1. Cours 1: Arithmétique dans Z

2. Cours 2: Fonctions et Applications

2.1. Fonctions:

2.1.1 Définitions: *On appelle fonction d'un ensemble A vers un ensemble B, toute correpondance f, qui, à chaque élément x de A, fait correspondre au plus un élément y de B.*

**On dit que A est l'ensemble de départ ou la source et que B est l'ensemble d'arrivée ou le but.*
**L'élément y associé à x par f s'appelle l'image de x et se note souvent $f(x)$. (C.à.d: $y = f(x)$)*
**La partie de A formée des éléménts auxquels est associé un élément de B s'appelle le domaine de définition de f et se note souvent $Dom(f)$. (C.à.d: $Dom(f) = \{x \in A \;/\; \exists y \in B : y = f(x)\}$)*

2.1.1.1 Remarques:
R1) Si $y = f(x)$, alors x s'appelle antécédent de y

R2) Les écritures $f : A \to B$ et $x \xrightarrow{f} y$ se lisent respectivement " f est une fonction de A vers B" et " y est l'image de x par f ".

Exemple 1: La correspondance f qui associe à chaque entier naturel le mois correspondant est une fonction de N dans l'ensemble $B = \{janvier, février, mars,$
$avril, mai, juin, juillet, août, septembre, octobre, novembre, decembre\}$
On a dans ce cas $f(2) = novembre$ et $f(17)$ n'existe pas
$Dom(f) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Exemple 2: La correspondance qui associe à chaque mois le nombre possible de jours du mois n'est une fonction de l'ensemble B de l'exemple précedent dans N, car elle fait associer à $février$, les deux éléments 28 et 29.

Exemple 3: La correspondance g associant à chaque entier son carré est bien une fonction, alors on peut écrire $g : Z \to N$ et on a: $g(n) = n^2$ et $Dom(f) = Z$

2.1.2 Définitions: (Graphe, Image directe et Image réciproque d'un ensemble): *Soient $f : A \to B$.*

1) Si $A_0 \subset A$, on appelle graphe de A_0 par f et on note $G_f(A_0)$, le sous ensemble de $A \times B$ formé des couples $(x, f(x))$ tels que $x \in A_0 \cap Dom(f)$. C.à.d:

$$G_f(A_0) = \{(x, f(x)) \in A \times B \ / \ x \in A_0 \cap Dom(f)\}$$

******$G_f(A)$ *est appelé graphe de* f *et est noté* G_f *. (c'est le cas* $A_0 = Dom(f)$*)*

2) Si $A_0 \subset A$*, on appelle image (ou image directe) de* A_0 *et on note* $f(A_0)$*, le sous ensemble de* B *formé des images par* f *des éléments de* $A_0 \cap Dom(f)$*. C.à.d:*

$$f(A_0) = \{f(x) \in B \ / \ x \in A_0 \cap Dom(f)\}$$

*$f(A)$ *est appelé image de* f *et est noté* $\mathrm{Im}(f)$*. (c'est le cas* $A_0 = Dom(f)$*)*

3) Si $B_0 \subset B$*, on appelle image réciproque de* A_0 *et on note* $f^{-1}(B_0)$*, le sous ensemble de* A *formé des antécédents par* f *des éléments de* B_0*. C.à.d:*

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A \ / \ f(x) \in B_0\}$$

Exemple 1: Si on reprend la fonction donnée par l'exemple 1 précédent, on aura:

$G_f(\{1, 4\}) = \{(1, janvier), (4, avril)\}$

$f(2N) = \{février, avril, juin, août, octobre, décembre\}$

$Dom(f) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$f^{-1}(\{juin, décembre\}) = \{6, 12\}$

Exemple 2: Soit la fonction $g : Z \to N$ telle que $g(n) = n^2$.

$G_g = \{(n, n^2) \ / \ n \in Z\}$

$g(\{-3, -1, 0, 3, 5\}) = \{0, 1, 9, 25\}$

$g^{-1}(\{4, 5, 6\}) = \{-2, 2\}$

$G_g = \{(n, n^2) \ / \ n \in Z\}$

$g(\{-3, -1, 0, 3, 5\}) = \{0, 1, 9, 25\}$

$g^{-1}(\{4, 5, 6\}) = \{-2, 2\}$

Exemple 3: Soit la fonction $h : R \to R$ définie par $h(x) = \frac{1}{x}$

$G_h = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) \ / \ x \in R^*\right\}$

$h([-1, 3]) =]-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$

$h^{-1}([2, 4]) = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

2.1.3 Représentations des fonctions: La représentations d'une fonction $f : A \longrightarrow B$ dépend de la nature des ensembles A et B.

Les représentations les plus utilisées sont les suivantes

1) *Représentation au moyen d'une formule.*

Exemple: Soit la fonction $g : Z \to N$ telle que $g(n) = n^2$

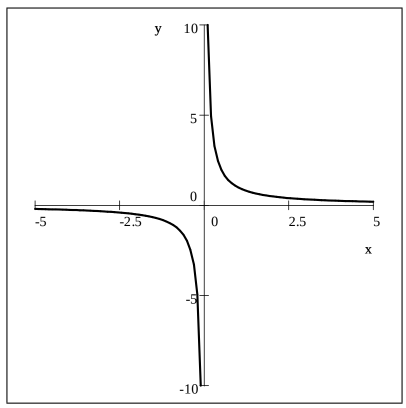
2) *Représentation au moyen d'une table de valeurs (*utile dans le cas où A est fini*).*

Exemple: Soit la fonction $g_1 : \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to N$ telle que:

n	-2	-1	0	1	2	3
$g_1(n)$	4	1	0	1	4	9

3) *Représentation au moyen d'un graphe.*

Exemple: Soit la fonction $h : R \to R$ telle que $g(x) = \frac{1}{x}$



2.2. Applications

2.2.1 définition: *On appelle application d'un ensemble A dans un ensemble B toute fonction de A vers B telle que $Dom(f) = A$.*

Exemple 1: La fonction $g : Z \longrightarrow N$ définie par $g(n) = n^2$ est une application de Z dans N.

Exemple 2: La fonction $h : R \longrightarrow R$ définie par $h(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas une application car $Dom(f) = R^* \neq R$.

Exemple 3: La fonction $Id_A : A \longrightarrow A$ définie par $Id_A(x) = x$ est une application particulière appelée application identique de A.

2.2.2. Restriction et prolongement: *Soit $f : A \longrightarrow B$ une application .*

1) On appelle restriction de f à une partie A_0 de A l'application $g : A_0 \longrightarrow B$ définie par $g(x) = f(x)$, pour tout $x \in A_0$. (g est souvent notée $f_{/A_0}$).

2) On appelle prolongement de f à un ensemble E contenant A la fonction $h : E \longrightarrow B$ définie par $h(x) = f(x)$, pour tout $x \in A$.

Exemple : Soit l'application $f : Z \longrightarrow N$ définie par $f(n) = |n|$. La restriction de f à N est l'application identique Id_N.

On peut aussi dire que l'application f est un prolongement de Id_N.

2.2.2.1 Remarque: La restriction est toujours unique, mais un prolongement n'est pas unique.

2.2.3 Composition des applications: *Soient $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$*

On appelle la composée des applications f et g l'application notée $g \circ f$ telle que $g \circ f : A \longrightarrow C$ *et pour chaque* x de A , $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Exemple 1: Soient les applications $f : Z \longrightarrow Z$ et $g : Z \longrightarrow N$ définies par $f(n) = n + (-1)^n$ et $g(n) = n^2$. La composée de f et g est la fonction $g \circ f : Z \longrightarrow N$ et telle que $g \circ f(n) = (n + (-1)^n)^2$.

Exemple 2: Soient f_1 et f_2 les applications données par les tables suivantes

n	1	2	3	4	5	6
$f_1(n)$	5	1	3	1	4	4

n	1	2	3	4	5	6
$f_2(n)$	1	3	1	6	4	2

,

alors les applications $f_1 \circ f_2$ et $f_2 \circ f_1$ sont données par les tables suivantes

n	1	2	3	4	5	6
$f_1 \circ f_2(n)$	5	3	5	4	1	1

n	1	2	3	4	5	6
$f_2 \circ f_1(n)$	4	1	1	1	6	6

Exemple 3: Soient f et g les applications de R dans R données par $f(x) = 3x - 2$ et $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ alors la composée $g \circ f$ est une application de R dans R avec $g \circ f(x) = \frac{f(x)}{(f(x))^2+1} = \frac{3x-2}{(3x-2)^2+1}$

2.2.4 Egalité des applications: *Deux applications $f_1 : A_1 \longrightarrow B_1$ et $f_2 : A_2 \longrightarrow B_2$ sont égales,si $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ et por tout $x \in A_1$ on a $f_1(x) = f_2(x)$.*

On écrit dans ce cas $f_1 = f_2$.

Exemple 1: Les applications f et g définies de N dans Z par $f(n) = \cos(\pi n)$ et $g(n) = (-1)^n$ sont égales et on peut écrire $f = g$.

Exemple 2: Les applications $f_1 \circ f_2$ et $f_2 \circ f_1$ calculées dans l'exemple 2 précédent ne sont pas égales.(C.à.d $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$)

2.2.5.Applications injectives, surjectives et bijectives:

2.2.5.1.Définition: *Soit $f : A \longrightarrow B$ une application.*

On dit que f est injective, si elle n'associe pas la même image à deux éléments différents.

C.à.d: f est injective, si pour tout $(x, x') \in A^2$: $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$

Exemple 1: L' application $h : R \longrightarrow R$ telle que $h(x) = 3x - 1$ est injective. En effet: $h(x) = h(x')$, implique $3x - 1 = 3x' - 1$ donc $x = x'$.

Exemple 2: L' application f de R^* dans R par définie $f(x) = \frac{1}{x}$ est injective. En effet: Si $f(x) = f(x')$, alors $\frac{1}{x} = \frac{1}{x'}$ d'où $x = x'$.

Exemple 3: L' application f_1 donnée par la table suivante

n	1	2	3	4	5	6
$f_1(n)$	5	1	3	1	4	4

n'est pas injective, car $f_1(2) = f_1(4)$.

Exemple 4: L' application qui fait correspondre à chaque voiture son numéro d'immatriculation est injective, car elle ne permet pas le même numéro à deux voitures différentes.

2.2.5.2.Théorème: *Soit $f : A \longrightarrow B$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes*

a) f est injective

b) Pour tout $(x, x') \in A^2$: $x \neq x'$ implique $f(x) \neq f(x')$

c) Pour tout $b \in B$ l'équation $f(x) = b$ admet au plus une solution x

Preuve: Pour montrer ce théorème, il suffit de montrer que a)⇒b)⇒c)⇒a)

1) Montrons que a)⇒b).

Si f est injective, alors pour tout $(x, x') \in A^2$: $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$, et en remplaçant l'implication par sa contraposée on obtient b).

2) Montrons que b)⇒c).

Si on a b) , supposons que l'équation $f(x) = b$ admet deux solutions différentes x et x' ou plus, c'est à dire $x \neq x'$, alors d'après b) $f(x) \neq f(x')$ et $b \neq b$ ce qui est absurde, donc l'équation $f(x) = b$ n'a qu'une solution ou zéro solution.

3) Montrons que c)⇒a)

Si on a c) $f(x) = f(x')$, alors x est une solution de l'équation $f(x) = b$ où $b = f(x')$, mais x' est assi une solution de la même équation, donc d'après c), x et x' ne peuvent pas être différents, d'où $x = x'$ et est donc injective.

2.2.5.3.Définition: *Soit $f : A \longrightarrow B$ une application.*

On dit que f est surjective, si tout élément de B possède au moins un antécédent.

C.à.d: f est surjective, si pour tout $y \in B$ il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

Exemple 1: L' application $h : R \longrightarrow R$ telle que $h(x) = 3x - 1$ est surjective. En effet: Pour chaque y dans R il existe $x = \frac{y+1}{3}$ dans R vérifiant $h(x) = y$.

Exemple 2: L' application f de R^* dans R par définie $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est surjective, car $y = 0$ n'a pas d'antécédent.

Exemple 3: L' application f_1 de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dans lui même, donnée par la table suivante

n	1	2	3	4	5	6
$f_1(n)$	5	1	3	1	4	4

n'est pas surjective, car $y = 6$ n'a pas d'antécédent.

Exemple 4: L' application qui associe à chaque date le jour correspondant de la semaine est surjective, car, à chaque jour de la semaine, on peut trouver plusieurs dates.

2.2.5.4.Théorème: *Soit $f : A \longrightarrow B$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes*

a) f est surjective

b) $f(A) = B$.

c) Pour tout $b \in B$ l'équation $f(x) = b$ admet au moins une solution x

Preuve: Pour montrer ce théorème, il suffit de montrer que a)⇒b)⇒c)⇒a)

1) Montrons que a)⇒b).

Si f est surjective, alors pour tout $y \in B$ il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, alors $y \in f(A)$, d'où l'inclusion $B \subset f(A)$, et comme l'inclusion $f(A) \subset B$ est triviale, alors on a légalité b).

2) Montrons que b)⇒c).

Si on a b) , alors pour tout b dans B, $b \in f(A)$, donc il existe au moins un x dans A vérifiant $b = f(x)$, ce x est bien une solution de l'équation.

3) Montrons que c)⇒a)

Si on a c), alors por tout $y \in B$, il existe au moins une solution x de l'éqution $f(x) = y$, cette solution est un antécédent de y.

2.2.5.5.Définition: *Soit $f : A \longrightarrow B$ une application.*

On dit que f est bijective, si f est injective et surjective.

Exemple 1: L' application $h : R \longrightarrow R$ telle que $h(x) = 3x - 1$ est bijective d'après ce qui précède.

Exemple 2: L' application f de R^* dans R par définie $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est bijective, car elle n'est pas surjective.

Exemple 3: L' application qui associe à chaque date le jour correspondant de la semaine n'est bijective, car, elle n'est pas injective.

Exemple 4: L' application f_1 de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dans lui même, donnée par la table suivante est bijective.

n	1	2	3	4	5	6
$f_1(n)$	5	1	3	2	6	4

2.2.5.6.Théorème: *Soit $f : A \longrightarrow B$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes*

a) f est bijective

b) Pour tout $b \in B$ l'équation $f(x) = b$ admet une solution unique x

Preuve:

f est bijective, si et seulement, si l'équation $y = f(x)$ admet au moins (voir **Th 2.2.5.2**) et au plus (voir **Th 2.2.5.4**) une solution x donc une solution unique.

2.2.5.7.Application réciproque d'une application bijective: *Soit $f : A \longrightarrow B$ une application bijective. On appelle application réciproque de f l'application notée f^{-1} telle que $f^{-1} : B \longrightarrow A$. et $f^{-1}(y) = x$ où x est l'antécédent de y par f (C.à.d $f(x) = y$).*

Exemple 1: L'application bijective $h : R \longrightarrow R$ telle que $h(x) = 3x - 1$, son application réciproque est $h^{-1} : R \longrightarrow R$ telle que $h^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}$.

Exemple 2: L' application bijective f_1 donnée par la table

n	1	2	3	4	5	6
$f_1(n)$	5	1	3	2	6	4

a comme application réciproque l'application donnée par la table suivante.

m	1	2	3	4	5	6
$f_1^{-1}(m)$	2	4	3	6	1	5

2.2.5.8.Théorème: *Soit $f : A \longrightarrow B$ une application bijective. Alors:*

a) L'application réciproque f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

b) $f \circ f^{-1} = Id_B$ et $f^{-1} \circ f = Id_A$.

Preuve:

a) Pour chaque $x \in A$, l'équation $f^{-1}(y) = x$ admet une solution $y = f(x)$ et elle est unique car une autre solution y' ne peut être que $f(x)$. Alors, d'après le **Th 2.2.5.6**, f^{-1} est bijective. De plus $(f^{-1})^{-1} : A \longrightarrow B$ et $(f^{-1})^{-1}(x) = y$ car $f^{-1}(y) = x$, par conséquent $(f^{-1})^{-1} = f$.

b) On a $f^{-1} : B \longrightarrow A$ et $f : A \longrightarrow B$, alors $f \circ f^{-1} : B \longrightarrow B$ et $f \circ f^{-1}(y) = f(x) = y = Id(y)$, d'où l'égalité $f \circ f^{-1} = Id_B$.

D'une manière analogue, on montre que $f^{-1} \circ f = Id_A$.

Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Département d'Informatique.
Module:Algèbre 1 ($1^{ère}$ Année LMD)

Fiche de T.D N^0 2

Exercice 1: a) La correspondance qui associe à chaque entier naturel son plus petit diviseur premier, est-elle une fonction? Est-elle une application?

b) Même question pour la correspondance qui associe à chaque entier naturel ses diviseurs.

Exercice 2: a)Soit la fonction $f : R \to R$ définie par $f(x) = x - |x|$. 1) f est-elle une application? 2) Déterminer les ensembles $\mathrm{Im}\, f$, $f^{-1}(]-3,4])$ et tracer $G_f([-2,5[)$. 3) Déterminer la restriction de f à R^-.

b) Soit la fonction $g : Z \to N$ telle que $g(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n. 1) f est-elle une application? 2) Déterminer les ensembles $g(\{-18,0,1,3\})$, $g^{-1}(\{0,1,2,3\})$ et tracer $G_g(\{n \in Z \ : |n| \leq 2\})$ 3) Déterminer la restriction de g à $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Exercice 3: On considère les applications f et g de N_9^* dans lui même données par les tables suivantes:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n)$	6	4	7	8	9	3	5	1	2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g(n)$	1	2	7	4	5	6	3	8	9

1) Représenter de la même façon: $g \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $f \circ g$.

2) Montrer que f est bijective et donner sa réciproque.

Exercice 4: Soit $f : Z \to Z$ définie par $f(n) = n + (-1)^n$

1) Montrer que n et $f(n)$ sont de parités différentes et que f est bijective.

2) Calculer $f(f(n))$. En déduire f^{-1} et résoudre l'équation $347 = n + (-1)^n$

Exercice 5: Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que:

a) Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

a') Si $g \circ f$ est injectives alors f est injective.

b) Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

b') Si $g \circ f$ est surjectives alors g est surjective.

Exercice 6: Soit $f : E \to F$ et soit $A \subset E$ et $B \subset F$

a) Montrer que:$A \subset f(f^{-1}(A))$ et que si f est injective, alors $f(f^{-1}(A)) = A$

b) Montrer que:$f^{-1}(f(B)) \subset B$ et que si f est surjective, alors$f^{-1}(f(B)) = B$

Exercice 7: Soient $f : A \to B$ et $g : B \to A$. Montrer que:

a) Si $g \circ f = Id_A$, alors f est injective et g est surjestive.

b) Si $g \circ f = Id_A$ et $f \circ g = Id_B$, alors f et g sont bijectives et $f = g^{-1}$.