{2\left(L^2 - R^2\sin^2\omega t\right)^{1/2}} = 0 \Rightarrow \omega.t = k.\pi \Rightarrow \boxed{t = k\frac{\pi}{\omega}}$$

**Exercice 4.21 :**

1/ En regardant la figure on voit bien que : $\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OI} \Rightarrow R^2 = R^2 + r^2 - 2R.r.\cos\theta$




Donc l'équation polaire du cercle est : $r^2 = 2R.r.\cos\theta \Rightarrow \boxed{r = 2R.\cos\theta}$

L'équation cartésienne du cercle est :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\left.\begin{array}{l} r = 2R\cos\theta \\ r^2 = x^2 + y^2 \\ \cos\theta = \dfrac{x}{R} \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 2R\dfrac{x}{R} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2R.x = 0}$$

2/ La base polaire du point $P$ est représentée sur la figure. Pour calculer les composantes polaires de la vitesse et de l'accélération nous partons de l'expression du vecteur position : $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r.\vec{u}$ .

La première dérivée par rapport au temps nous donne l'expression du vecteur vitesse, soit :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ r = 2R\cos\theta \\ \dot{r} = -2R\dot{\theta}\sin\theta \end{array}\right| \Rightarrow \vec{v} = -2R\dot{\theta}.\sin\theta.\vec{u}_r + 2R\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{v} = 2R\dot{\theta}\left(-\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right)} \rightarrow (1)$$

La dérivée seconde par rapport au temps nous conduit à l'expression du vecteur accélération :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right).\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta \\ r = 2R\cos\theta \\ \dot{r} = -2R\dot{\theta}\sin\theta \\ \ddot{r} = -2R\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a} = -2R\left(2\dot{\theta}^2.\cos\theta + \ddot{\theta}.\sin\theta\right)\vec{u}_r + 2R\left(\ddot{\theta}.\cos - 2\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\vec{u}_\theta} \rightarrow (2)$$

3/

- Expression de $s$ en fonction de $\theta$ :
  Nous rappelons ici une propriété géométrique du cercle : Dans un cercle, les angles qui interceptent le même arc de cercle, celui dont le sommet est au centre du cercle vaut le double de l'angle ayant son sommet sur la circonférence de ce même cercle. Voir figure ci-dessous. Donc :

  $$\boxed{\alpha = 2\theta} \quad \boxed{s = \overset{\frown}{AP} = R.\alpha = 2R\theta}$$

- La base locale $\left(\vec{u}_T, \vec{u}_N\right)$ de $P$ est représentée sur la figure.
- Les composantes du vecteur vitesse sont : $\boxed{\vec{v} = v.\vec{u}_T = 2R\dot{\theta}.\vec{u}_T} \rightarrow (3)$
- Pour le vecteur accélération :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=\vec{a}_N+\vec{a}_T\\ \vec{a}_N=\dfrac{v^2}{R}\vec{u}_N=4R\dot{\theta}^2\vec{u}_N\\ \vec{a}_T=\dfrac{dv}{dt}\vec{u}_T=2R\ddot{\theta}\vec{u}_T\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a}=\underbrace{4R\dot{\theta}^2}_{a_N}\vec{u}_N+\underbrace{2R\ddot{\theta}\vec{u}_T}_{a_T}} \rightarrow (4)$$

Pour retrouver les expressions de la vitesse et de l'accélération dans la base polaire il suffit d'exprimer les vecteurs unitaires de la base locale en coordonnées polaires :

De la figure on en déduit :

$$\vec{u}_N=-\cos\theta.\vec{u}_r-\sin\theta.\vec{u}_\theta$$
$$\vec{u}_T=-\sin\theta.\vec{u}_r+\cos\theta.\vec{u}_\theta$$

En remplaçant dans les équations $(3)$ et $(4)$ nous obtenons les équations $(1)$ et $(2)$ obtenues précédemment :

$$\boxed{\vec{v}=v.\vec{u}_T=2R\dot{\theta}.\left(-\sin\theta.\vec{u}_r+\cos\theta.\vec{u}_\theta\right)}=(1)$$

Organisons cette dernière équation:

$$\boxed{\vec{a}=-2R\left(2.\dot{\theta}^2.\cos\theta+\ddot{\theta}\sin\theta\right).\vec{u}_r+2R\left(\ddot{\theta}\cos\theta-2\dot{\theta}^2\sin\theta\right).\vec{u}_\theta}=(2)$$

4/ A présent la vitesse angulaire est constante.

- L'angle $\theta$ balayé par le point $P$ durant $t$ est : $\alpha=2\theta=\omega t \Rightarrow \boxed{\theta=\dfrac{\omega t}{2}}$
- L'expression de est : $\boxed{r=2R\cos\dfrac{\omega}{2}t}$
- Expressions de la vitesse et de l'accélération : On sait depuis le début que $\boxed{\dot{\theta}=\dfrac{\omega}{2}}$. Nous remplaçons dans les expressions $(1),(2),(3)$ et $(4)$, $\theta$ et $\dot{\theta}$ par leurs valeurs respectives :
  - En coordonnées polaires : on remplace dans $(1)$ et $(2)$ :

$$\boxed{\vec{v}=R\omega\left(-\sin\frac{\omega t}{2}.\vec{u}_r+\cos\frac{\omega t}{2}.\vec{u}_\theta\right)}$$

$$\boxed{\vec{a}=\left(-2R\omega^2.\cos\frac{\omega}{2}t\right).\vec{u}_r-\left(R\omega^2.\sin\frac{\omega}{2}t\right)\vec{u}_\theta}$$

  - En coordonnées propres (Frenet): On remplace dans $(3)$ et $(4)$ :

$$\boxed{\vec{a}=R\omega^2.\vec{u}_N}\quad\boxed{\vec{v}=R\omega.\vec{u}_T}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

# D-IV/ MOUVEMENT DANS L'ESPACE
# الـــحـــركـــات فـــي الـــفضـــاء

Pour étudier le mouvement d'un point matériel dans l'espace, et qui est caractérisé par trois dimensions, on fait appel, en général, aux coordonnées cylindriques et aux coordonnées sphériques.

## 1/ ETUDE DU MOUVEMENT EN COORDONNEES CYLINDRIQUES
(دراسة الحركة بالإحداثيات الأسطوانية)

❖ **Position du mobile :** (figure 4.14)

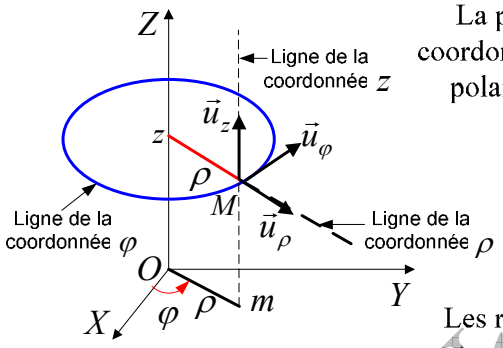



**Fig 4.14 : Base des coordonnées cylindriques**

La position du mobile $M$ est indiquée par sa coordonnée algébrique $z$ et ses deux coordonnées polaires $\rho$ et $\varphi$ de sa projection $m$ sur le plan $XOY$

$$\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} \rho(t) \\ \varphi(t) \\ z(t) \end{vmatrix}$$

Les relations entre les vecteurs de la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ et ceux de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{u}_\rho &= \cos\varphi.\vec{i} + \sin\varphi.\vec{j} \\ \vec{u}_\varphi &= -\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j} \\ \vec{u}_z &= \vec{k} \end{aligned}} \quad (4.39)$$

Le vecteur position s'écrit donc :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z} \quad \textbf{(4.40)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{i}.\rho.\cos\varphi + \vec{j}.\rho.\sin\varphi + \vec{k}.z} \quad \textbf{(4.41)}$$

L'étudiant peut remarquer l'équivalence entre cette dernière expression et la relation déjà vue **(6.3)**.

- Le déplacement élémentaire est donné par l'expression :

$$\boxed{ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2} \quad \textbf{(4.42)}$$

❖ **Vitesse du mobile :**

Il suffit de dériver le vecteur position, exprimé en coordonnées cylindriques, par rapport au temps, pour tomber sur le vecteur vitesse. Remarquons que le rayon polaire $\rho$

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

est une fonction du temps. Le vecteur unitaire $\vec{u}_\varphi$ est lui aussi variable avec le temps. Seul $\vec{u}_z = \vec{k}$ est constant.

$$\vec{r} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{v}=\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_\rho \frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \vec{u}_z \frac{dz}{dt}$$

En se rappelant de la relation (4.25) relative aux dérivées de $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$ et $\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$, nous pouvons écrire :

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi + \dot{z}.\vec{u}_z} \qquad \textbf{(4.43)}$$

Remarquons que la vitesse a trois composantes : **radiale** $(\vec{v}_r)$ , **transversale** $(\vec{v}_\varphi)$ et **azimutale** $(\vec{v}_z)$.

Le module de la vitesse en coordonnées cylindriques est donné par l'expression :

$$\boxed{v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho.\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}} \qquad \textbf{(4.44)}$$

❖ **Accélération du mobile :**

En continuant l'opération de dérivation par rapport au temps nous arrivons à l'expression de l'accélération du mobile :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}.\vec{u}_\rho + \dot{\rho}.\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{\rho}.\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi + \rho.\ddot{\varphi}.\vec{u}_\varphi + \rho.\dot{\varphi}.\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} + \ddot{z}.\vec{u}_z$$

En utilisant la notation de Newton, et en se rappelant de la relation **(4.25)**, nous obtenons l'expression finale de l'accélération exprimée en coordonnées cylindriques :

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho.\dot{\varphi}^2).\vec{u}_\rho + (\rho.\ddot{\varphi} + 2.\dot{\rho}.\dot{\varphi})\ \vec{u}_\varphi + \ddot{z}.\vec{u}_z} \qquad \textbf{(4.45)}$$

La même expression peut être écrite sous la forme :

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho.\dot{\varphi}^2).\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2.\dot{\varphi})\ \vec{u}_\varphi + \ddot{z}.\vec{u}_z} \qquad \textbf{(4.46)}$$

Si $z = 0$ et $\rho = R = C^{te}$, réapparaît alors la relation $(31.4)$ de l'accélération du mouvement circulaire uniforme.

Remarquons que l'accélération, comme la vitesse, a trois composantes : **radiale** $(\vec{a}_r)$ , **transversale** $(\vec{a}_\varphi)$ et **azimutale** $(\vec{a}_z)$.

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

## 2/ ETUDE DU MOUVEMENT EN COORDONNEES SPHERIQUES
(دراسة الحركة بالإحداثيات الكروية)

❖ **Position du mobile :** (Figure 4.15)

Dans ce système la position du mobile est définie par la relation :

$$\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} r(t) \\ \theta(t) \\ \varphi(t) \end{vmatrix} \qquad \boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r} \qquad \textbf{(4.47)}$$

Rappelons les deux relations **4.17** et **4.18** entre les vecteurs de la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ et ceux de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ :

$$\vec{u}_r = \sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \cos\theta.\vec{k}$$
$$\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}$$
$$\vec{u}_\theta = \cos\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \cos\theta.\sin\varphi.\vec{j} - \sin\theta.\vec{k}$$

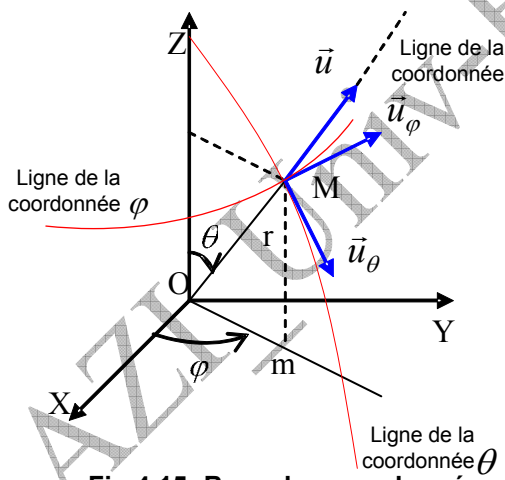



**Fig 4.15: Base des coordonnées sphériques**

■ Le déplacement élémentaire est donné par la relation :

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + (r\sin\theta.d\varphi)^2 + (rd\theta)^2} \qquad \textbf{(4.48)}$$

**L'étudiant ne doit pas apprendre les lettres mais leurs sens. Remarquez que $\varphi = (OX, Om)$ et $\theta = (OZ, OM)$ , mais vous pouvez trouver l'inverse de cela dans d'autres références.**

❖ **Vitesse du mobile :**

Dérivons le vecteur position en coordonnées sphériques par rapport au temps :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\vec{u}}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

Dérivons le vecteur $\vec{u}$ , puis organisons la nouvelle expression pour obtenir à la fin :

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\left[\underbrace{\vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}\sin\theta}_{\vec{u}_\theta}\right] + \dot{\varphi}\sin\theta\left[\underbrace{-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi}_{\vec{u}_\varphi}\right]$$

C'est-à-dire : $\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta.\vec{u}_\varphi$

Par remplacement on obtient l'expression finale de la vitesse en coordonnées sphériques :

$$\vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + (r\sin\theta)\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi$$

Les trois composantes sphériques du vecteur vitesse apparaissent clairement :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta + \vec{v}_\varphi \Rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi} \qquad \textbf{(4.49)}$$

La base orthogonale directe est constituée des vecteurs $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ qui dépendent de la position du mobile, donc du temps. Elle est définie par les équations horaires $r(t)$, $\theta(t)$ et $\varphi(t)$, qui nous permettent d'arriver aux valeurs algébriques $v$ , $v_\theta$ et $v_\varphi$ des composantes sphériques du vecteur vitesse et de là, la détermination du vecteur vitesse.

❖ **Accélération du mobile :**

En dérivant le vecteur vitesse par rapport au temps, on arrive à l'expression du vecteur accélération, soit :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot{r}.\vec{u}_r + (r\sin\varphi)\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi\right]$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta + \vec{a}_\varphi \Leftrightarrow a = \sqrt{a^2{}_r + a^2{}_\theta + a^2{}_\varphi}$$

Nous donnons ci après l'expression finale du vecteur accélération, l'**étudiant** doit être en mesure de s'assurer du résultat :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} = {} & (\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2 - r.\dot{\varphi}^2.\sin^2\theta).\vec{u}_r + \\ & (r.\ddot{\theta} + 2\dot{r}.\dot{\theta} - r.\dot{\varphi}^2.\sin\theta.\cos\theta).\vec{u}_\theta + \\ & (r.\ddot{\varphi}.\sin\theta + 2\dot{r}.\dot{\varphi}.\sin\theta + 2r.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.\cos\theta)\vec{u}_\varphi\end{aligned}} \qquad \textbf{(4.50)}$$

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

Là aussi, connaissant les équations horaires $r(t)$, $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ on arrive aux expressions algébriques $a$ , $a_\theta$ et $a_\varphi$ des composantes du vecteur accélération et par conséquent à la détermination du vecteur $\vec{a}$ .

**Exemple 4.9 :**

Le mouvement d'un point matériel $M$ est défini en coordonnées cylindriques par les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et par l'angle polaire $\theta$ tels que $\overrightarrow{OM} = a.\vec{u}_\rho + bt.\vec{k}$ ; $\theta = ct^2$ ; sachant que $a, b, c$ sont des constantes positives.

1/ Calculer la vitesse et l'accélération en fonction du temps.

2/ Calculer le rayon de courbure après un tour complet autour de l'axe $OZ$ .

**Réponse :**

1/ Pour obtenir le vecteur vitesse on dérive le vecteur accélération :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{v} = \frac{d}{dt}\left(a\vec{u}_\rho + bt\vec{k}\right)$$

$$\vec{v} = a\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + b\vec{k} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\vec{v} = a.\dot{\theta}\vec{u}_\theta + b\vec{k} \\ \theta = ct^2 \Rightarrow \dot{\theta} = 2ct\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = 2act\vec{u}_\theta + b\vec{k}}$$

Le module du vecteur vitesse :

$$\boxed{v = \sqrt{4a^2c^2t^2 + b^2}}$$

En dérivant le vecteur vitesse on obtient le vecteur accélération :

$$\gamma = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(2act.\vec{u}_\theta + b\vec{k}) \Rightarrow \gamma = 2ac\frac{d}{dt}(t.u_\theta) \Rightarrow \gamma = 2ac\left[t.\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \vec{u}_\theta.1\right]$$

$$\gamma = 2ac\left[-t.\dot{\theta}.\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta\right] \Rightarrow \gamma = 2ac\left[-t.2ct.\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta\right] \Rightarrow \boxed{\gamma = 2ac\left[-2ct^2.\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta\right]}$$

Son module est :

$$\boxed{\gamma = 2ac\sqrt{4c^2t^4 + 1}}$$

2/ Calcul du rayon de courbure.

Calculons d'abord la durée nécessaire pour que le mobile effectue un tour complet :

$$\theta = 2\pi = ct^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{\theta}{c}} = \sqrt{\frac{2\pi}{c}}$$

Remplaçant ensuite le temps par son expression que nous venons de trouver dans l'expression de l'accélération normale et enfin, calculons le rayon de courbure :

Nous laissons à l'étudiant le soin de réaliser ce calcul de longue haleine pour aboutir à la fin au résultat suivant :

A.FIZAZI - Univ-BECHAR

$$R=\frac{v^2}{\gamma_N} \quad ; \quad \gamma_N=\sqrt{\gamma^2-\gamma_T^2} \ ;$$

$$\boxed{\gamma_T=\frac{dv}{dt}=\frac{4a^2c^2t}{\sqrt{4a^2c^2t^2+b^2}}\neq \vec{\gamma}=\frac{d\vec{v}}{dt}!!!!!} \qquad \boxed{\gamma_N=2ac\frac{\sqrt{16a^2c+b^2}}{\sqrt{a^2c^2t^2+b^2}}}$$

$$R_{(t)}=\frac{v^2}{a_N}=\frac{\left(4a^2c^2t^2+b^2\right)^{3/2}}{2ac(16a^2c^4t^6+4c^2b^2t^4+b^2)^{1/2}}$$

$$\boxed{R\left(\sqrt{\frac{2\pi}{c}}\right)=\frac{\left(8\pi a^2c^2t^2+b^2\right)^{3/2}}{2ac(128a^2c\pi^3+b^2\left(1+16\pi^2\right))^{1/2}}}$$

A.FIZAZI _ Univ-BECHAR

# EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

**Exercice 4.22**

On donne les équations du mouvement d'un point $M$ dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ :

$$x=\frac{1}{2}bt^2\ ,\ y=ct\ ,\ z=\frac{3}{2}bt^2$$

Où $b,c$ sont des constantes positives.

1/ Trouver la vitesse et l'accélération ainsi que leurs modules.

2/ Quelle est l'équation de la trajectoire du point $m$ qui représente la projection verticale du point mobile $M$ sur le plan $XOY$ .

**التمرين 22.4:**

تعطى المعادلات لحركة نقطة مادية $M$ في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

$$x=\frac{1}{2}bt^2\ ,\ y=ct\ ,\ z=\frac{3}{2}bt^2$$

حيث $c,b$ ثابتان موجبان.

1/ أوجد السرعة و التسارع وطويلتيهما.

2/ ما هي معادلة المسار للنقطة $m$ التي تمثل المسقط العمودي للنقطة $M$ المتحركة على المستوى $XOY$ .

**Exercice 4.23**

Soit la trajectoire définie par :

$$\vec{r}=\vec{i}.3\cos 2t+\vec{j}.3\sin 2t+\vec{k}.\left(8t-4\right)$$

1/ Trouver le vecteur unitaire $\vec{T}$ tangent à la trajectoire.

2/ Si $\vec{\ }$ est le vecteur position d'un point se déplaçant sur $C$ au temps $t$ , vérifier que dans ce cas $\vec{v}=v.\vec{T}$ .

**التمرين 23.4:**

ليكن المسار $C$ المعرّف بـــ:

$$\vec{r}=\vec{i}.3\cos 2t+\vec{j}.3\sin 2t+\vec{k}.\left(8t-4\right)$$

1/ أوجد شعاع الواحدة $\vec{T}$ المماسي للمسار.

2/ إذا كان $\vec{\ }$ هو شعاع موضع نقطة متحركة على المسار $C$ في اللحظة $t$ ، تحقق أن في هذه الحالة $\vec{v}=v.\vec{T}$ .

**Exercice 4.24**

Un point $M$ décrit une hélice circulaire d'axe $OZ$ .

Ses équations horaires sont :

$$x=R\cos\theta\ ;\ y=R\sin\theta\ ,\ z=h\theta$$

$R$ est le rayon du cylindre de révolution sur lequel est tracé l'hélice, $h$ est une constante et $\theta$ l'angle que fait avec $OX$ la projection $OM'$ de $OM$ sur $XOY$ .

1/ Donner en coordonnées cylindriques les expressions de la vitesse et de l'accélération.

2/ Montrer que le vecteur vitesse fait avec le plan $XOY$ un angle constant.

3/ Montrer que le mouvement de rotation est uniforme, que le vecteur accélération passe par l'axe du cylindre et est parallèle au plan $XOY$ . Calculer le rayon de courbure.

**التمرين 24.4:**

ترسم نقطة مسارا حلزونيا دائريا حول المحور $OZ$، معادلاته الزمنية هي:

$$x=R\cos\theta\ ;\ y=R\sin\theta\ ,\ z=h\theta$$

$R$ يمثل نصف قطر الأسطوانة للدوران التي يرتسم عليها الحلزون، $h$ ثابت و $\theta$ الزاوية التي يصنعها $OX$ مسقط $OM'$ لـــ $OM$ على $XOY$ .

1/ إعط بالإحداثيات الأسطوانية عبارتي السرعة والتسارع.

2/ بيّن أن شعاع السرعة يصنع زاوية ثابتة مع المستوى $XOY$ .

3/ بيّن أن الحركة الدورانية منتظمة، و أن شعاع التسارع يمرّ من محور الأسطوانة و موازي للمستوى $XOY$ . أحسب نصف قطر الانحناء.

**Exercice 4.25**

Un mobile se déplace dans l'espace suivant la loi :

$$x=R\cos\omega t\ ;\ y=R\sin\omega t\ ,\ z=\alpha t$$

Où $\alpha$, $\omega$, $R$ sont des constantes positives.

1/ soit $m$ la projection de $M$ dans le plan $XOY$ :

**التمرين 25.4:**

ينتقل متحرّك في الفضاء وفق القانون:

$$x=R\cos\omega t\ ;\ y=R\sin\omega t\ ,\ z=\alpha t$$

حيث $R$ $\alpha$, $\omega$, ثوابت موجبة.

1/ ليكن $m$ مسقط $M$ في المستوى $XOY$ :
ا/ ما هو مسار $m$ في $XOY$ ؟
ب/ ما هو نوع حركة $m$ وفق المحور $OZ$ ؟
ج/ إستنتج نوعية مسار المتحرك $M$ .
2/ في جملة الإحداثيات الأسطوانية:
ا/ أكتب عبارة شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ و مثّل القاعدة $\left(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$ عند نقطة $M$ من الفضاء.
ب/ أوجد السرعة و التسارع لـــ $M$ ، و طويلتيهما. حدّد جهتيهما ثم مثلهما عند نقطة من الفضاء.
ج/ إستنتج نصف قطر الانحناء.

a/ Quelle est la nature de la trajectoire de $m$ dans le plan $XOY$ ?
b/ Quelle est la nature du mouvement de $m$ suivant l'axe $OZ$ ?
c/ En déduire la nature de la trajectoire du mobile $M$ .
2/ dans le système des coordonnés cylindriques :
a/ écrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et représenter la base $\left(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$ en un point $M$ de l'espace.
b/ trouver la vitesse et l'accélération de $M$ , ainsi que leurs modules. Déterminer leurs directions puis les représenter en un point de l'espace.
d/ en déduire le rayon de courbure.

## التمرين 26.4:

1/ انطلاقا من عبارات أشعة واحدة القاعدة $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ بالإحداثيات الكارتيزية ، تأكّد من العلاقات التالية:

$$\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}.\vec{u}_r + \dot{\varphi}.\cos\theta.\vec{u}_\varphi$$
$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi$$
$$\dot{\vec{u}}_\varphi = -\dot{\varphi}\left(\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right)$$

2/ برهن أن التسارع في القاعدة $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ يكتب:

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{u}_r +$$
$$+\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta.\cos\theta\right)\vec{u}_\theta +$$
$$+\left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}.\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{u}_\varphi$$

**Exercice 4.26**

1/ A partir des expressions des vecteurs unitaires de la base $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ en coordonnées cartésienne, s'assurer des expressions suivantes :

$$\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}.\vec{u}_r + \dot{\varphi}.\cos\theta.\vec{u}_\varphi$$
$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi$$
$$\dot{\vec{u}}_\varphi = -\dot{\varphi}\left(\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right)$$

2/ Montrer que l'accélération dans la base $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ s'écrit :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{u}_r +$$
$$+\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta.\cos\theta\right)\vec{u}_\theta +$$
$$+\left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}.\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{u}_\varphi$$

## التمرين 27.4:

في جملة الإحداثيات الكروية $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ تتحرك نقطة مادية $M$ على سطح كرة نصف قطرها $R$ . إحداثياتها الكرويتان هما:

$$\theta = \left(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{6}rad \quad , \quad \varphi = \omega t^2 \text{ ،}$$

مع $\omega$ ثابت موجب.
1/ انطلاقا من عبارة شعاع الموضع في الإحداثيات الكروية:
ا/ أوجد السرعة و التسارع لهذه النقطة في القاعدة $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ ،
ب/ أحسب طويلتي السرعة و التسارع،
ج/ إستنتج التسارع الناظمي.
2/ انطلاقا هذه المرة من عبارة شعاع الموضع في الإحداثيات الديكارتية:
ا/ أوجد السرعة و التسارع في القاعدة $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ثم

**Exercice 4.27**

Dans le système des coordonnées sphériques $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ , un point $M$ se déplace sur la surface d'une sphère de rayon $R$ . Ses deux coordonnées sphériques sont:

$$\theta = \left(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{6}rad \quad , \quad \varphi = \omega t^2 ,$$

Avec $\omega$ constante positive.
1/ Partant de l'expression du vecteur position en coordonnées sphériques :
a/ trouver la vitesse et l'accélération de ce mobile dans la base $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$,
b/ calculer les modules de la vitesse et de l'accélération,
c/ en déduire l'accélération normale.
2/ Partant cette fois de l'expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes :
a/ trouver la vitesse et l'accélération dans la

| | |
|---|---|
| احسب من جديد طويلتيهما و تأكد من تطابقهما مع نتائج السؤال 1/ب،<br>3/ ا/ما هو مسار النقطة $M$ ؟ مثل المسار كيفيا.<br>ب/ ما طبيعة حركة النقطة $M$ ؟ | base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ puis calculer de nouveau leurs modules et vérifier qu'ils coïncident avec les résultats de la question 1/b,<br>3/ a/ Quelle est la trajectoire du point $M$ ? la représenter qualitativement,<br>b/ Quelle est la nature du mouvement du point $M$ ? |

A.FIZAZI _ Univ-BECHAR

**Corrigés des exercices 4.22 à 4.27** — **حلول التمارين من 22.4 الى 27.4**

**Exercice 4.22 :**

1/ Le vecteur vitesse :

Ecrivons l'expression du vecteur position : $\boxed{\vec{r} = \frac{1}{2}bt^2.\vec{i} + ct.\vec{j} + \frac{3}{2}bt^2.\vec{k}}$

Pour obtenir le vecteur vitesse on doit dériver le vecteur position par rapport au temps :

$$\dot{x} = v_x = bt \ , \ \dot{y} = v_y = c \ , \ \dot{z} = v_z = 3bt$$

$$\boxed{\vec{v} = bt.\vec{i} + c.\vec{j} + 3bt.\vec{k}} \ ; \ \boxed{v = \sqrt{10(bt)^2 + c^2}}$$

Dérivons le vecteur vitesse pour obtenir le vecteur accélération :

$$\ddot{x} = a_x = b \ , \ \ddot{y} = a_y = 0 \ , \ \ddot{z} = a_z = 3b$$

$$\boxed{\vec{a} = b.\vec{i} + 3b.\vec{k}} \ ; \ \boxed{a = 2b}$$

2/ Equation de la trajectoire du point $m$ : éliminons le temps entre les deux équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ :

$$x = \frac{1}{2}bt^2 \Rightarrow t = \frac{2x}{b} \ , \ \boxed{y = c\sqrt{\frac{2x}{b}}}$$

**Exercice 4.23 :**

1/ Le vecteur tangentiel à la trajectoire est le vecteur vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{\ }}{dt}$,

En coordonnées cartésiennes le vecteur vitesse est donc : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{i}.6\sin 2t + \vec{j}.6\cos 2t + 8.\vec{k}$

Son module est égal à : $v = \sqrt{36 + 64} \Rightarrow v = 10 m.s^{-2}$

Le vecteur unitaire $\vec{T}$ tangent à la trajectoire $C$ est porté par le vecteur $\vec{v}$ :

$$\boxed{\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v} = -\frac{3}{5}\sin 2t.\vec{i} + \frac{3}{5}\cos 2t.\vec{j} + \frac{4}{5}.\vec{k}}$$

2/ Si $\vec{\ }$ est le vecteur position du point $M$ au temps $t$, alors $\vec{v} = \frac{d\vec{\ }}{dt}$ :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{i}.6\sin 2t + \vec{j}.6\cos 2t + 8.\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = -\vec{i}.6\sin 2t + \vec{j}.6\cos 2t + 8.\vec{k}$$

$$\vec{v} = 10\left(-\frac{3}{5}\sin 2t.\vec{i} + \frac{3}{5}\cos 2t.\vec{j} + \frac{4}{5}.\vec{k}\right)$$

$$\vec{v} = 10.\vec{u}_T = 10\vec{T} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = v.\vec{T}}$$

**Exercice 4.24 :**

1/ Nous savons que le vecteur position en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z$$

Nous en déduisons le vecteur vitesse par dérivation :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\vec{u}}_\rho + \dot{z}.\vec{u}_z$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

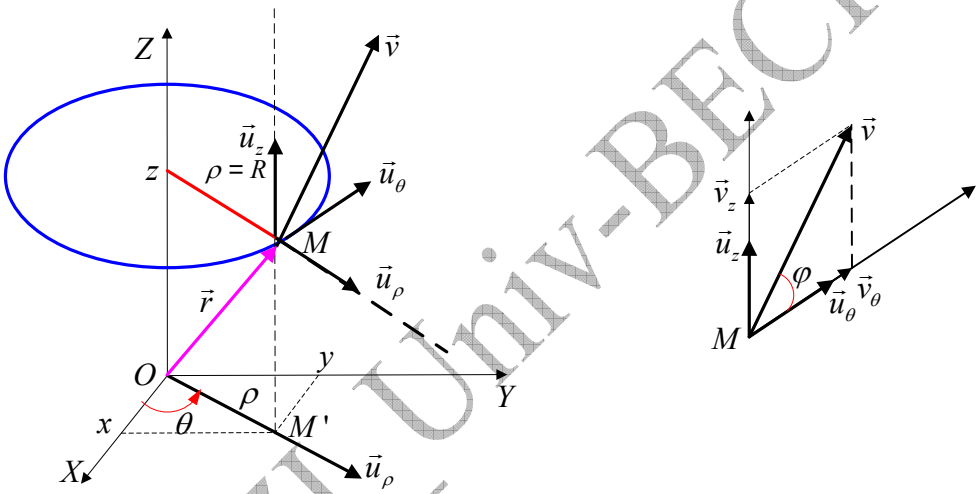
$$\left.\begin{array}{l}\rho = R \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\vec{u}}_\rho = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \dot{z} = h\dot{\theta}\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + h\dot{\theta}\vec{u}_z}$$

Le vecteur accélération est à son tour :

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = R.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta + R.\dot{\theta}.\dot{\vec{u}}_\theta + h.\ddot{\theta}.\vec{u}_z$$

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{\theta} = 0 \\ \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}.\vec{u}_\rho\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -R.\dot{\theta}^2.\vec{u}_\rho + R.\ddot{\theta}.\dot{\vec{u}}_\theta + h.\ddot{\theta}.\vec{u}_z}$$

2/ Le vecteur $\vec{u}_\theta$ est parallèle au plan $OXY$, donc l'angle que forme le vecteur vitesse avec le plan $OXY$ est égal à l'angle que fait le vecteur $\vec{u}_\theta$ avec le plan $OXY$, comme il est indiqué sur la figure ci-dessous, en plus du fait que $\vec{u}_\theta \perp \vec{u}_z$.




$$\tan\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right) = \frac{v_z}{v_\theta} = \frac{h\dot{\theta}}{R\dot{\theta}} \Rightarrow \boxed{\tan\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right) = \frac{h}{R} = Cte}$$

3/ Le mouvement est rotationnel uniforme, cela veut dire que $\dot{\theta} = \omega = Cte$ et $\vec{a} = -R.\omega^2.\vec{u}_\rho$.

Le vecteur accélération $\vec{a}$ est parallèle à $\vec{u}_\rho$, c'est-à-dire centripète, ce qui confirme qu'il passe par l'axe du cylindre. $\vec{u}_\rho$ appartient au plan $OXY$, et $\vec{a}$ est parallèle à $\vec{u}_\rho$, ce qui montre que l'accélération est parallèle au plan $OXY$.

Nous venons de démontrer que l'accélération est centripète, donc :

$$\left.\begin{array}{l}r = \dfrac{v^2}{a_N} = \dfrac{v^2}{a} \\ v^2 = R^2.\omega^2 + h^2.\omega^2 \\ a = R^2.\omega^2\end{array}\right| \Rightarrow r = \frac{R^2\omega^2 + h^2\omega^2}{R\omega^2}, \quad \boxed{r = \frac{R^2 + h^2}{R},}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

**Exercice 4.25 :**

1/ a/ Le mouvement du point $m$ s'effectue dans le plan $XOY$. Afin d'obtenir l'équation de la trajectoire de ce point, on élimine le temps entre les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$. Nous obtenons $x^2 + y^2 = R^2$ qui est l'équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $R$.

b/ Suivant l'axe $OZ$, l'équation de la trajectoire $z = \alpha.t$ nous indique que le mouvement est rectiligne uniforme verticalement.

c/ La trajectoire du mobile est la composition du mouvement plan et du mouvement vertical, il en résulte un mouvement hélicoïdal.

2/ Dans le système de coordonnées cylindriques :

a/ Le vecteur position est : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z \Leftrightarrow \vec{r} = \overrightarrow{OM} = R.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z$

b/ La vitesse et l'accélération du point $M$ sont donc :

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\vec{u}}_\rho + z.\vec{u}_z \\ \dot{\vec{u}}_\rho &= \dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi = R\omega.\vec{u}_\varphi \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = R\omega.\vec{u}_\varphi + b.\vec{u}_z} \quad , \quad \boxed{v = \sqrt{R^2\omega^2 + b^2}}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= R\omega.\dot{\vec{u}}_\varphi \\ \dot{\vec{u}}_\varphi &= -\dot{\varphi}.\vec{u}_\rho = -R\omega.\vec{u}_\rho \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -R\omega^2.\vec{u}_\rho} \quad , \quad \boxed{a = R\omega^2}$$

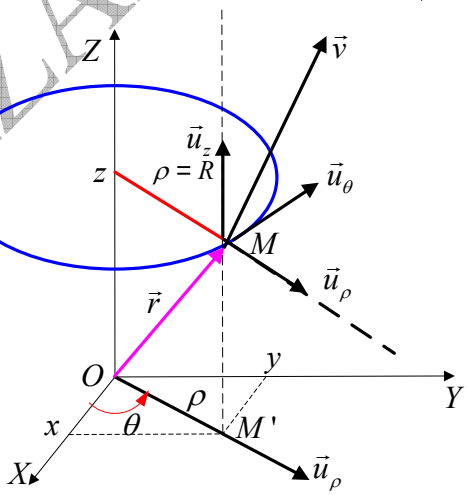
L'angle que fait le vecteur vitesse avec le vecteur $\vec{u}_\varphi$, d'après la figure ci-dessous, est :

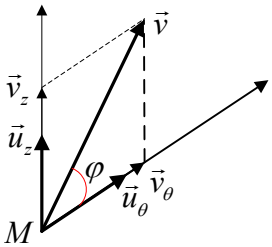
$$\boxed{\tan\beta = \frac{v_z}{v_\varphi} = \frac{b}{R\omega}}$$

Quant à l'accélération elle est centripète c'est-à-dire qu'elle est dirigée vers le centre de la trajectoire circulaire.

c/ Le rayon de courbure est :

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{v^2}{a_N} \\ a_N^2 &= a^2 - a_T^2 \Rightarrow a_N^2 = R^2.\omega^4 - \left(R^2.\omega^2 + b^2\right) \\ a_T^2 &= R^2.\omega^2 + b^2 \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{r = \frac{R^2.\omega^2 + b^2}{\sqrt{R^2.\omega^2\left(\omega^2 - 1\right) - b^2}}}$$




**Exercice 4.26 :**

1/ Les expressions des vecteurs unitaires de la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta)$ en coordonnées cartésiennes sont :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\vec{u}_r = \sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \cos\theta.\vec{k}$$
$$\vec{u}_\theta = \cos\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \cos\theta.\sin\varphi.\vec{j} - \sin\theta.\vec{k}$$
$$\vec{u}_\phi = -\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}$$

**Expression de la dérivée $\dot{\vec{u}}$ :**

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\cos\theta.\cos\varphi.\vec{i} - \dot{\varphi}.\sin\theta.\sin\varphi.\vec{i} + \dot{\theta}\cos\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \dot{\varphi}.\sin\theta.\cos\varphi.\vec{j} - \dot{\theta}\sin\theta.\vec{k}$$

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\left[\underbrace{\cos\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \cos\theta.\sin\varphi.\vec{j} - \sin\theta.\vec{k}}_{\vec{u}_\theta}\right] - \dot{\varphi}.\sin\theta.\left[\underbrace{-\sin\varphi.\vec{i} + .\cos\varphi.\vec{j}}_{\vec{u}_\varphi}\right]$$

$$\boxed{\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi}$$

**Expression de la dérivée $\dot{\vec{u}}_\theta$ :**

$$\dot{\vec{u}}_\theta = \dot{\theta}\sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} - \dot{\varphi}.\cos\theta.\sin\varphi.\vec{i} - \dot{\theta}\sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \dot{\varphi}.\cos\theta.\cos\varphi.\vec{j} - \dot{\theta}\cos\theta.\vec{k}$$

$$\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\left[\underbrace{\sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \cos\theta.\vec{k}}_{\vec{u}_r}\right] + \dot{\varphi}.\cos\theta.\left[\underbrace{-\sin\varphi.\vec{i} + .\cos\varphi.\vec{j}}_{\vec{u}_\varphi}\right]$$

$$\boxed{\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}.\vec{u}_r + \dot{\varphi}.\cos\theta.\vec{u}_\varphi}$$

**Expression de la dérivée $\dot{\vec{u}}_\theta$ :**

$$\dot{\vec{u}}_\phi = -\dot{\varphi}.\cos\varphi.\vec{i} - \dot{\varphi}.\sin\varphi.\vec{j} \Rightarrow \dot{\vec{u}}_\phi = -\dot{\varphi}.\left[\cos\varphi.\vec{i} + \dot{\varphi}.\sin\varphi.\vec{j}\right] \rightarrow (1)$$

Cette expression n'est pas définitive…

Retournons aux expressions de $\dot{\vec{u}}$ et $\dot{\vec{u}}_\theta$ . Multiplions la première par $\sin\theta$ et la seconde par $\cos\theta$ , nous obtenons :

$$\vec{u}_r.\sin\theta = \sin^2\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin^2\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \sin\theta.\cos\theta.\vec{k} \rightarrow (2)$$
$$\vec{u}_\theta.\cos\theta = \cos^2\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \cos^2\theta.\sin\varphi.\vec{j} - \cos\theta.\sin\theta.\vec{k} \rightarrow (3)$$

Additionnons les deux expressions pour obtenir :

$$\vec{u}_r.\sin\theta + \vec{u}_\theta.\cos\theta = \cos\varphi.\vec{i} + \sin\varphi.\vec{j}$$

Remplaçons maintenant dans l'expression $(1)$ de $\dot{\vec{u}}_\varphi$, elle devient :

$$\boxed{\dot{\vec{u}}_\phi = -\dot{\varphi}.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right]}$$

2/ Démonstration de l'expression de l'accélération en coordonnées sphériques :

Nous partant de l'expression de la vitesse :

$$\vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\phi$$

Dérivons la par rapport au temps :

$$\vec{a} = \ddot{r}.\vec{u}_r + \dot{r}.\dot{\vec{u}}_r + \dot{r}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\dot{\theta}.\dot{\vec{u}}_\theta + \dot{r}.\dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\ddot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot{\varphi}.\sin\theta.\dot{\vec{u}}_\phi$$

Remplaçons par leurs expressions trouvées en 1/ :

$$\vec{a} = \ddot{r}.\vec{u}_r + \dot{r}.\left[\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi\right] + \dot{r}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\dot{\theta}.\left[-\dot{\theta}.\vec{u}_r + \dot{\varphi}.\cos\theta.\vec{u}_\varphi\right] +$$
$$\dot{r}.\dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\ddot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot{\varphi}.\sin\theta.\left[-\dot{\varphi}.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right]\right]$$

Développons puis ordonnons :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} = &\left[\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2 - r.\dot{\varphi}^2.\sin^2\theta\right].\vec{u}_r + \dot{r}.\left[\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi\right] + \\ &\left[r.\ddot{\varphi}.\sin\theta + 2\dot{r}.\dot{\varphi}.\sin\theta + 2r.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{u}_\phi\right].\vec{u}_\phi + \\ &\left[r.\ddot{\theta} + 2\dot{r}.\dot{\theta} - r.\dot{\varphi}^2.\sin\theta\cos\theta\right].\vec{u}_\theta\end{aligned}}$$

**Exercice 4.27 :**

1/ En coordonnées sphériques le vecteur position s'écrit : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r.\vec{u}$

a/ Dans le même système de coordonnées le vecteur vitesse s'écrit : $\vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\vec{u}}$

$$\left.\begin{aligned}&r = R = Cte \Rightarrow \dot{r} = 0\\ &\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi\\ &\theta = Cte \Rightarrow \dot{\theta} = 0\\ &\varphi = \omega t^2 \Rightarrow \dot{\varphi} = 2\omega t\end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = R\omega t.\vec{u}_\varphi}$$

Le vecteur accélération avec les mêmes coordonnées s'écrit :

$$\left.\begin{aligned}&\vec{v} = R\omega t.\vec{u}_\varphi\\ &\vec{a} = \dot{\vec{v}} = R\omega.\vec{u}_\varphi + R\omega t.\dot{\vec{u}}_\varphi\\ &\dot{\vec{u}}_\phi = -\dot{\varphi}.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right]\end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{a} = R\omega.\vec{u}_\varphi + R\omega t.\left(-\dot{\varphi}.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right]\right)$$

$$\vec{a} = -\dot{\varphi}.R\omega t\sin\theta.\vec{u}_r R\omega.\vec{u}_\varphi - \dot{\varphi}.R\omega t\cos\theta.\vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -R\omega^2 t^2.\vec{u}_r - \sqrt{3}.R\omega^2 t^2.\vec{u}_\theta + R\omega.\vec{u}_\varphi}$$

b/ Module du vecteur vitesse : $\boxed{v = R\omega t}$

Module du vecteur accélération :

$$a = \sqrt{\left(-R\omega^2 t^2\right)^2 + \left(\sqrt{3}.R\omega^2 t^2\right)^2 + \left(R\omega\right)^2}$$

$$\boxed{a = R\omega\sqrt{4\omega^2 t^4 + 1}}$$

c/ L'accélération tangentielle :

$$\left.\begin{aligned}&a_N^2 = a^2 - a_T^2\\ &a_T = \frac{dv}{dt} = R\omega\\ &a^2 = R^2\omega^2\left[4\omega^2 t^4 + 1\right]\end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{a_N = 2R\omega^2 t^2}$$

2/ En coordonnées cartésiennes le vecteur position est:

$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

$$\left.\begin{aligned}&x = R\sin\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}R\cos\omega t\\ &y = R\sin\theta\sin\varphi = \frac{1}{2}R\sin\omega t\\ &z = R\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}R\end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \frac{1}{2}R\cos\omega t^2.\vec{i} + \frac{1}{2}R\sin\omega^2 t.\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}R.\vec{k}}$$

a/ Les vecteurs vitesse et accélération dans la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ sont **:**

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -R\omega t\sin\omega t^2.\vec{i} + R\omega t\cos\omega t^2.\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \left[-R\omega\sin\omega t^2 - 2R\omega^2 t^2\cos\omega t^2\right].\vec{i} + \left[R\omega\cos\omega t^2 - 2R\omega^2 t^2\sin\omega t^2\right].\vec{j}}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

Les modules de la vitesse et de l'accélération sont :

$$\boxed{v = R\omega t} \quad ; \quad \boxed{a = R\omega\sqrt{\left[1 + 4\omega^2 t^4\right]}}$$

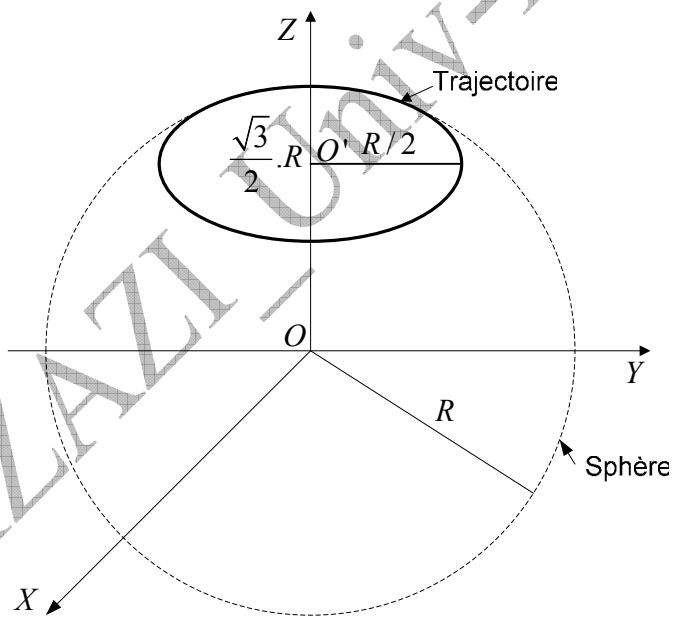
Les deux modules de la vitesse et de l'accélération sont compatibles avec le résultat de la question 1/b

3/ Trajectoire du point mobile :

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \frac{1}{4}R^2}$$

Nous en concluons que ce point matériel $M$ décrit un cercle de rayon $\frac{R}{2}$ et de centre $\left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}R\right)$. Quant au vecteur position, il décrit un cône de sommet $O$ et dont le bord est le cercle décrit.

4/ Nature du mouvement du point $M$ : la trajectoire est un cercle, le module de la vitesse est constant et l'accélération tangentielle est constante, donc le mouvement est circulaire uniformément accéléré.




A.FIZAZI Univ-BECHAR

# E-IV/ MOUVEMENT RELATIF
# الحركة النسبية

## 1/ CHANGEMENT DE REPERE :

❖ **Introduction :** Nous avons dit précédemment que l'état de mouvement ou de repos sont deux notions essentiellement relatives ; cela veut dire que chacun des deux états dépend de la position du mobile vis-à-vis du corps pris comme référentiel.

Nous avons rapportés, tous les mouvements que nous avons étudiés jusqu'à présent, à un repère galiléen, c'est-à-dire au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.

Dans ce qui suit nous allons répondre principalement aux questions suivantes :

Lorsque deux mobiles sont liés à un même repère, quelle est la vitesse de l'un par rapport à l'autre ?

Quand est-il lorsque deux observateurs liés à deux repères différents qui sont en mouvement l'un par rapport à l'autre ?

La position, la trajectoire, la vitesse et l'accélération du même mobile varient selon le repère choisi par l'observateur.

**Exemple :** Soit un point matériel collé sur la jante d'une roue de bicyclette :

- Par rapport à un repère terrestre : le mouvement n'est pas uniforme et la trajectoire est une suite de courbes appelées cycloïdes.
- Par rapport à un repère lié à l'axe de la roue : le mouvement est uniforme et la trajectoire est circulaire.

Il est très intéressant de connaître comment sont reliées les observations enregistrées par deux observateurs liés à deux repères différents, l'un en mouvement par rapport à l'autre.

## 1/ VITESSE RELATIVE DE DEUX MOBILES :

Soient $A$ et $B$, deux points matériels en mouvement dans le repère $OXYZ$. On suppose la présence d'un observateur au point $O$. Figure 4.16.

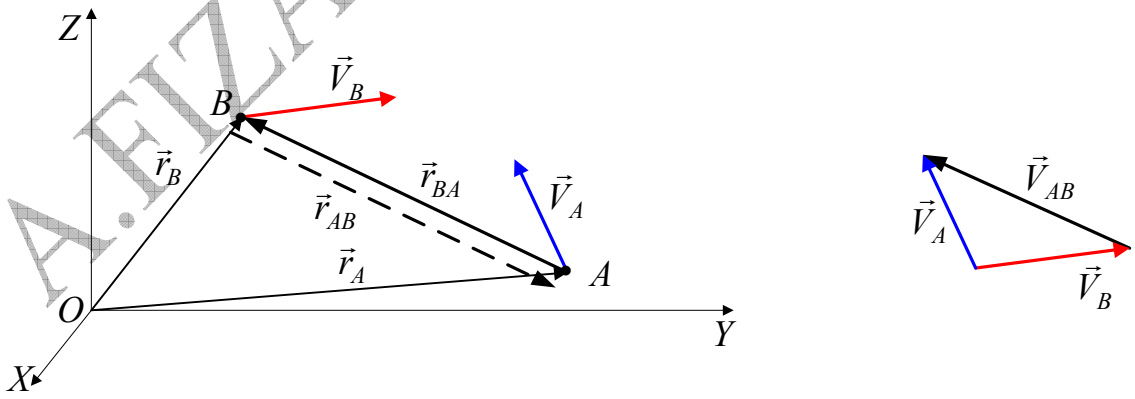



**Fig 4.16: vitesse relative de deux mobiles**

La vitesse de $A$ par rapport à l'observateur $O$ est $\overrightarrow{V_A} = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt}$.

Nous définissons sa vitesse par rapport à $B$ comme étant $\vec{V}_{AB} = \dfrac{d\vec{r}_{AB}}{dt}$, tel que :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\vec{r}_{AB} = \overrightarrow{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B .$$

D'où :

$$\vec{V}_{AB} = \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} - \frac{d\vec{r}_B}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B} \qquad \textbf{(4.52)}$$

La vitesse de $B$ par rapport à l'observateur $O$ est $\overrightarrow{V_B} = \frac{d\vec{r}_B}{dt}$.

Nous définissons sa vitesse par rapport à $A$ comme étant $\vec{V}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$, tel que :

$$\vec{r}_{BA} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

D'où :

$$\vec{V}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A} \qquad \textbf{(4.53)}$$

Remarquons que $\vec{V}_{AB} = -\vec{V}_{BA}$, c'est-à-dire que la vitesse de $A$ par rapport à $B$ est égale à la vitesse de $B$ par rapport à $A$, mais les deux vitesses sont de sens opposés .

On obtient les deux accélérations relatives des deux points matériels mobiles en dérivant, par rapport au temps, chacune des deux expressions des vitesses relatives posées précédemment :

$$\vec{a}_{AB} = \frac{d\vec{V}_{AB}}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} - \frac{d\vec{V}_B}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{AB} = \vec{a}_A - \vec{a}_B} \qquad \textbf{(4.54)}$$

$$\vec{a}_{BA} = \frac{d\vec{V}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{V}_B}{dt} - \frac{d\vec{V}_A}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A} \qquad \textbf{(4.55)}$$

Là aussi, il faut remarquer que $\vec{a}_{AB} = -\vec{a}_{BA}$, c'est-à-dire que les deux accélérations sont égales mais de sens contraires.

**Exemple 4.11 :**

1/ Deux voitures $A$ et $B$ roulent dans deux voies d'une autoroute rectiligne avec les vitesses respectives $110 km.h^{-1}$ et $90 km.h^{-1}$. Déterminer le vecteur vitesse relative de $A$ par rapport à $B$ dans les deux cas suivants :

a/ les deux voitures roulent dans la même direction,

b/ les deux voitures roulent en sens inverses.

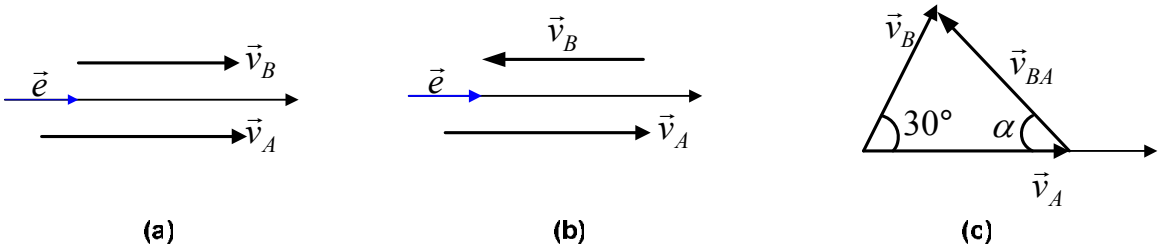
2/ Les deux voitures roulent maintenant sur deux routes qui se coupent formant entre elles un angle de $30°$. Déterminer le vecteur vitesse relative de $B$ par rapport à $A$.

**Réponse :**

1/ a/ La vitesse de la voiture $A$ par rapport à la voiture $B$ est : $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$. En considérant $\vec{e}$ comme vecteur unitaire ; les deux vitesses sont parallèles et sont de même sens que $\vec{e}$ (figure 4.17-a-).

Donc : $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 110\vec{e} - 90\vec{e} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{AB} = 20\vec{e} \Rightarrow v_{AB} = 20 km.h^{-1}}$

A.FIZAZI Univ-BECHAR




(a) (b) (c)

Fig 4.17

b/ Dans ce cas les vitesses sont parallèles mais de sens contraires (figure 4.17-b-) :

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 110\vec{e} - (-90\vec{e}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{AB} = 200\vec{e} \Rightarrow v_{AB} = 200 km.h^{-1}}$$

2/ Vitesse relative de $B$ par rapport à $A$ lorsque les deux routes se coupent (voir figure 4.17-c-) :

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \Rightarrow v_{BA} = \left(v_B^2 + v_A^2 - 2v_A v_B \cos 30°\right)^{1/2}$$

$$v_{AB} = \left(110^2 + 90^2 - 2.110.90.0,87\right)^{1/2}, \quad \boxed{v_{AB} = 54,5 km.h^{-1}}$$

Pour déterminer la direction du vecteur vitesse relative $\vec{v}_{AB}$ il suffit de calculer l'angle $\alpha$ en appliquant la loi des sinus :

$$\frac{v_{BA}}{\sin 30°} = \frac{v_B}{\sin \alpha} \Rightarrow \boxed{\sin \alpha = \frac{v_B}{v_{BA}} \sin 30°} \quad \sin \alpha = \frac{90}{54,5}.0,5 \simeq 0,82 \Rightarrow \boxed{\alpha = 55,1°}$$

Cela veut dire que le passager à bord de la voiture $A$ voit la voiture $B$ rouler à sa gauche sous un angle de $55,1°$ (d'après la figure 4.17—c-) et à la vitesse de $54,5 km.h^{-1}$. Quant au passager à bord de la voiture $B$, il voit la voiture $A$ rouler à sa droite avec la vitesse de $54,5 km.h^{-1}$, mais sous un angle de $180 - (30° + 55,1°) = 94,9°$.

Nous venons de voir comment calculer la vitesse d'un mobile par rapport à un autre mobile, les deux mobiles étant liés au même repère. Mais quand est-il lorsque deux observateurs sont liés à deux repères différents, l'un en mouvement par rapport à l'autre ? Nous allons essayer de répondre, dans ce qui suit, à cette question.

## 3/ CONVENTIONS ET SYMBOLES :

Considérons les deux repères $(Ra)$, $(Rr)$ et deux observateurs chacun d'eux étant lié à l'un des deux repères. Figure 4.18.

$Ra$ : Repère absolu (معلم المطلق) que nous considérons fixe.

$R$ : Repère relatif(المعلم النسبي) en mouvement par rapport à $Ra$.

$M$ : Point matériel en mouvement par rapport aux deux repères.

A.FIZAZI Univ-BECHAR

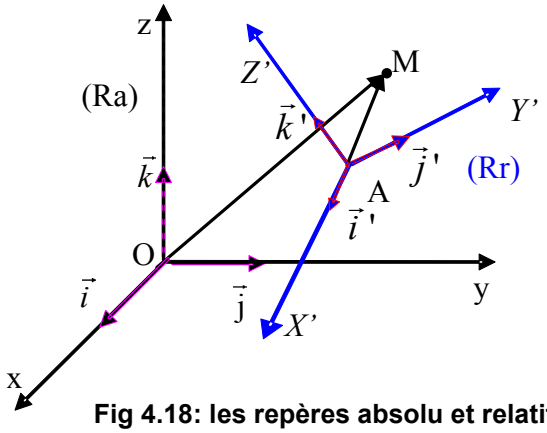



**Fig 4.18: les repères absolu et relatif**

Chaque observateur enregistre ses observations. Nous consignons dans le tableau suivant ces résultats :

| Observateur | Dans le repère $(Ra)$<br>$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ invariants dans $Ra$ | Dans le repère $(Rr)$<br>$\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'$ Variables prp à $Ra$ |
|---|---|---|
| Position | $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ | $\vec{r}' = \overrightarrow{AM}$ |
| La vitesse | $\vec{v}_a = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ | $\vec{v}_r = \dfrac{d\vec{r}'}{dt}$ |
| L'accélération | $\vec{a}_a = \dfrac{d\vec{v}_a}{dt}$ | $\vec{a}_r = \dfrac{d\vec{v}_r}{dt}$ |

**Remarque importante :** Nous avons supposé dans notre étude précédente que $t = t'$, c'est-à-dire que les deux observateurs utilisent le même temps ; cela veut dire que le temps ne dépend pas du mouvement. Cela paraît tout à fait raisonnable, mais l'expérience peut prouver le contraire. Cette supposition ne peut être acceptable que dans le cas des petites vitesses par rapport à la célérité de la lumière, et c'est cela que nous considérerons dans tout ce qui suit.

❖ **Relation entre les positions :**

Sur la figure 4.18, on peut voir :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}} \qquad \textbf{(4.56)}$$

$$\underbrace{x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}}_{\overrightarrow{OM}} = \underbrace{(x_A.\vec{i} + y_A.\vec{j} + z_A.\vec{k})}_{\overrightarrow{OA}} + \underbrace{\left(x'.\vec{i}' + y'.\vec{j}' + z'.\vec{k}'\right)}_{\overrightarrow{AM}}$$

❖ **Relation entre les vitesses :**

En dérivant la relation (56.4) par rapport au temps, on obtient la relation entre les différentes vitesses :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} + \vec{i}'\frac{dx'}{dt} + \vec{j}'\frac{dy'}{dt} + \vec{k}'\frac{dz'}{dt}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}}_{\vec{v}_e} + \underbrace{\vec{i}'\frac{dx'}{dt} + \vec{j}'\frac{dy'}{dt} + \vec{k}'\frac{dz'}{dt}}_{\vec{v}_r} \qquad \textbf{(4.57)}$$

$\vec{v}_a$ : La vitesse absolue ( **السرعة المطلقة** ) : c'est la vitesse de $M$ par rapport au repère $(Ra)$ .

$\vec{v}_e$ : Vitesse d'entraînement (**سرعة الجر**) : c'est la vitesse du repère mobile $(Rr)$ par rapport au repère absolu fixe $(Ra)$, qu'on peut considérer aussi comme étant la vitesse absolue $\vec{v}_a$ du mobile $M$ dans $(Ra)$ si les coordonnées de $M$ dans $(Rr)$ sont constantes, c'est-à-dire si $M$ est fixe par rapport à $(Rr)$ : $\vec{v}_r = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_e = \vec{v}_a$

$\vec{v}$ : Vitesse relative ( **السرعة النسبية** ), c'est la vitesse du point $M$ par rapport au repère $(Rr)$. Nous pouvons la considérer comme étant la vitesse absolue $\vec{v}_a$ du mobile $M$ dans $(Ra)$ si le repère $(Rr)$ est fixe par rapport au repère $(Ra)$ : $\vec{v}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_a$

La relation qui lie les trois vitesses et qu'on appelle **loi de composition des vitesses** est :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \qquad \textbf{(4.58)}$$

Le vecteur de la vitesse absolue est égal à la somme des vecteurs de la vitesse d'entraînement et celui de la vitesse relative.

**Remarques :**

- Si $(Ra)$ et $(Rr)$ sont fixes l'un par rapport à l'autre $(\vec{v}_e = \vec{0})$, alors les deux observateurs enregistrent les mêmes vitesses, donc les mêmes trajectoires bien que les vecteurs position soient différents $(\overrightarrow{OM} \neq \overrightarrow{OA})$.
- Si $(Rr)$ est en mouvement de translation (quel soit uniforme ou non) par rapport au repère $(Ra)$ tels que $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ soient constants, alors $\vec{v}_e$ est indépendante de $M$ .

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \frac{d\vec{j}'}{dt} = \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}$$

❖ **Relation entre les accélérations :**

En ordonnant après avoir dérivé par rapport au temps l'expression (4.57) on obtient la relation entre les différentes accélérations par rapport aux deux repères :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\vec{a}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right] \rightarrow \vec{a}_e$$
$$+\left[\vec{i}'\frac{d^2x'}{dt^2} + \vec{j}'\frac{d^2y'}{dt^2} + \vec{k}'\frac{d^2z'}{dt^2}\right] \rightarrow \vec{a}_r \qquad \textbf{(4.59)}$$
$$+2\left[\frac{dx'.d\vec{i}'}{dt^2} + \frac{dy'.d\vec{j}'}{dt^2} + \frac{dz'.d\vec{k}'}{dt^2}\right] \rightarrow \vec{a}_C$$

$\vec{a}_a$ : accélération absolue (التسارع المطلق) : c'est l'accélération de $M$ par rapport au repère $(Ra)$ .

$\vec{a}$ : accélération relative(التسارع النسبي) : c'est l'accélération de $M$ par rapport au repère $(Rr)$.

$\vec{a}_e$ : accélération d'entraînement(تسارع الجر) : c'est l'accélération du repère $(Rr)$ par rapport au repère $(Ra)$ .

$\vec{a}_C$ : accélération de Coriolis(تسارع كوريوليس) : c'est une accélération complémentaire appelée **accélération de Coriolis** en mémoire à son auteur (Gaspard Coriolis 1792-1843) qui l'a établie en 1832.

**L'accélération de Coriolis s'annule dans les cas suivants :**

- Si $M$ est fixe par rapport au repère $(Rr)$ : $\frac{dx'}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dz'}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_C = \vec{0}$
- Si le repère $(Rr)$ est en translation (même variée) par rapport au repère $(Ra)$ :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} \\ \frac{d\vec{i}'}{dt} = \frac{d\vec{j}'}{dt} = \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_c = \vec{0} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$$

**Exemple 4.12** : Des flocons de neige tombent verticalement avec une vitesse de $8ms^{-1}$ . Avec quelle vitesse ces flocons frappent-ils le pare-brise d'une voiture roulant avec une vitesse de $50km.h^{-1}$ .

**Réponse :**

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$\vec{v}_e$ :Vitesse de la voiture par rapport au sol, c'est à dire la vitesse d'entraînement.
$\vec{v}_a$ :Vitesse des flocons par rapport au sol, c'est à dire la vitesse absolue.
$\vec{v}$ :Vitesse des flocons par rapport à la voiture, c'est à dire la vitesse relative.
Sur la figure 4.19 on peut voir:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e \quad ; \quad \vec{v}_r = \vec{v}_a + \left(-\vec{v}_e\right)$$

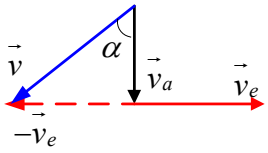


Fig 4.19

Transformons la vitesse de la voiture: $50km.h^{-1} = 13,9ms^{-1}$
Passons à l'application numérique: $\boxed{v_r = \left(v_a^2 + v_e^2\right)^{1/2}}$ $\boxed{v_r = 16ms^{-1}}$

Pour déterminer la direction du vecteur de la vitesse relative on doit calculer la tangente de l'angle $\alpha$

$$tg\alpha = \frac{v_e}{v_a} = 1,74 \Rightarrow \boxed{\alpha = 60,1°}$$

Cela veut dire que les flocons de neige tombent avec la vitesse de $16ms^{-1}$ sous un angle de

$$\alpha = 60,1°$$

**Exemple 4.13** : Un bateau prend la mer en direction du Nord $60°$ Ouest $\left(N60°O\right)$ à la vitesse de $4km.h^{-1}$ par rapport à l'eau. La direction du courant d'eau est tel que le mouvement résultant par rapport à la terre s'effectue dans la direction de l' Ouest à la vitesse de $5km.h^{-1}$. Calculer la vitesse et la direction du courant d'eau par rapport au sol.

**Réponse :** La première des choses à faire est de dessiner la figure 4.20. Sans dessin rien ne peut être tenté pour résoudre l'exercice.

Si l'énoncé a été bien compris, il faut calculer le module et la direction du vecteur de la vitesse d'entraînement.

$\vec{v}_a$ : La vitesse absolue, c'est-à-dire la vitesse du bateau par rapport au sol.
$\vec{v}_e$ : la vitesse d'entraînement, c'est-à-dire la vitesse du courant d'eau par rapport au sol.
$\vec{v}$ : la vitesse relative, c'est-à-dire la vitesse du bateau par rapport à l'eau de mer.

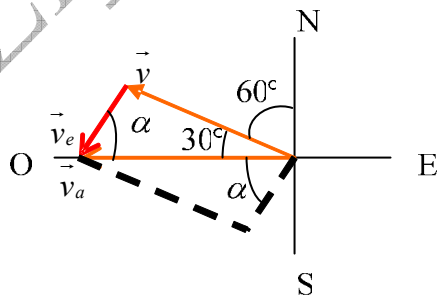


Fig 4.20

Partant de la figure 4.20 et de la loi de composition des vitesses, nous pouvons écrire :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r$$

$$\boxed{v_e = \left[v_a{}^2 + v_r{}^2 - 2v_a.v_r.\cos 30°\right]^{1/2}}$$

Application numérique : $\boxed{v_e = 2,52km.h^{-1}}$

Pour déterminer la direction de $\vec{v}_e$ il est nécessaire de calculer l'angle $\alpha$ en faisant appel à la loi des sinus :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\frac{v_r}{\sin\alpha}=\frac{v_e}{\sin 30°}\Rightarrow \boxed{\sin\alpha=\frac{v_r}{v_e}.\sin\alpha} \;;\; \sin\alpha=0,4\Rightarrow \boxed{\alpha=23,6°}$$

Cela veut dire que la direction du vecteur de la vitesse de l'eau de mer par rapport à le sol fait un angle de $23,6°$ avec l'axe Ouest Est vers le Sud soit $O23.6°S$ .

## 4/ CAS DU MOUVEMENT DE ROTATION:

### ❖ Relation entre les vitesses :

Nous pouvons considérer la vitesse angulaire comme étant une **grandeur vectorielle,** telle que sa direction soit orthogonale au plan du mouvement et dont le sens est défini par la règle de la main droite ( ou toute autre règle correspondante) qui indique le sens du vecteur résultant du produit vectoriel.

D'après la figure 4.21 nous pouvons écrire :

$$R=r.\sin\alpha$$

Sachant que $v=\omega.R$

Donc $v=\omega R\sin\alpha$

Dés lors nous pouvons écrire :

$$\boxed{\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{r}\Leftrightarrow v=\omega.r.\sin\alpha} \qquad \textbf{(4.60)}$$

Il est donc justifié d'écrire : $\vec{\omega}=\frac{d\theta}{dt}.\vec{k}$

Sur la figure (4.22), considérons deux observateurs : l'observateur $O$ lié au repère $R$ et l'observateur $O'$ lié au repère $R'$ . Les deux observateurs sont en mouvement de rotation, sans translation, l'un par rapport à l'autre.

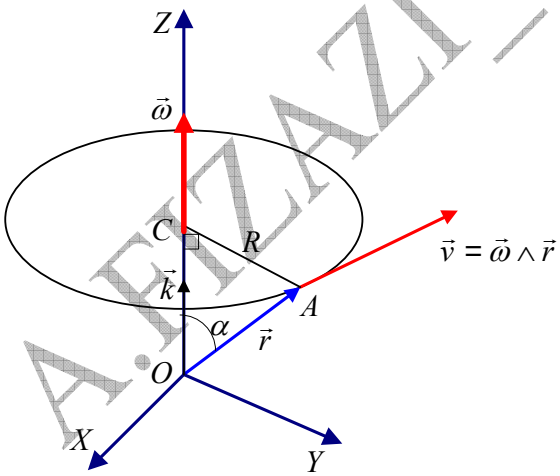



**Fig 4.21: Le vecteur de la vitesse de rotation**

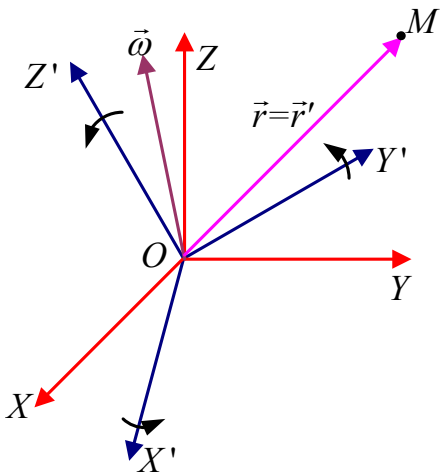



**Fig 4.22: Deux référentiels en mouvement de rotation uniforme relatif**

Chaque observateur voit le repère de l'autre observateur tourner avec une vitesse angulaire $\omega$ .

Pour l'observateur $O$ lié au repère $OXYZ$ , la vitesse du point matériel $M$ est la dérivée de l'expression du vecteur position :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\boxed{\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_a = \frac{dx}{dt}.\vec{i} + \frac{dy}{dt}.\vec{j} + \frac{dz}{dt}.\vec{k}} \qquad \textbf{(4.61)}$$

Pour l'observateur $O'$ lié au repère $OX'Y'Z'$ (remarquez que les deux repères ont la même origine, c'est-à-dire $O'$ confondu avec $O$ ), la vitesse du point matériel $M$ est la dérivée de son vecteur position, soit :

$$\boxed{\vec{r}' = \vec{r} = x'.\vec{i}' + y'.\vec{j}' + z'.\vec{k}' \Rightarrow \vec{v}_r = \frac{dx'}{dt}.\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}.\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}.\vec{k}'} \qquad \textbf{(4.62)}$$

Pour l'observateur $O$, le repère $OX'Y'Z'$ tourne, donc les vecteurs unitaires $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ changent de direction à chaque instant. Cet observateur écrit donc par rapport au repère $R'$ :

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx'}{dt}.\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}.\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}.\vec{k}' + x'.\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'.\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'.\frac{d\vec{k}'}{dt}} \qquad \textbf{(4.63)}$$

D'autre part les extrémités des vecteurs unitaires $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ effectuent un mouvement circulaire uniforme par rapport à l'observateur $O$ avec une vitesse angulaire $\omega$ . En d'autre terme le rapport $\frac{d\vec{i}'}{dt}$ représente la vitesse d'un point situé à une distance égale à l'unité de $O$ et se déplace avec un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire $\omega$ .

Par analogie avec l'équation(60.4) , nous pouvons écrire :

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}' \quad ; \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}' \quad ; \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}'$$

De l'équation(63.4) nous pouvons écrire :

$$x'.\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'.\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'.\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge x'.\vec{i}' + \vec{\omega} \wedge y'.\vec{j}' + \vec{\omega} \wedge z'.\vec{k}'$$

$$x'.\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'.\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'.\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge (x'.\vec{i}' + y'.\vec{j}' + z'.\vec{k}')$$

$$\boxed{x'.\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'.\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'.\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}} \qquad (4.64)$$

En remplaçant dans l'équation(63.4) , nous obtenons :

$$\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{r}} \qquad \textbf{(4.65)}$$

Cette dernière expression exprime la relation entre les vitesses du point $M$ , mesurées par les deux observateurs qui sont en mouvement relatif de rotation.

- **La vitesse de rotation instantanée :**

Nous avons vu que $\vec{\omega} = \omega.\vec{k}$ . Si $\vec{\omega}$ est variable avec le temps, alors $\vec{\omega}(t) = \omega(t).\vec{k}$ représente la vitesse de rotation instantanée. Pour discerner la vitesse angulaire constante dans le mouvement circulaire uniforme de la vitesse de rotation instantanée, on note cette dernière conventionnellement par $\vec{\Omega}(t)$ .

A.FIZAZI Univ-BECHAR

❖ **Relation entre les accélérations :**

Pour arriver à la relation qui entre les différentes accélérations nous allons suivre la même méthode que celle des vitesses.

L'accélération du mobile $M$ mesurée par l'observateur $O$ par rapport au repère $OXYZ$ est :

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \vec{i}.\frac{dv_x}{dt} + \vec{j}.\frac{dv_y}{dt} + \vec{k}.\frac{dv_z}{dt}$$

L'accélération du mobile $M$ mesurée par l'observateur $O'$ par rapport au repère $OX'Y'Z'$, sans considérer la rotation, est :

$$\vec{a}_r = \vec{i}'.\frac{dv_x'}{dt} + \vec{j}'.\frac{dv_y'}{dt} + \vec{k}'.\frac{dv_z'}{dt}$$

En dérivant l'expression 4.65, en rappelant que $\vec{\omega}$ est considérée constante, nous obtenons :

$$\boxed{\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}} \qquad \textbf{(4.66)}$$

Puisque : $\vec{v}_r = \vec{v}' = \vec{i}'.v_x' + \vec{j}'.v_y' + \vec{k}'.v_z'$

Donc : $\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{i}'.\frac{dv_x'}{dt} + \vec{j}'.\frac{dv_y'}{dt} + \vec{k}'.\frac{dv_z'}{dt} + v_x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + v_y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + v_z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$

De la même façon que nous avons obtenu l'équation 4.64 , nous arrivons à :

$$\vec{i}'.\frac{dv_x'}{dt} + \vec{j}'.\frac{dv_y'}{dt} + \vec{k}'.\frac{dv_z'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

Nous avons aussi : $v_x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + v_y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + v_z'\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{a}$

D'où :

$$\boxed{\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{v}'} \qquad \textbf{(4.67)}$$

De même :

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{v}} \qquad \textbf{(4.68)}$$

Tel que :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_a = \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)$$

$$\boxed{\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)} \qquad \textbf{(4.69)}$$

Par substitution des résultas 4.67 et 4.68 dans l'équation 4.69 on obtient en fin de compte l'équation 4.70 qui nous donne la relation entre les différentes accélérations du mobile $M$ mesurées par les deux observateurs $O$ et $O'$, lesquels sont en mouvement relatif de rotation **uniforme**.

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)} \qquad \textbf{(4.70)}$$

Le terme $2\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ s'appelle accélération de Coriolis, et le terme $\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)$ représente une accélération centripète.

Ces deux accélérations ( Coriolis et centripète) résultent du mouvement relatif de **rotation** des deux observateurs.

Ces deux accélérations se manifestent au cours du mouvement de rotation des vents et des cyclones (photo4.1), et même dans l'eau qui est absorbée par le siphon du lavabo par exemple. Le mouvement de rotation apparaît clairement, son sens varie selon la région du globe terrestre où a lieu l'événement. Dans l'hémisphère nord la rotation s'effectue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, par contre dans l'hémisphère sud le sens de la rotation se fait dans le sens des aiguilles d'une montre. Figure 4.23

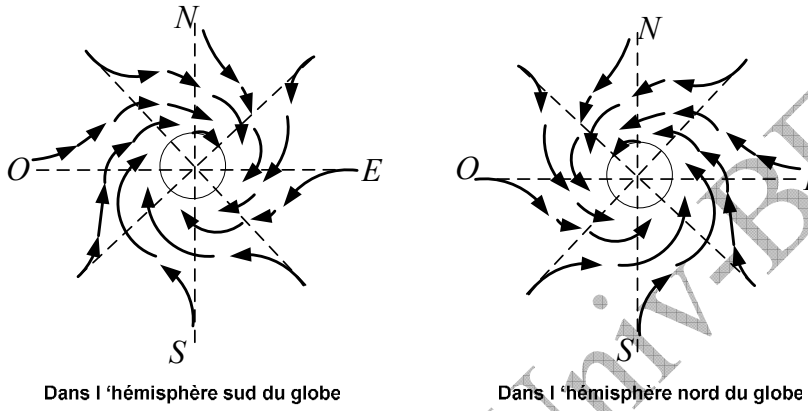



Fig 4.23: Sens de rotation d'un cyclone ou d'une tornade

Photo 4.1

Nous clôturons ce chapitre en signalant le cas du **mouvement de rotation non uniforme.**

En revenant à l'expression 4.59, l'accélération d'entraînement est :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}$$

En posant $\overrightarrow{OA} = \vec{r}\,'$ nous pouvons écrire :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left[\underbrace{x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt^2}}_{\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'}\right] = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\,'\right)$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \underbrace{\frac{d\vec{r}\,'}{dt}}_{\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'} \wedge \vec{\omega}$$

$$\boxed{\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}\,' + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\,'\right)} \qquad \textbf{(4.71)}$$

Observons que l'accélération d'entraînement renferme trois termes :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}$ : accélération du mouvement de translation de l'origine $A$ du référentiel $(Rr)$ par rapport au repère absolu $(Ra)$ ,

$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}'$ : accélération résultant de la non uniformité de la rotation de $(Rr)$ par rapport au référentiel $(Ra)$ , c'est-à-dire résultant de l'accélération angulaire du référentiel $(Rr)$ ,

$\vec{\omega}\wedge\vec{r}'$ : accélération centripète dirigée vers l'axe de rotation.

**CONCLUSION : en introduisant le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ les deux lois de composition des vitesses et des accélérations, dans le cas général, prennent les formes respectives :**

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \Leftrightarrow \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}}_{\vec{v}_r} + \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AM}\right)}_{\vec{v}_e} \qquad \textbf{(4.72)}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e$$

$$\underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}_{\vec{a}_a} = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{AM}}{dt^2}}_{\vec{a}_r} + \underbrace{2.\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r}_{\vec{a}_c} + \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{AM}+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\right)}_{\vec{a}_e} \qquad \textbf{(4.73)}$$

A.FIZAZI _ Univ-BECHAR

# EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

**Exercice 4.28**

En roulant sous la pluie à $100km.h^{-1}$ sur une route plane, un conducteur remarque que les gouttes de pluie ont, vues à travers les vitres latérales de sa voiture, des trajectoires qui font un angle de $80°$ avec la verticale. Ayant arrêté sa voiture, il remarque que la pluie tombe en fait verticalement. Calculer la vitesse de la pluie par rapport à la voiture immobile et par rapport à la voiture se déplaçant à $100km.h^{-1}$

**تمرين 28.4**

و هو يسير بـــ $100km.h^{-1}$ على طريق مستو ، لاحظ السائق أن لقطرات المطر، حسب ما يراه عبر الزجاج العرضي لسيارته، مسارات تصنع الزاوية $80°$ مع الشاقول. لما أوقف سيارته رأى أن المطر يسقط شاقوليا. أحسب سرعة المطر بالنسبة للسيارة متوقفة و بالنسبة للسارة و هي تسير بـــ $100km.h^{-1}$.

**Exercice 4.29**

On laisse tomber d'un immeuble de hauteur $h$ une bille sans vitesse initiale. La chute de celle-ci s'effectue à la verticale selon un mouvement uniformément accéléré d'accélération $g$.

1/ Quelle est la trajectoire de la bille dans un référentiel lié à une voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\vec{v}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher ?

2/ Quelle est la trajectoire de la bille dans le même référentiel si on admet que la voiture entame au moment du lâcher et à partir de la verticale de chute un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\vec{a}_e$ ?

(représenter dans chaque cas la trajectoire demandée).

**تمرين 29.4**

من أعلى بناية ارتفاعها $h$ نترك كرية تسقط بدون سرعة ابتدائية. سقوطها يجري وفق الشاقول بحركة متسارعة بانتظام بتسارع $g$.

1/ ما هو مسار الكرية في مرجع مرتبط بسيارة تسير بحركة مستقيمة منتظمة بسرعة $\vec{v}$ و تمرّ بشاقول السقوط لحظة ترك الكرية؟

2/ ما هو مسار الكرية في نفس المرجع المذكور إذا افترضنا أن السيارة، لحظة ترك الكرية تسقط، تنطلق بحركة مستقيمة متسارعة بانتظام بتسارع $\vec{a}_e$ ؟

(مثل في كل حالة المسار المطلوب).

**Exercice 4.30**

On considère dans le repère fixe $OXY$ le système de deux axes $Oxy$ mobiles tel que l'axe $Ox$ forme l'angle $\theta$ avec l'axe $OX$. Un point matériel $M$ se déplace sur l'axe $Ox$ , sa position est définie par $r = OM$. Calculer :

1/ la vitesse et l'accélération relatives du point,

2/ la vitesse et l'accélération d'entraînement,

3/ l'accélération coriolis.

4/ En déduire la vitesse et l'accélération du point $M$ dans les coordonnées polaires.

**تمرين 30.4**

نعتبر في المستوي الثابت $OXY$ جملة محورين $Oxy$ متحركين حيث يشكل المحور $Ox$ زاوية $\theta$ مع المحور $OX$. تتحرك نقطة مادية $M$ على المحور $Ox$ و هي معرّفة بـــ $r = OM$. أحسب:

1/ السرعة و التسارع النسبيين للنقطة $M$ ،

2/ سرعة و تسارع الجرّ،

3/ تسارع كوريوليس،

4/ إستنتج السرعة و التسارع المطلقين لـــ $M$ بالإحداثيات القطبية.

**Exercice 4.31**

Dans le plan $XOY$ , une droite $OX'$ tourne autour de l'axe $OZ$ avec une vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ constante. Un mobile $M\,(OM = r)$ se déplace sur la droite $OX'$ d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $a$. A l'instant initial $M$ se trouve en $M_0$ , au repos, puis s'éloigne de $O$.

1/Déterminer les expressions littérales vectorielles

**تمرين 31.4**

في المستوى $XOY$ ، يدور مستقيم $OX'$ حول المحور $OZ$ بسرعة زاوية ثابتة $\omega = \dot{\theta}$. ينتقل متحرك $M\,(OM = r)$ على المستقيم $OX'$ بحركة مستقيمة متغيرة بانتظام بتسارع $a$. في اللحظة الابتدائية $M$ يوجد في $M_0$ ، في حالة سكون، ثم يبتعد عن $O$.

1/ عيّن العبارات الحرفية الشعاعية للسرعات النسبية،

الجر و المطلقة لـــ $M$ .

عيّن العبارات الحرفية التي تعطي معيار(الشدة) و جهة شعاع السرعة المطلقة للنقطة $M$ .

2/ إذا كان المحور $OX'$ منطبق على المحور $OX$ في اللحظة الإبتدائية، أحسب إحداثيات النقطة $M$ في اللحظة $t = 3s$ .

أرسم أشعة السرعة الثلاثة في هذه اللحظة $M$ .

3/ عيّن العبارات الحرفية الشعاعية في قاعدة للإحداثيات القطبية للتسارعات النسبية، الجر و كوريوليس لـــ $M$ .

عيّن العبارات الحرفية التي تعطي معيار(الشدة) و جهة شعاع التسارع المطلق للنقطة $M$ .

أرسم أشعة التسارعات هذه في $M$ .

المعطيات: $OM_0 = 1cm$ ، $a = 2cm.s^{-2}$ ،

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{\pi}{5} rad.s^{-1}$$

des vitesses relative, d'entraînement et absolue de $M$ .

Déterminer les expressions littérales donnant la norme et la direction du vecteur vitesse absolue du point $M$ .

2/ Si l'axe $OX'$ est confondu avec l'axe $OX$ à l'instant initial, calculer les coordonnées du point $M$ à la date $t = 3s$ . Dessiner les trois vecteurs vitesses à cette date.

3/ Déterminer les expressions littérales vectorielles dans une base polaire des accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis de $M$ .

Déterminer les expressions littérales donnant la norme et la direction du vecteur accélération absolue du point $M$ .

Dessiner ces vecteurs accélérations à t =3s.

Données: $OM_0 = 1cm$ ; $a = 2cm.s^{-2}$ ;

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{\pi}{5} rad.s^{-1} .$$

## تمرين 32.4

في المستوي $XOY$ يتدحرج ( يدور بدون انزلاق) قرص دائري نصف قطره $R$ و مركزه $A$ على المحور $OX$ بسرعة زاوية ثابتة $\omega$ . في البداية $t = 0$ ، تنطبق نقطة $M$ من محيط القرص مع المبدإ $O$ .

1/ ما هي إحداثيتي النقطة $M$ في اللحظة $t$ بدلالة $\omega, R$ و $t$ ؟ إستنتج طبيعة المسار؟

2/ أحسب السرعة المطلقة و السرعة النسبية و وضح جهتيهما بالنسبة للمحور $OX$ .

3/ انطلاقا من عبارتي شعاعي السرعة المطلقة و النسبية تأكد من طويلة و جهة سرعة الجر.

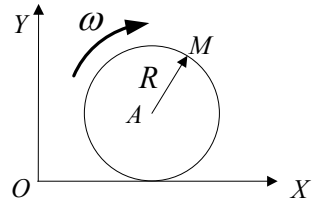
## Exercice 4.32

Un disque circulaire de centre $A$ et de rayon $R$ roule sans glisser sur l'axe $OX$ avec une vitesse angulaire $\omega$ constante. Au départ $t = 0$ , un point $M$ de la circonférence coïncide avec l'origine $O$ .

1/ Quelles sont les coordonnées du point $M$ au temps $t$ en fonction de $\omega, R$ et $t$ ? En déduire la nature de la trajectoire.

2/ Calculer la vitesse absolue et la vitesse relative en précisant leurs directions par rapport à l'axe $OX$ .

3/ A partir des expression des vecteurs de la vitesse absolue et la vitesse relative, vérifier la norme et la direction du vecteur vitesse d'entraînement.




## تمرين 33.4

في مستوي $XOY$ ، يدور مستقيم حول $OZ$ بسرعة ثابتة $\omega = \dot{\theta}$ .

تتنقل نقطة $M\left(OM = r\right)$ متحركة على المستقيم $OX'$ وفق القانون:

$$r = r_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right) \text{ مع } r_0 = cte$$

1/ حدّد في اللحظة $t$ بدلالة $_0$ و $\omega$ ، السرعة النسبية

## Exercice 4.33

Dans le plan $XOY$ , une droite tourne autour de $OZ$ avec une vitesse constante $\omega = \dot{\theta}$ .

Un point mobile $M\left(OM = r\right)$ se déplace sur la droite $OX'$ suivant la loi :

$$r = r_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right) \text{ avec } r_0 = cte .$$

1/ Déterminer à l'instant $t$ en fonction de $_0$ et $\omega$ , la vitesse relative et la vitesse d'entraînement de $M$ par

و سرعة الجر لـــ $M$ بمسقطيهما في المعلم المتحرك $X'O'Y'$. إستنتج السرعة المطلقة المعبر عنها في نفس قاعدة الإسقاط، و بين أن شدة هذه ثابتة.

2/ حدد في اللحظة $t$ بدلالة $\omega_0$ و $\omega$، التسارع النسبي تسارع الجر و التسارع التكميلي لـــ $M$ بإسقاطاتها في المعلم المتحرك $X'O'Y'$. إستنتج التسارع المطلق المعبر عنه في نفس قاعدة الإسقاط، و بين أن شدة هذا ثابتة.

leurs projections dans le repère mobile $X'O'Y'$. En déduire la vitesse absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celui-ci est constant.

2/ Déterminer à l'instant $t$ en fonction de $\omega_0$ et $\omega$, l'accélération relative l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire de $M$ par leurs projections dans le repère mobile $X'O'Y'$. En déduire l'accélération absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.

**تمرين 34.4**

تنتقل ذبابة $M$ على رقاص الثواني لساعة مثبتة على جدار عمودي بحركة منتظمة سرعتها $v$. تنطلق الذبابة من النقطة $O$ في اللحظة $t=0$ لتصل بعد دقيقة واحدة إلى نهاية الرقاص الذي طوله $20cm$.

1/ أكتب عبارتي السرعة $\vec{v}_M$ و التسارع $\vec{a}_M$ لـــ $M$ في القاعدة المتحركة $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ المرتبطة بالذبابة.

2/ أحسب الإحداثيات $\theta_M, x_M, y_M$ للذبابة في اللحظات $0s, 15s, 30s, 45s, 60s$. أرسم المسار على الجدار.

3/ مثل على المسار شعاع السرعة $\vec{v}_M$ في اللحظة $t=45s$ و شعاع التسارع $\vec{a}_M$ في اللحظة $t=60s$.

**Exercice 4.34**

Une mouche $M$ se déplace sur l'aiguille des secondes d'une montre accrochée à un mur vertical avec un mouvement uniforme de vitesse $v$. La mouche part du point $O$ à l'instant $t=0$ pour atteindre l'extrémité de l'aiguille de longueur $20cm$ une minute plus tard.

1/ Ecrire les expressions de la vitesse $\vec{v}_M$ et de l'accélération $\vec{a}_M$ de $M$ dans la base mobile $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ associée à la mouche.

2/ Calculer les coordonnées $\theta_M, x_M, y_M$ de la mouche aux instants $0s, 15s, 30s, 45s, 60s$. Dessiner la trajectoire sur le mur.

3/ Représenter sur la trajectoire le vecteur vitesse $\vec{v}_M$ au temps $t=45s$ et le vecteur accélération $\vec{a}_M$ au temps $t=60s$.

**تمرين 35.4**

في المستوي $OXY$، يدور قرص نصف قطره $R$ وقطر $OA$ بسرعة زاوية ثابتة $\omega$ حول النقطة $O$. نشرك لمركزه المتحرك $O'$ محورين مستطيلين $O'X'Y'$ ( المحور $O'X'$ موجه وفق $OA$).

في اللحظة $t=0$، $A$ يقع على $OX$، $OX$ و $OX'$ متوافقان خطيا.

نقطة $M$، كانت في البداية في $A$ ، تنتقل على المحيط في الاتجاه الموجب بنفس السرعة الزاوية $\omega$.

1/ أحسب مباشرة مركبتي شعاعي سرعة و تسارع $M$ في المعلم $OXY$ (نشتق مركبات $\overrightarrow{OM}$).

2/ أحسب مركبات السرعة والتسارع النسبيين لـــ $M$ في المعلم $O'X'Y'$ ثم في $OXY$.

3/ ا/ أحسب مركبات سرعة الجر في المعلم $OXY$ باستعمال قانون تركيب السرعات.

ب/ أحسب بالمثل مركبات تسارع الجر في المعلم $OXY$؛ إستنتج التسارع التكميلي(كوريوليس).

4/ تأكد من مركبات سرعة الجر و تسارع الجر التكميلي باستعمال العبارات التي تقحم شعاع الدوران $\vec{\omega}$.

**Exercice 4.35**

Dans le plan $OXY$, un cercle de rayon $R$, de diamètre $OA$, tourne à la vitesse angulaire constante $\omega$ autour du point $O$. On lie à son centre mobile $O'$ deux axes rectangulaires $O'X'Y'$ (l'axe $O'X'$ est dirigé suivant $OA$).

A l'instant $t=0$, $A$ est sur $OX$, $OX$ et $OX'$ étant colinéaires.

Un point $M$, initialement en $A$, parcourt la circonférence dans le sens positif avec la même vitesse angulaire $\omega$.

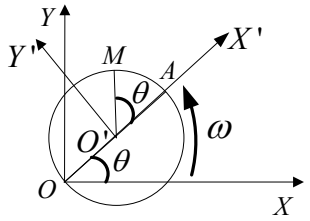
1/ Calculer directement les composantes des vecteurs vitesse et accélération de $M$ dans le repère $OXY$ (en dérivant les composantes de $\overrightarrow{OM}$).

2/ Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération relatives de $M$ dans le repère $O'X'Y'$ puis dans $OXY$.

3/ a/ Calculer les composantes de la vitesse d'entraînement dans le repère $OXY$ par la loi de composition des vitesses.

b/ Calculer de même les composantes de l'accélération d'entraînement dans le repère $OXY$ ; en déduire l'accélération complémentaire (Coriolis).

| | |
|---|---|
| 4/ vérifier les expressions des composantes de la vitesse d'entraînement et celle de l'accélération complémentaire en utilisant les expressions faisant intervenir le vecteur rotation $\vec{\omega}$. | |




A.FIZAZI _ Univ-BECHAR

## Corrigés des exercices de 4.28 à 4.35 حلول التمارين من 4.28 إلى 4.35

**Exercice 4.28 :**

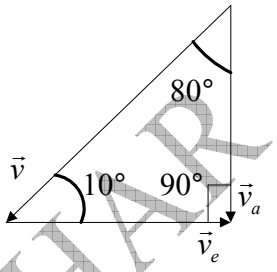
Soit $\vec{v}_a$ la vitesse de précipitation de la pluie par rapport au sol, $\vec{v}$ la vitesse de la pluie par rapport au véhicule et $\vec{v}_e$ la vitesse de la voiture par rapport au sol :

Représentons les trois vecteurs puis appliquons la loi des sinus:
La vitesse de précipitation de la pluie par rapport à la voiture au repos est:

$$\frac{v_a}{\sin 10°} = \frac{v_r}{\sin 90°} \Rightarrow \boxed{v_a = \frac{\sin 10°}{\sin 90°} v_r} \; ; \; \boxed{v_a \simeq 17,4 km.h^{-1}}$$

La vitesse de précipitation de la pluie par rapport à la voiture en mouvement est:

$$\frac{v_r}{\sin 90°} = \frac{v_e}{\sin 80°} \Rightarrow \boxed{v_r = \frac{\sin 90°}{\sin 80°} v_e} \; ; \; \boxed{v_r \simeq 117 km.h^{-1}}$$




**Exercice 4.29 :**

1/ l'équation horaire de la chute de la balle par rapport au repère fixe est : $z = -\frac{1}{2} g t^2 + h \rightarrow (1)$

La distance parcourue par la voiture avec une vitesse constante au cours de la durée $t$ est : $x' = vt \rightarrow (2)$

$z'$ est la hauteur dans le repère mobile lié à la voiture et qui est la même que la hauteur $z$ mesurée dans le repère fixe $z$ .

Par élimination du temps entre les équations horaires $(1)$ et $(2)$ on obtient l'équation de la trajectoire de la balle par rapport au repère mobile :

$$t = \frac{x'}{v} \Rightarrow \boxed{z = z' = -\frac{g}{2v^2} x'^2 + h}$$ **: la trajectoire est une parabole.**

2/ La distance parcourue par le véhicule avec un mouvement uniformément varié au cours de la durée $t$ est :

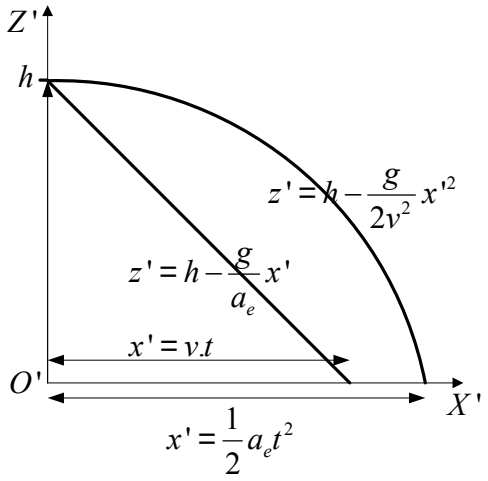
$$x' = \frac{1}{2} a_e t^2 \rightarrow (3)$$

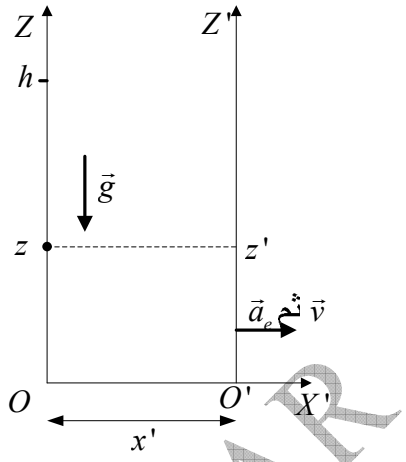
En éliminant le temps entre les équations $(1)$ et $(3)$ on obtient la trajectoire de la balle par rapport au repère mobile :

$$t^2 = \frac{2x'}{a_e} \Rightarrow \boxed{z = z' = -\frac{g}{a_e} x' + h}$$ **: la trajectoire est une droite.**

Nous avons représenté sur la figure ci-dessous la trajectoire pour chaque cas.

A.FIZAZI Univ-BECHAR



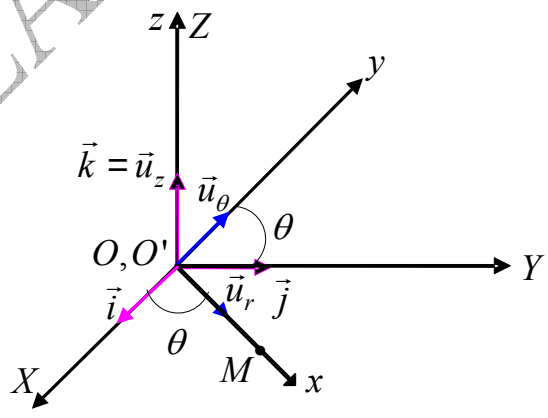

**Exercice 4.30 :**

Nous étudions le mouvement de $M$ dans la bas $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Les vecteurs unitaires sont indépendantes du temps. Voir figure.

1/ Le vecteur position : $\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{r}' = r.\vec{u}_r}$ , le vecteur vitesse relative : $\boxed{\vec{v}_r = \dot{r}.\vec{u}_r}$ et le vecteur accélération relative : $\boxed{\vec{a}_r = \ddot{r}.\vec{u}_r}$ .

2/ La vitesse d'entraînement, c'est-à-dire la vitesse des deux axes $Oxy$ mobiles par rapport au plan fixe est $OXY$ :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_e = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \\ \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = 0 \quad (O \equiv O') \\ \vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k} = \dot{\theta}.\vec{u}_z \end{array}\right| \Rightarrow \vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_e = r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta}$$




L'accélération d'entraînement, c'est-à-dire l'accélération des deux axes $Oxy$ mobiles par rapport au plan fixe $OXY$ est :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} \quad , \quad \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

A.FIZAZI _ Univ-BECHAR

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \dot{\theta}.\vec{u}_z \wedge r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r \\ \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \ddot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a}_e = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

3/ L'accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2.\begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ \dot{r} & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

4/ La vitesse absolue, c'est-à-dire la vitesse de $M$ par rapport au plan $OXY$ fixe est :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta}$$

L'accélération absolue c'est-à-dire l'accélération de $M$ par rapport au plan fixe $OXY$ est :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right).\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right).\vec{u}_\theta}$$

❖ **Remarque : Si on veut faire les calculs par rapport au repère mobile, on utilise la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ , en remplaçant $\vec{u}$ et $\vec{u}_\theta$ dans les résultats des vitesses et des 'accélérations auxquelles nous sommes parvenues par $\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta$ et $\vec{u}_\theta = -\vec{i}.\sin\theta + \vec{j}.\cos\theta$ .**

**Exercice 4.31 :**

1/ Expression du vecteur position par rapport au repère mobile $OX'Y'$ :

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{i}' \\ \vec{i}' = \vec{u}_r \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{r} = \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right).\vec{u}_r}$$

On dérive le vecteur position dans la base mobile pour obtenir le vecteur vitesse relative :

$$\boxed{\vec{v}_r = \dot{\vec{r}} = at.\vec{u}_r}$$

Expression du vecteur de la vitesse d'entraînement :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_e = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \\ \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = 0 \quad (O \equiv O') \\ \vec{\omega} = \omega\vec{k} = \omega.\vec{u}_z \end{array}\right| \Rightarrow \vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ \frac{1}{2}at^2 + r_0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{v}_e = \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega.\vec{u}_\theta}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

Expression du vecteur de la vitesse absolue :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a = at.\vec{u}_r + \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega.\vec{u}_\theta}$$

Son module : $\boxed{v_a = \sqrt{(at)^2 + \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)^2.\omega^2}}$

Le sens et la direction du vecteur de la vitesse absolue (voir figure ci-dessous) est donnée par :

$$\boxed{tg\alpha = \frac{v_\theta}{v_r} = \frac{\left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega}{at}}$$

2/ Coordonnées et viteses du mobile au temps $t = 3s$ :

$\theta = \omega t$ , $\boxed{\theta = 1,884rad = 108°}$ ; $r = \frac{1}{2}at^2 + r_0$ , $\boxed{r = 0,1m}$

$x = r.\cos\theta$ , $\boxed{x = -0,031m}$ ; $y = r.\sin\theta$ , $\boxed{y = 0,095m}$

$v_r = at$ , $\boxed{v_r = 0,06m.s^{-1}}$ ; $v_e = \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega$ , $\boxed{v_e = 0,0628m.s^{-1}}$

3/ On dérive le vecteur de la vitesse relative pour obtenir le vecteur de l'accélération relative :

$$\vec{a}_r = a.\vec{i}' = a.\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{a}_r = a.\vec{u}_r}$$

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} \text{ , } \boxed{v_a = 0,087m.s^{-1}}$$

$$tg\alpha = \frac{v_\theta}{v_r} = 1,047 \Rightarrow \boxed{\alpha = 46,3°}$$

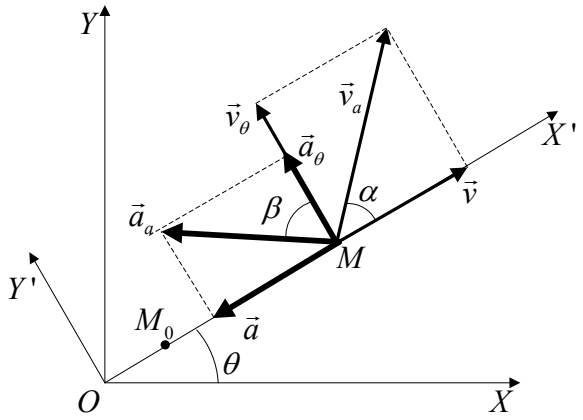
L'accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}}_{0} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{0} \quad , \quad \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge \left( \underbrace{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\vec{v}_e} \right)$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \omega.\vec{u}_z \wedge \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega.\vec{u}_\theta = -r\omega^2\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{a}_e = -\left(\underbrace{\frac{1}{2}at^2 + r_0}_{\vec{r}}\right)\omega^2.\vec{u}_\theta}$$

A.FIZAZI_Univ-BECHAR




3/ Accélération de Coriolis : $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2.\begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ at & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = 2at\omega.\vec{u}_\theta}$

Expression littérale de l'accélération absolue :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = \left[ a - \left( \frac{1}{2}at^2 + r_0 \right) \omega^2 \right] .\vec{u}_r + \left( 2at.\omega \right) .\vec{u}_\theta}$$

Module de l'accélération absolue : $\boxed{a_a = \sqrt{\left[ a - \left( \frac{1}{2}at^2 + r_0 \right) \omega^2 \right]^2 + \left( 2at.\omega \right)^2}}$

La direction du vecteur accélération absolue est tirée de la figure ci-dessus :

$$\boxed{tg\beta = \frac{a_\theta}{a_r} = \frac{2at}{a - \left( \frac{1}{2}at^2 + r_0 \right) \omega}}$$

**Exercice 4.32 :**

1/ **Coordonnées du point** $M$ **:** à partir de la figure (a) ci-dessous on voit que:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$

**L'abscisse :** au cours de la durée $t$, le point $M$ balaie l'angle $-\omega t$, et sa position est définie par l'angle $\theta = -\frac{\pi}{2} - \omega t$ ; Pendant le même temps le centre du cercle parcoure la distance $\overline{OA'} = vt$ . Donc : $x = \overline{OA'} + x'_M$ .

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OA'} = v.t = R\omega t \\ x'_M = R.\cos\theta \\ \cos\theta = \cos\left( -\frac{\pi}{2} - \omega t \right) \\ \cos\left( -\frac{\pi}{2} - \omega t \right) = -\sin\omega.t \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{x = R\left( \omega.t - .\sin\omega.t \right)}$$

**L'ordonnée** : de la figure (a) on voit que : $y = R + y'_M$

AFIZAZI Univ-BECHAR

$$\left.\begin{array}{l} y = R + R.\sin\theta \\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} - \omega.t\right) = -\cos\omega.t \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{y = R\left(1 - .\cos\omega t\right)}$$

La trajectoire est la courbe décrite par l'extrémité du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ au cours du temps. Il est défini par les équations paramétriques :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = R\left(\omega t - \sin\omega t\right) \\ y = R\left(1 - \cos\omega t\right) \\ z = 0 \end{cases}$$

La représentation graphique de ces équations paramétriques nous conduit à une **cycloïde (منحنى دويري)**.

2/ La vitesse absolue du point $M$ est :

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{v}_a \begin{cases} \dot{x} = v_x = R\omega\left(1 - \cos\omega t\right) \\ \dot{y} = v_y = R\omega\sin\omega t \\ \dot{z} = v_z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\omega\left(1 - \cos\omega t\right).\vec{i} + R\omega\sin\omega t.\vec{j}}$$

Le module du vecteur vitesse absolue est :

$$v_a = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ ;\ v_a = \sqrt{\left[R\omega\left(1 - \cos\omega t\right)\right]^2 + \left[R\omega\sin\omega t\right]^2}$$

$$v_a = \sqrt{2R^2\omega^2\left(1 - \cos\omega t\right)}$$

$$v_a = R\omega\sqrt{2\left(\underbrace{1 - \cos\omega t}_{2.\sin^2\frac{\omega t}{2}}\right)} = R\omega\sqrt{2.2\left(\sin^2\frac{\omega t}{2}\right)} \Rightarrow \boxed{v_a = 2R\omega\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|}$$

Pour déterminer la direction du vecteur vitesse absolue il suffit de calculer l'angle $\alpha$ comprise entre l'axe $OX$, c'est-à-dire le vecteur unitaire $\vec{i}$, et le vecteur $\vec{v}_a$ (voir figure b) ci-dessous. Pour ce faire on fait appel au produit scalaire :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_a.\vec{i} = v_a.i.\cos\alpha = \dot{x} \\ \dot{x} = v_a.\cos\alpha \\ \dot{x} = 2R\omega\left(1 - \cos\omega t\right) \end{array}\right| \Rightarrow v_a.\cos\alpha = 2R\omega\left(1 - \cos\omega t\right)$$

Par substitution on obtient :

$$2R\omega.\sin\frac{\omega t}{2}.\cos\alpha = R\omega\left(1 - \cos\omega t\right)$$

En continuant les calculs on obtient la valeur $\alpha$ :

$$\left.\begin{array}{l} 2R.\sin\dfrac{\omega t}{2}.\cos\alpha = 2R.\sin^2\dfrac{\omega t}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \sin\dfrac{\omega t}{2} \\ \cos\alpha = \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \cos\alpha = \cos\left(-\alpha\right) \end{array}\right| \Rightarrow \alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{\omega t}{2} \quad , \quad \boxed{\alpha = \left|\frac{\pi}{2} - \frac{\omega t}{2}\right|}$$

La vitesse relative est la vitesse absolue du point $M$ par rapport au référentiel mobile $X'AY'$, donc :

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

$$\vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}$$

Commençons par les coordonnées du point $M$ dans le repère $X'AY'$ :

$$x'_M = R.\cos\theta = R.\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = -R.\sin\omega t$$

$$y'_M = R\sin\theta = R.\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = -R.\cos\omega t$$

En dérivant les deux coordonnées par rapport au temps on obtient les composantes de la vitesse relative :

$$\boxed{\dot{x}'_M = -R.\omega\cos t} \quad ; \quad \boxed{\dot{y}'_M = -R.\omega.\sin\omega t}$$

Le vecteur s'écrit alors : $\boxed{\vec{v}_r = -R.\omega\cos t.\vec{i} - -R.\omega.\sin\omega t.\vec{j}}$

Et son module : $\vec{v}_r = \sqrt{\left(R.\omega\cos t\right)^2 + \left(R.\omega.\sin\omega t\right)^2} \Rightarrow \boxed{v_r = R\omega}$

La direction de la vitesse relative : on utilise la même méthode que celle qui a été utilisée pour obtenir la direction du vecteur vitesse absolue.

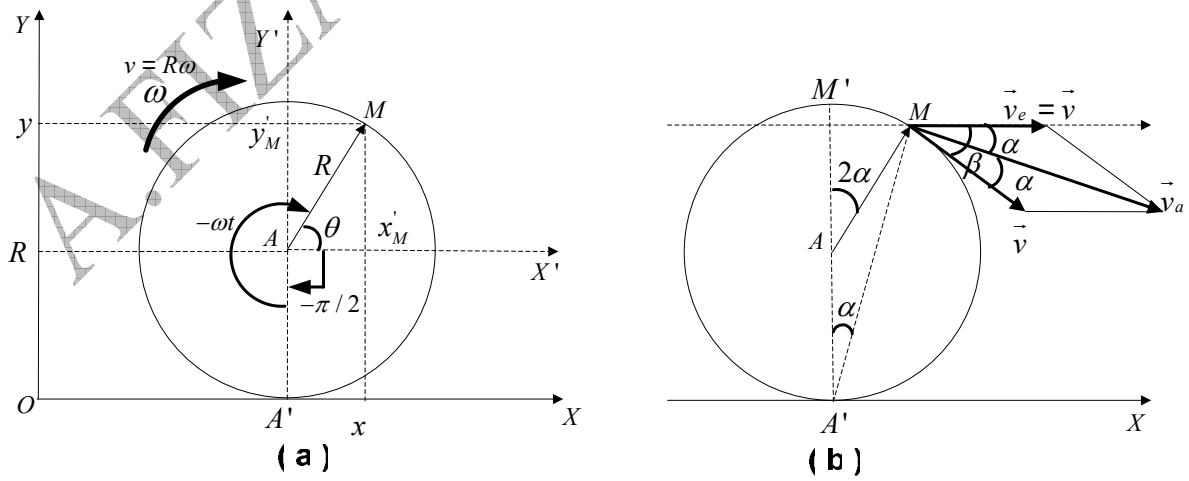
Sur la figure (b) ci-dessous, on voit bien que l'angle en question est l'angle compris entre $\vec{v}$ et $\vec{i}$ :

$$\vec{v}_r.\vec{i} = v_r.i.\cos\beta$$

$$v_r.\cos\beta = \dot{x}'_M = -\underbrace{R\omega}_{v_r}\cos\omega t \Rightarrow \cos\beta = -\cos\omega t \quad ; \quad \boxed{\beta = \pi - \omega t = 2\alpha}$$

$$-\cos\omega t = \cos\left(\pi - \omega t\right)$$

3/ la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ . Regardons la figure (b) ci-dessous (en se basant sur quelques propriétés géométriques). Dans un cercle l'angle au centre est égale au double de l'angle dont le sommet est situé sur la circonférence de ce cercle $\left(2.\widehat{M'A'M} = 2\alpha\right)$ . $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire circulaire au point $M$ .




De la figure (b), il vient :

$$\vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r \Rightarrow v_e = \sqrt{v_a^2 + v_r^2 - 2v_a.v_r.\cos\alpha}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\left.\begin{array}{l} v_e = \sqrt{4R^2\omega^2 \sin^2\frac{\omega t}{2} + R^2\omega^2 - 2R\omega.2R\omega \sin\frac{\omega t}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega t}{2}\right)} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega t}{2}\right) = \sin\frac{\omega t}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v_e = R\omega = v}$$

La vitesse d'entraînement est égale à la vitesse de translation du centre du cercle par rapport au repère fixe $XOY$ , ce qui est tout à fait logique. $\vec{v}_e$ est parallèle à l'axe $OX$ .

**Exercice 4.33**

1/ Nous partant du vecteur position en coordonnées polaires dans le repère $X'O'Y'$ :

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{r}' = r.\vec{u}_r \\ r = r_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{r} = r_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right).\vec{u}_r}$$

La vitesse relative : dans le repère mobile, le vecteur unitaire $\vec{u}$ est constant.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r = \dot{r}.\vec{u}_r \\ r = r_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v}_r = r_0\omega\left(-\sin\omega t + \cos\omega t\right).\vec{u}_r}$$

Pour calculer la vitesse d'entraînement, nous faisons intervenir le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} \\ \overrightarrow{OO'} = \vec{0} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v}_e = \vec{\omega}\wedge\vec{r}}$$

Nous effectuons l'opération suivante :

$$\vec{v}_e = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_e = r_0\omega\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)\vec{u}_\theta}$$

En utilisant la loi de composition des vitesses, on peut en déduire la vitesse absolue :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a = r_0\omega\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)\vec{u}_\theta + r_0\omega\left(-\sin\omega t + \cos\omega t\right).\vec{u}_r}$$

Calculons le module de cette vitesse pour vérifier q'il est constant :

$$\boxed{v_a = r_0\omega\sqrt{2} = Cte}$$

Quant à la valeur relative :

$$\vec{a}_r = \ddot{r}.\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{a}_r = r_0\omega^2\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right).\vec{u}_r}$$

L'accélération d'entraînement est déduite de l'expression générale vue en cours en éliminant les termes nuls :

$$\vec{a}_e = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}}_{0} + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}}_{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_e = \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}'}$$

Calculons le produit vectoriel double :

$$\vec{v}_e = \vec{\omega}\wedge r' = \vec{\omega}\wedge r = r_0\omega\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right).\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_e = \omega\wedge r_0\omega\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)$$

$$\vec{a}_e = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & r_0\omega\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right) & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_e = -r_0\omega^2\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)\vec{u}_\theta}$$

Calculons à présent l'accélération complémentaire en appliquant la formule :

A.FIZAZI – Univ-BECHAR

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2. \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ r_0\omega(-\sin\omega t + \cos\omega t) & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = 2r_0\omega^2(-\sin\omega t + \cos\omega t)\vec{u}_\theta}$$

Nous en déduisons l'accélération absolue à partir de la loi de composition des accélérations : $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$

Après les calculs nécessaires on trouve l'expression de l'accélération absolue :

$$\boxed{\vec{a}_a = 2r_0\omega^2\left[(\cos\omega t + \sin\omega t)\vec{u}_r + (-\sin\omega t + \cos\omega t)\vec{u}_\theta\right]}$$

Vérifions que son module est constant :

$$\boxed{\vec{a}_a = 2r_0\omega^2\sqrt{2} = Cte}$$

**Exercice 4.35 :**

1/ Le vecteur position de la mouche dans le repère mobile (aiguille) :

$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{r} = v.t.\vec{u}_r}$

Les expressions de la vitesse et de l'accélération de la mouche dans le repère mobile : remarquons que $\theta \prec 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \omega \prec 0$ , ceci est du au sens négatif dans lequel progresse l'aiguille des secondes.

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}_M &= \dot{\vec{r}} = v.\vec{u}_r + vt.\dot{\vec{u}}_r \\ \dot{\vec{u}}_r &= (-\omega).\vec{u}_\theta \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v}_M = v.\vec{u}_r - vt|\omega|.\vec{u}_\theta}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_M &= \ddot{\vec{r}} = v.\dot{\vec{u}}_r - v|\omega|.\vec{u}_\theta - vt|\omega|.\dot{\vec{u}}_\theta \\ \dot{\vec{u}}_\theta &= -(-\omega).\vec{u}_r \ , \ \dot{\vec{u}}_r = (-\omega).\vec{u}_\theta \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a}_M = -v\omega^2 t.\vec{u}_r - 2v|\omega|.\vec{u}_\theta}$$

2/ Calcul des coordonnées $\theta_M , x_M , y_M$. Consignons les résultats dans le tableau suivant :

$$v = \frac{0,2}{60} = \frac{10^{-2}}{3}(m/s) \ ; \ \omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}(rad/s)$$

$$x_M = vt\cos\omega t = \frac{10^{-2}}{3}.t\cos\frac{\pi}{30}.t \ ; \ y_M = vt\sin\omega t = \frac{10^{-2}}{3}.t\cos\frac{\pi}{30}.t$$

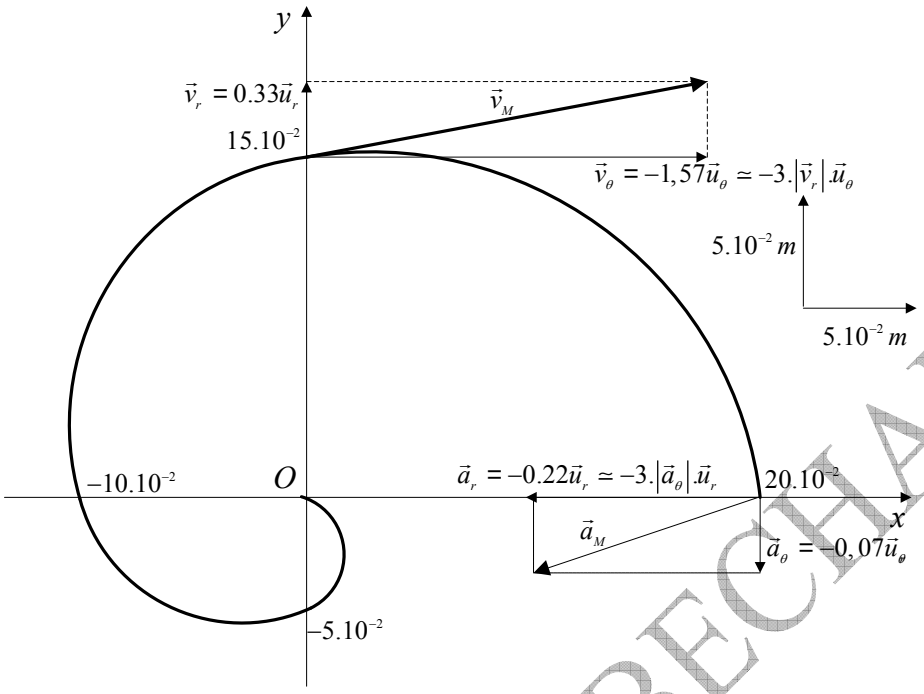
| $t(s)$ | 0 | 15 | 30 | 45 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\theta_M = -\omega t \ (rad.s^{-1})$ | 0 | $-\pi/2$ | $-\pi$ | $-3\pi/2$ | $-2\pi$ |
| $r_M = vt \ (ms^{-1})$ | 0 | $-5.10^{-2}$ | $10.10^{-2}$ | $15.10^{-2}$ | $20.10^{-2}$ |
| $x_M(m)$ | 0 | 0 | $-10.10^{-2}$ | 0 | $20.10^{-2}$ |
| $y_M(m)$ | 0 | $-5.10^{-2}$ | 0 | $15.10^{-2}$ | 0 |

Voir la représentation graphique c-dessous.

3/ Pour représenter la vitesse et l'accélération de la mouche par rapport au repère mobile, il faut calculer d'abord leurs deux modules respectifs aux temps prescrits :

| $t = 45s$ : | t = 60s: |
|---|---|
| $\vec{v}_M = v.\vec{u}_r - v.t.\omega.\vec{u}_\theta$ | $\vec{a}_M = -v\omega^2 t.\vec{u}_r - 2v\omega.\vec{u}_\theta$ |
| $\vec{v}_r = 0,33.\vec{u}_r$ ; $\vec{v}_\theta = -1,57.\vec{u}_\theta$ | $\vec{a}_r = -0,22.\vec{u}_r$ ; $\vec{a}_\theta = -,07.\vec{u}_\theta$ |

A.FIZAZI Univ-BECHAR




Nous avons pris comme échelles le module de la vitesse radiale pour représenter la vitesse ; et le module de l'accélération transversale pour représenter l'accélération.

**Exercice 4.36 :**

1/ A partir de la figure ci-dessous, on écrit l'expression du vecteur position dans le repère fixe $OXY$ :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

Durant le temps $t$ , l'angle balayé par le point $A$ par rapport au repère fixe est $\theta = \omega t$ .

L'angle que balaie le point $M$ durant le même temps $t$ par rapport au repère mobile $O'X'Y'$ est égale aussi à $\theta = \omega t$ , mais par rapport au repère fixe $OXY$ il balaie l'angle $2\theta = 2\omega t$ .

La vitesse et l'accélération du point par rapport au repère sont la vitesse et l'accélération absolues.

En se basant sur la figure ci-dessous :

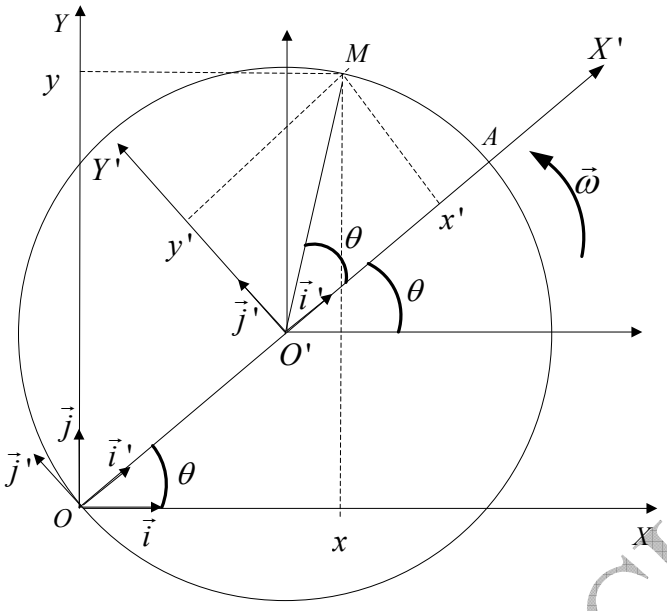
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OO'} = R\cos\omega t.\vec{i} + R\sin\omega t.\vec{j} \\ \overrightarrow{O'M} = R\cos 2\omega t.\vec{i} + R\sin 2\omega t.\vec{j}\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \left(R\cos\omega t + R\cos 2\omega t\right)\vec{i} + \left(R\sin\omega t + R\sin 2\omega t\right)\vec{j}}$$

Par dérivations successives de $\overrightarrow{OM}$ on obtient la vitesse et l'accélération absolues :

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \ , \ \boxed{\vec{v}_a = -R\omega\left(\sin\omega t + 2\sin 2\omega t\right)\vec{i} + R\omega\left(\cos\omega t + 2\cos 2\omega t\right)\vec{j}} \rightarrow (1)$$

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} \ , \ \boxed{\vec{a}_a = -R\omega^2\left(\cos\omega t + 4\cos 2\omega t\right)\vec{i} - R\omega^2\left(\sin\omega t + 4\sin 2\omega t\right)\vec{j}} \rightarrow (2)$$

A.FIZAZI_Univ-BECHAR




2/ Ecrivons l'expression du vecteur position dans le repère mobile $O'X'Y'$ en exploitant la figure ci-dessus :

$$\boxed{\overrightarrow{O'M} = x'.\vec{i}\,' + y'.\vec{j}\,' = R\left(\cos\omega t.\vec{i}\,' + \sin\omega t.\vec{j}\,'\right)}$$

La vitesse et l'accélération du point $M$ par rapport au repère mobile $O'X'Y'$ sont la vitesse et l'accélération relatives. En dérivant le vecteur $\overrightarrow{O'M}$ deux fois successives on obtient la vitesse et l'accélération relatives :

$$\vec{v}_{r'} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \quad , \quad \boxed{\vec{v}_{r'} = R\omega\left(-\sin\omega t.\vec{i}\,' + \cos\omega t.\vec{j}\,'\right)}$$

$$\vec{a}_{r'} = \frac{d\vec{v}_{r'}}{dt} \quad , \quad \boxed{\vec{a}_{r'} = -R\omega^2\left(\cos\omega t.\vec{i}\,' + \sin\omega t.\vec{j}\,'\right)}$$

Ecrivons maintenant l'expression du vecteur position dans le repère fixe $O'XY$ à partir de la figure ci-dessus :

$$\boxed{\overrightarrow{O'M} = x.\vec{i} + y.\vec{j} = R\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t\vec{j}\right)}$$

La vitesse et l'accélération par rapport au repère $OXY$ **.**

**ATTENTION :** il ne faut pas dériver deux fois de suite le vecteur $\overrightarrow{O'M}$ afin d'obtenir la vitesse et l'accélération relatives par rapport à $OXY$ . C'est cette erreur répondue qu'on doit éviter !!

Nous devons faire appel à la relation 4.57 (voir cours)

$$\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}}_{\vec{v}_e} + \underbrace{\vec{i}\,'\frac{dx'}{dt} + \vec{j}\,'\frac{dy'}{dt} + \vec{k}\,'\frac{dz'}{dt}}_{\vec{v}_r}$$

$$\vec{v}_r = \vec{i}\,'\frac{dx'}{dt} + \vec{j}\,'\frac{dy'}{dt} + \underbrace{\vec{k}\,'\frac{dz'}{dt}}_{0}$$

A partir de la figure nous pouvons désigner :

$$\vec{i}\,' = \cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j} \quad ; \quad x' = R\cos\omega t \rightarrow \dot{x}' = -R\omega\sin\omega t$$

$$\vec{j}\,' = -\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j} \; ; \; y' = R\sin\omega t \rightarrow \dot{y}' = R\omega\cos\omega t$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

Après substitution, nous obtenons :

$$\vec{v}_r = \left(\cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j}\right).\left(-R\omega\sin\omega t\right) + \left(-\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j}\right)\left(R\omega\cos\omega t\right)$$

$$\vec{v}_r = -2R\omega.\underbrace{\sin\omega t.\cos\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t}.\vec{i} + R\omega\left(\underbrace{-\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}_{\cos 2\omega t}\right)\vec{j}$$

A la fin, la vitesse relative du mobile $M$ par rapport à $OXY$ est :

$$\boxed{\vec{v}_r = R\omega\left(-\sin 2\omega t.\vec{i} + \cos 2\omega t.\vec{j}\right)} \rightarrow (3)$$

L'accélération relative du mobile $M$ par rapport à $OXY$ n'est pas égale à la dérivée de $\vec{v}$ par rapport au temps. Il faut utiliser la relation 4.59 (voir cours).

$$\vec{a}_r = \vec{i}\,'\frac{d^2x'}{dt^2} + \vec{j}\,'\frac{d^2y'}{dt^2} + \underbrace{\vec{k}\,'\frac{d^2z'}{dt^2}}_{0}$$

$$\vec{i}\,' = \cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j} \quad ; \quad x' = R\cos\omega t \rightarrow \ddot{\vec{x}}' = -R\omega^2\cos\omega t$$

$$\vec{j}\,' = -\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j} \; ; \; y' = R\sin\omega t \rightarrow \ddot{\vec{y}}' = -R\omega^2\sin\omega t$$

En remplaçant on obtient :

$$\vec{a}_r = \left(\cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j}\right)\left(-R\omega^2\cos\omega t\right) + \left(-\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j}\right)\left(-R\omega^2\sin\omega t\right)$$

$$\vec{a}_r = \left(-R\omega^2\cos^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2\cos\omega t\sin\omega t.\vec{j}\right) + \left(R\omega^2 s\sin^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2\cos\omega t\sin\omega t.\vec{j}\right)$$

$$\vec{a}_r = -R\omega^2\left(\underbrace{\cos^2\omega t - \sin^2\omega t}_{\cos 2\omega t}\right).\vec{i} - R\omega^2 2\underbrace{\cos\omega t\sin\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t}.\vec{j}$$

A la fin l'accélération relative du mobile $M$ par rapport à $OXY$ est égale à :

$$\boxed{\vec{a}_r = -R\omega^2\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t.\vec{j}\right)} \rightarrow (4)$$

3/ a/ La vitesse d'entraînement, en utilisant la loi de composition des vitesses est :

$$(1) - (3) = \vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r$$

$$\vec{v}_e = \left[-R\omega\left(\sin\omega t + 2\sin 2\omega t\right)\vec{i} + R\omega\left(\cos\omega t + 2\cos 2\omega t\right)\vec{j}\;\right] - \left[R\omega\left(-\sin 2\omega t.\vec{i} + \cos 2\omega t.\vec{j}\right)\right]$$

$$\boxed{\vec{v}_e = -R\omega\left(\sin\omega t + \sin 2\omega t\right).\vec{i} + R\omega\left(\cos\omega t + \cos 2\omega t\right).\vec{j}}$$

b/ L'accélération relative en appliquant la loi de composition des accélérations est :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} + \underbrace{z'\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}}_{0}$$

$$\overrightarrow{OO'} = R.\cos\omega t.\vec{i} + R\sin\omega t.\vec{j} \quad , \quad \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = -R\omega^2.\cos\omega t.\vec{i} - R\omega^2\sin\omega t.\vec{j}$$

$$\ddot{\vec{i}}\,' = -\omega^2\cos\omega t.\vec{i} - \omega^2\sin\omega t.\vec{j} \quad ; \quad x' = R\cos\omega t$$

$$\ddot{\vec{j}}\,' = \omega^2\sin\omega t.\vec{i} - \omega^2 c\cos\omega t.\vec{j} \; ; \quad y' = R\sin\omega t$$

En remplaçant on obtient :

$$\vec{a}_e = \left(-R\omega^2.\cos\omega t.\vec{i} - R\omega^2\sin\omega t.\vec{j}\right) + R\cos\omega t\left(-\omega^2\cos\omega t.\vec{i} - \omega^2\sin\omega t.\vec{j}\right) +$$

$$R\sin\omega t\left(\omega^2\sin\omega t.\vec{i} - \omega^2 c\cos\omega t.\vec{j}\right)$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

D'où l'accélération d'entraînement du mobile $M$ :

$$\vec{a}_e = \left[ -R\omega^2.\cos\omega t - R\omega^2 \left( \underbrace{-\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}_{\cos 2\omega t} \right) \right] \vec{i} - R\omega^2 \left( \sin\omega t + 2\underbrace{\sin\omega t.c\cos\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t} \right) \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_e = -R\omega^2.\left(\cos\omega t + \cos 2\omega t\right)\vec{i} - R\omega^2\left(\sin\omega t + \sin 2\omega t\right)\vec{j}}$$

Déduction de l'accélération de Coriolis ou accélération complémentaire :

$$\vec{a}_c = 2\left[ \frac{dx'.d\vec{i}'}{dt^2} + \frac{dy'.d\vec{j}'}{dt^2} \right]$$

ou à partir de la relation 4.59 :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_r + \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = +\vec{a}_a - \vec{a}_r - \vec{a}_r}$$

Le résultat est le même.

$\dot{\vec{i}}' = -\omega\sin\omega t.\vec{i} + \omega\cos\omega t.\vec{j}$ ; $\dot{\vec{x}}' = -R\omega\sin\omega t$

$\dot{\vec{j}}' = -\omega\cos\omega t.\vec{i} - \omega\sin\omega t.\vec{j}$ ; $\dot{\vec{y}}' = R\omega\cos\omega t$

$$\vec{a}_c = 2\left[ \frac{dx'.d\vec{i}'}{dt^2} + \frac{dy'.d\vec{j}'}{dt^2} \right] = \vec{a}_r + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_c = 2\left[ -R\omega\sin\omega t\left(-\omega\sin\omega t.\vec{i} + \omega\cos\omega t.\vec{j}\right) + R\omega\cos\omega t\left(-\omega\cos\omega t.\vec{i} - \omega\sin\omega t.\vec{j}\right) \right]$$

$$\vec{a}_c = 2\left[ R\omega^2.\sin^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2.\sin\omega t\cos\omega t.\vec{j} - R\omega^2.\cos^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2.\cos\omega t\sin\omega t.\vec{j} \right]$$

$$\vec{a}_c = 2\left[ R\omega^2.\left( \underbrace{\sin^2\omega t - \cos^2\omega t}_{-\cos\omega t} \right).\vec{i} - 2R\omega^2.\underbrace{\sin\omega t\cos\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t}.\vec{j} \right]$$

$$\boxed{\vec{a}_c = -2R\omega^2\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t.\vec{j}\right)}$$

**Il faudra vérifier le résultat par le calcul direct** $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_r + \vec{a}_c$

4/ Introduisons à présent le vecteur de rotation $\vec{\omega} = \omega.\vec{k}$ . nous utilisons la loi(4.72) démontrée en cours pour calculer les deux composantes de la vitesse d'entraînement :

$$\boxed{\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

$$\vec{v}_e = -R\omega.\sin\omega t.\vec{i} + R\omega.\cos\omega t.\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R\cos 2\omega t & R\sin 2\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_e = -R\omega.\sin\omega t.\vec{i} + R\omega.\cos\omega t.\vec{j} - R\omega.\sin 2\omega t.\vec{i} + R\omega.\sin 2\omega t.\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{v}_e = -R\omega.\left(\sin\omega t + \sin 2\omega t\right).\vec{i} + R\omega.\left(\cos\omega t + \sin 2\omega t\right).\vec{j}}$$

Nous utilisons la formule (4.73) démontrée en cours pour trouver l'accélération complémentaire ou accélération d Coriolis :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \Rightarrow \vec{a}_c = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -R\omega.\sin 2\omega t & R\omega.\cos 2\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}_c = -2R\omega^2.\cos 2\omega t.\vec{i} - 2R\omega^2.\sin 2\omega t.\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_c = -2R\omega^2.\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t.\vec{j}\right)}$$

A.FIZAZI _ Univ-BECHAR