POLYCOPIÉ DU STAGE OLYMPIQUE DE JUILLET 2019

Version, 06 Mars 2020

Introduction.

Les olympiades internationales de mathématiques constituent la compétition la plus prestigieuse de mathématiques à travers le monde. Elle rassemble l'élite des élèves du Lycée et du Collège de chaque pays. Chaque pays est représenté par 6 compétiteurs au maximum chaque année. La première participation de notre pays le Maroc dans cette compétition datte de 1983, et à partir de cette année jusqu'à notre année actuelle, le Maroc participe. Pour l'édition de cette année, elle avait lieu au Royaume uni, dans laquelle l'équipe nationale a pu décrocher une médaille de Bronze et quatre mentions honorables.

Chaque pays suit une procédure de sélection spéciale de l'équipe qui va le représenter dans les OIM. Pour le Maroc, dés l'année 2017, la sélection de l'équipe commence dés le tronc commun jusqu'à l'année terminale du lycée et dure trois ans.

Ce polycopié rassemble tous les cours et les exercices traités et donnés par les encadrants de Math&Maroc pendant le stage de Juillet 2019 tout au long de deux semaines de stage entre le 15 et le 27.
Les élèves qui ont bénéficié de ces cours sont des élèves de tronc commun, qui ont étaient choisis à la base de 6 tests tout le long de l'année scolaire 2018-2019.
Ce stage était le premier pour les élèves du tronc commun, et avait pour but leur faire découvrir les techniques et les stratégies de base dans les différentes axes des mathématiques olympiques, l'algèbre, la théorie des nombres, la combinatoire et la géométrie. Ce stage est le premier stage préparatoire aux olympiades internationales des mathématiques (OIM) de l'année 2021 qui auront lieu aux états unis.
Cet excellent cours peut constituer le point de départ pour tout élève collégien ou élève de tronc commun qui souhaite préparer les olympiades nationales et les olympiades internationales. C'est un cadeau également pour tout passionné par la science des mathématiques et tout amoureux des situations inhabituelles et des techniques mathématiques élémentaires. Il peut intéresser également les enseignants du collège et du lycée.

Il est conseillé que le lecteur respecte l'ordre de notions présentés qui a été établi soigneusement dans le but d'assimiler la totalité des notions données dans ce polycopié.

Finalement, on tient à remercier tous les formateurs de Math&Maroc qui ont participé dans la formation de nos jeunes marocains et dont le contenu de ce polycopié se base sur leurs cours donnés pendant ce stage, Choukri Saad, Kaichouh Youssef, El Hadri Omar, Serraille Baptiste, Ahmidan Houdaifa, Lakhrissi Samir, Mourtaki Younes, Azeroual Salaheddine, Labchiri Yasser, Kaichouh Elias, Gueddari Mohammed-Younes, Hibat-Allah Mohamed, Moutaoukil Mouad, Ziad Oumzil, Ben Chekroun Mamoun, Lamsaoub Hamza et Ajerame Zakaria. On remercie également Chbihi Younes pour la mise en page de ce document ainsi que Ait Khouya Saad, Benaissat AbdelKader et El Alami Mohamed pour la relecture de certains chapitres de ce polycopié.

Nous serons reconnaissant à ceux de nos lecteurs qui nous ferons parvenir leurs remarques et améliorations, contactez nous sur l'adresse e-mail suivante `saadchoukri00@gmail.com`

STAGE OLYMPIQUE DE JUILLET 2019 AU LYCÉE MOULAY YOUSSSEF

Cette photo a été prise lors du stage olympique de mathématiques de Juillet 2019, elle rassemble les élèves qualifiés du tronc commun accompagnés de leur formateur Choukri Saad.

Contents

CHAPTER 1

GÉOMÉTRIE

La géométrie a était toujours présente dans les épreuves des olympiades nationales, pareil pour les olympiades internationales. En effet, pendant les dix dernières années, deux exercices parmi 6 étaient des exercices de géométrie.

Il est particulièrement conseillé d'assimiler les démonstrations des résultats de ce chapitre, en effet les preuves proposées sont assez formatrices et dégagent souvent des techniques et des stratégies utiles dans la résolution des problèmes de type Olympiade.

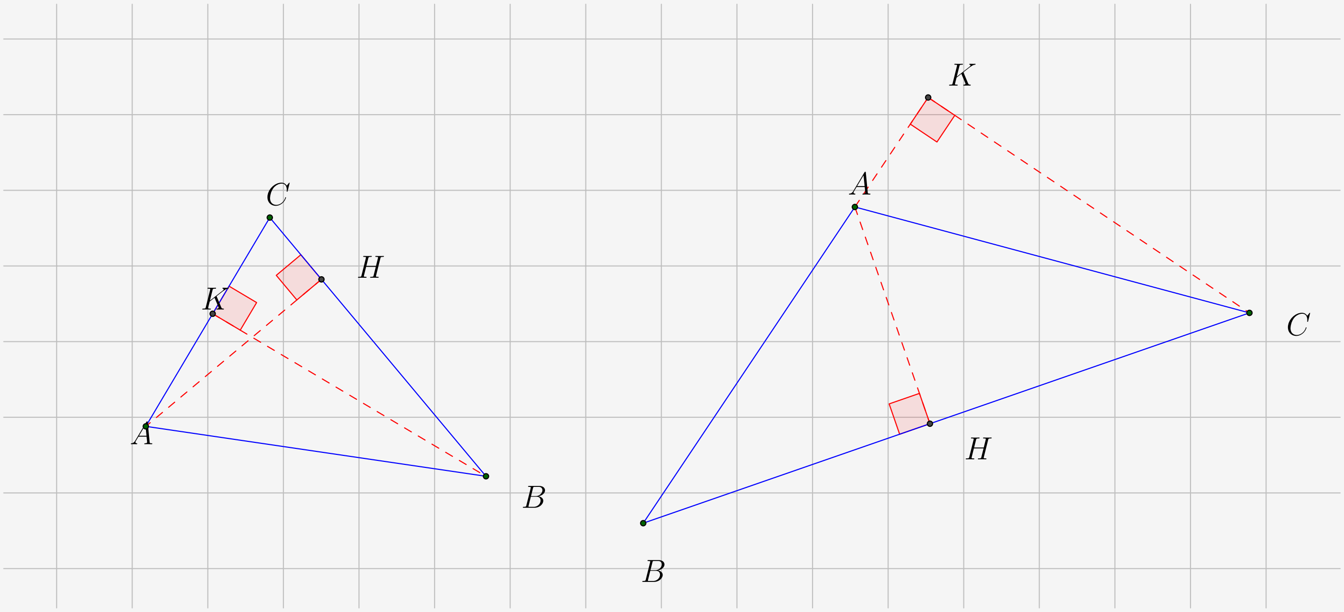
1.1 Géométrie du triangle

1.1.1 Aires

On se donne un triangle ABC et H et K sont respectivement les pieds des hauteurs issues des points A et B, on a alors

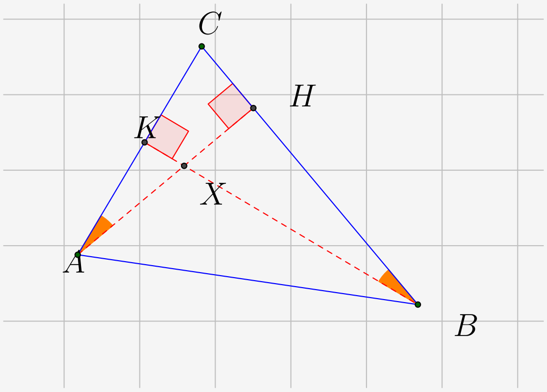
$$AH \times BC = BK \times AC$$

Démonstration. Deux cas de figures se présentent comme ci-dessous.



Plaçons nous dans le premier cas de figure (à gauche). Il s'agit de montrer que

$$AH \times BC = BK \times AC \iff \frac{AH}{AC} = \frac{BK}{BC}$$



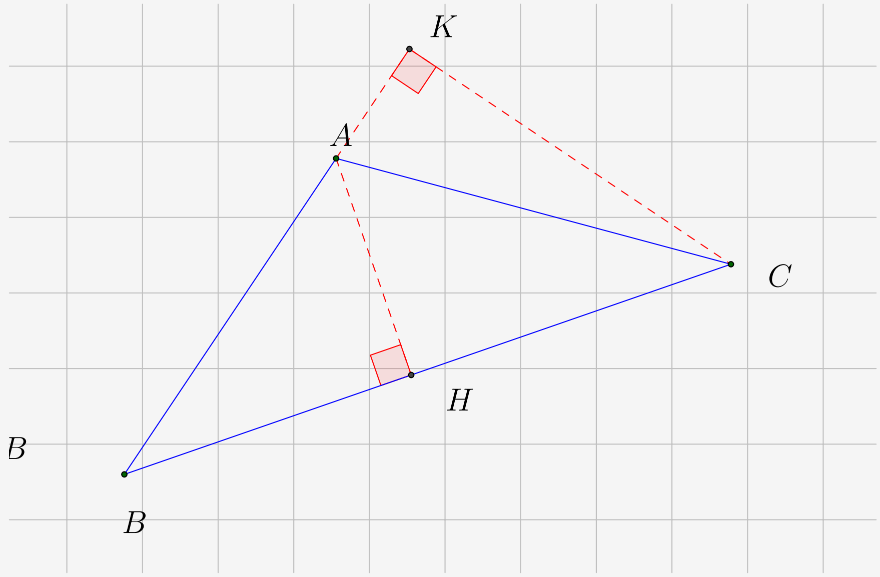
Or, on sait que

$$\frac{AH}{AC} = \cos \angle CAH = \cos \angle CBK = \frac{BK}{BC}$$

Puisque

$$\angle CAH = 90^\circ - \angle KXA = 90^\circ - \angle HXB = \angle CBK$$

Pour le second cas de figure,



Il s'agit de montrer que

$$\frac{AH}{AB} = \frac{KC}{BC}$$

Or, ceci est vrai puisque

$$\frac{AH}{AB} = \sin \angle B = \frac{KC}{BC}$$

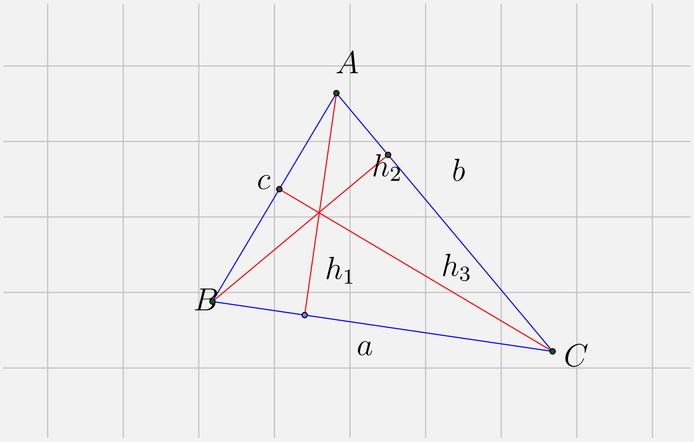
D'où le théorème.

On peut maintenant définir, l'aire (ou la surface) d'un triangle comme étant la quantité

$$\frac{h \times b}{2}$$

où h une hauteur et b la base du triangle correspondante à h. La discussion précédente permet de voir l'aire du triangle ne dépend pas de la hauteur et la base choisis. Ainsi, on a (en notant $[ABC]$ l'aire du triangle ABC)

$$[ABC] = \frac{h_1 \times a}{2} = \frac{h_2 \times b}{2} = \frac{h_3 \times c}{2}$$

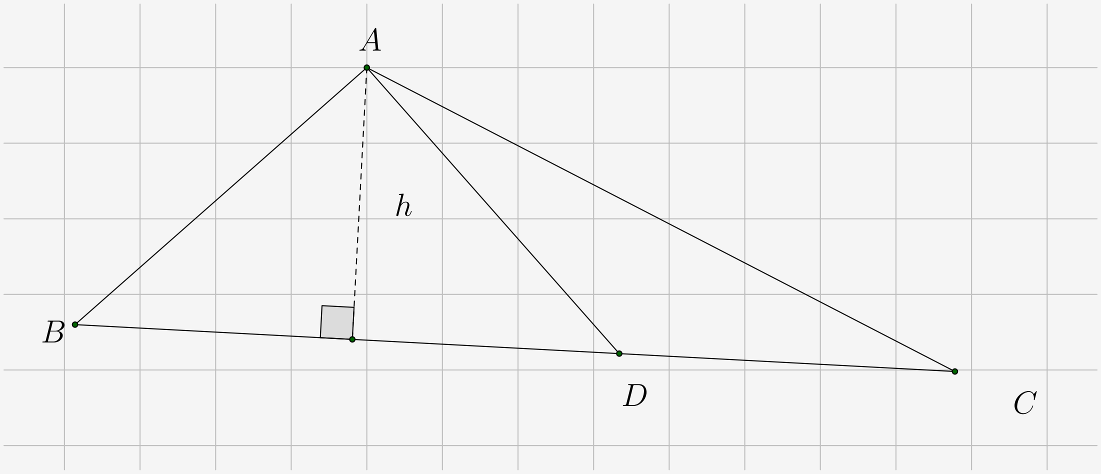


Nous allons par la suite donner un résultat très important, que nous allons voir des applications par la suite.

Soit ABC un triangle quelconque et D un point appartenant au segment $[BC]$ et différent de B et C. Alors, on a

$$\frac{[ADB]}{[ADC]} = \frac{DB}{DC}$$

Démonstration. On considère la figure ci dessous.



On a alors,

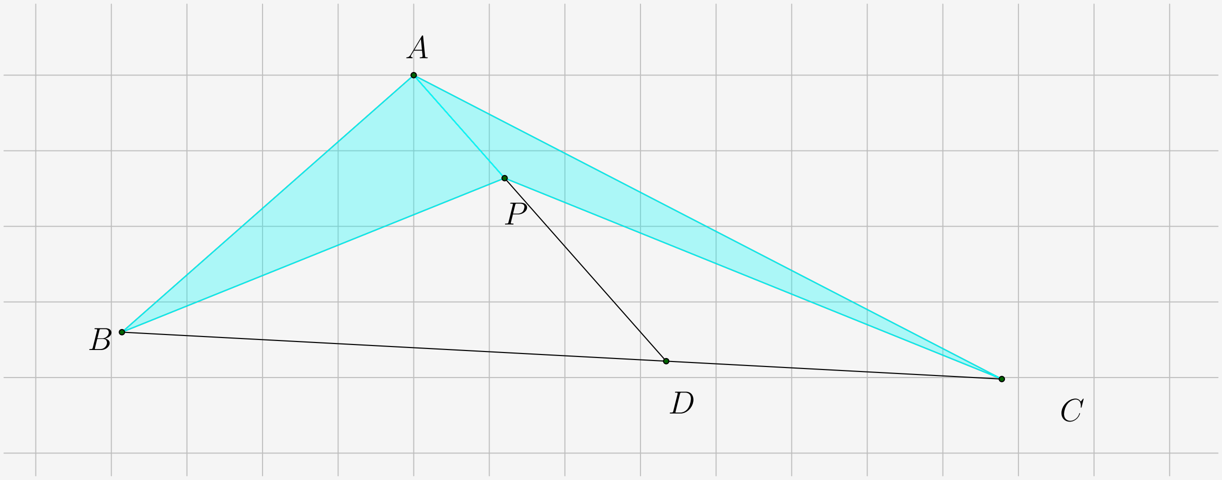
$$\frac{[ADB]}{[ADC]} = \frac{\frac{h \times BD}{2}}{\frac{h \times DC}{2}} = \frac{DB}{DC}$$

D'où le résultat.

Soit ABC un triangle et D un point du segment $[BC]$ différent de B et de C et soit P un point du segment $[AD]$ différent de A. Alors,

$$\frac{[ABP]}{[ACP]} = \frac{DB}{DC}$$

Démonstration. Considérons la figure ci-dessous.



On sait que

$$\frac{[ABP]}{[ACP]} = \frac{[ADB] - [PDB]}{[ADC] - [PDC]} = \frac{DB}{DC}$$

Puisque l'on a

$$\frac{[ADB]}{[ADC]} = \frac{DB}{DC} = \frac{[PDB]}{[PDC]}$$

Soit ABC un triangle et A_1 un point du segment $[BC]$ différent de B et C. On définit les points B_1 et C_1 de manière analogue de façon que les segments $[AA_1]$, $[BB_1]$ et $[CC_1]$ soient concourantes au point P. Prouver que

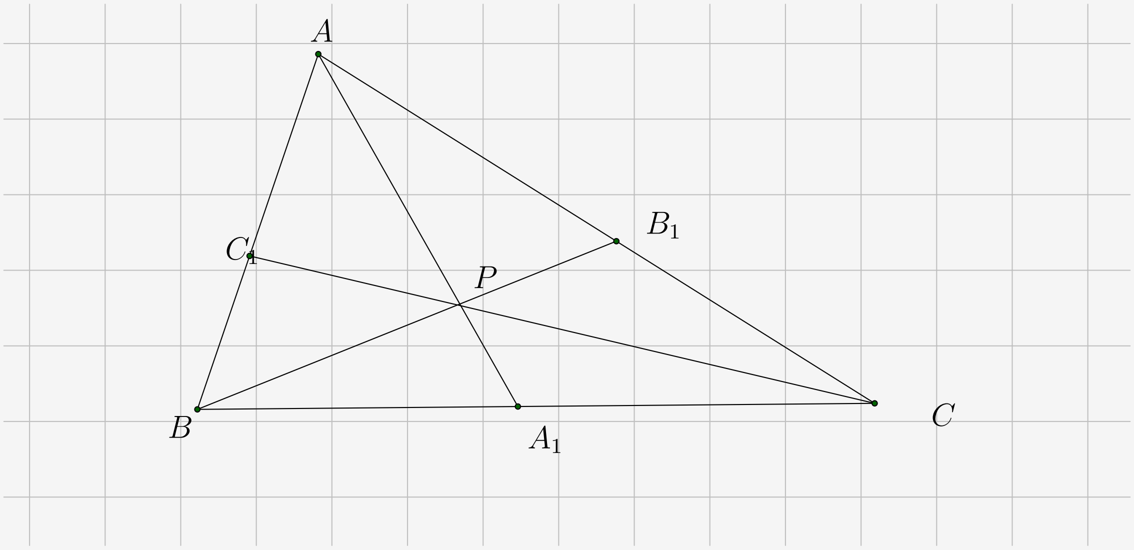
$$\frac{PA_1}{AA_1} + \frac{PB_1}{BB_1} + \frac{PC_1}{CC_1} = 1$$

Solution. On remarque que

$$\frac{PA_1}{AA_1} = \frac{[PA_1C]}{[PAC]} = \frac{[PA_1B]}{[PAB]} = \frac{[PA_1C] + [PA_1B]}{[PAC] + [PAB]} = \frac{[PBC]}{[ABC]}$$

Donc,

$$\frac{PA_1}{AA_1} + \frac{PB_1}{BB_1} + \frac{PC_1}{CC_1} = \frac{[PBC]}{[ABC]} + \frac{[PAC]}{[ABC]} + \frac{[PAB]}{[ABC]} = \frac{[ABC]}{[ABC]} = 1$$



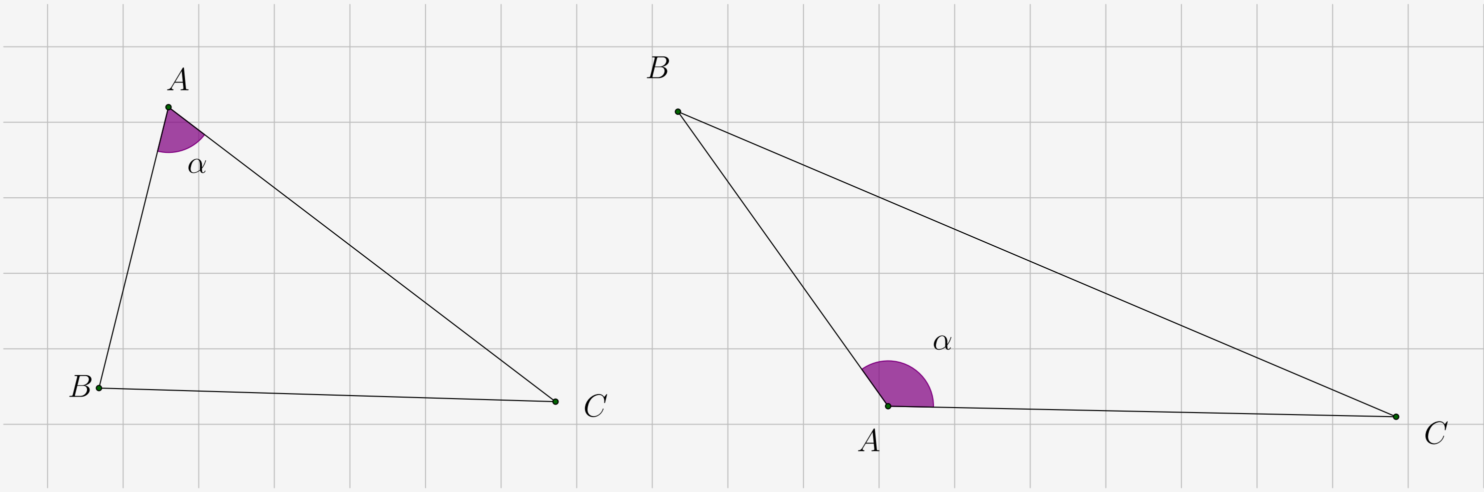
1.1.2 Loi des sinus

La donnée des longueurs de deux côtés d'un triangle n'est pas suffisante pour déterminer l'aire de ce triangle, cependant ceci est possible si on connaît la mesure de l'angle déterminé par ces deux côtés.

Soit ABC un triangle et on note $\angle BAC = \alpha$, alors on a

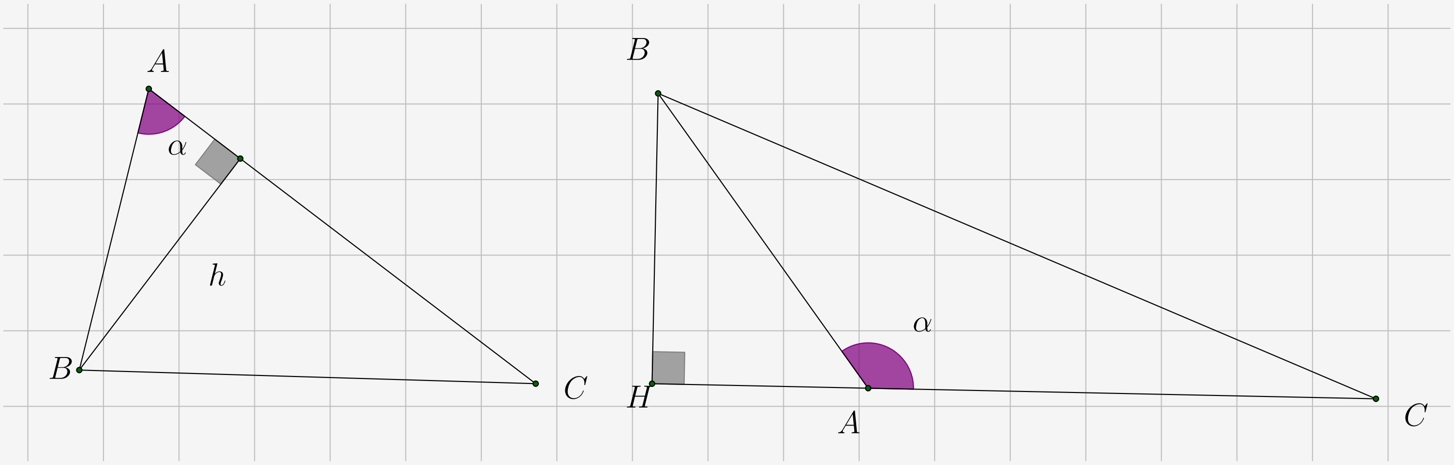
$$[ABC] = \frac{1}{2}\sin\alpha \times AB \times AC$$

Démonstration. Deux cas de figures se présentent comme ci-dessous.



Plaçons nous dans le premier cas (la figure de gauche). On sait que

$$[ABC] = \frac{h \times AC}{2} = \frac{AB\sin\alpha \times AC}{2} = \frac{1}{2}\sin\alpha AB \times AC$$



Pour le second cas (figure de droite). On sait que

$$[ABC] = \frac{BH \times AC}{2} = \frac{\sin(\pi-\alpha)AB \times AC}{2} = \frac{\sin\alpha AB \times AC}{2}$$

D'où le théorème.

Pour tout nombre réel x, on a

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit de montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \sin(2x) - 2\sin(x)\cos(x)$$

pour tout réel x est identiquement nulle. Puisque cette fonction est $2\pi-$périodique, il suffit de montrer qu'elle est identiquement nulle sur $[0, 2\pi[$, de plus on remarque que pour tout réel x, on a

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(2x) + 2\sin(x) \times \cos x = -f(x)$$

Donc, il suffit de montrer que f est identiquement nulle sur $[0, \pi/2[$. Soit x un un élément de $[0, \pi/2[$, il s'agit de montrer que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Soit ABC un triangle tel que $AB = AC = 1$ et $\angle A = 2x$, et H la projection orthogonal de A sur $[BC]$. On a alors,

$$\frac{\sin(2x)\times 1 \times 1}{2} = [ABC] = [AHB]+[AHC] = \frac{AH \times \sin(x)}{2} + \frac{AH \times \sin(x)}{2} = AH\times\sin(x) = AB\cos(x)\times\sin(x$$

D'où le résultat souhaité.

(OLYMPIADE MAROCAINE 1992). Soit ABC un triangle tel que $\angle BAC = 120°$. La bissectrice de l'angle $\angle BAC$ coupe le segment $[BC]$ au point D. Montrer que

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$$

SOLUTION. On sait que

$$[ABC] = [ABD] + [ADC]$$

Ceci équivaut à dire que

$$\frac{AB \times AC \times \angle \sin(120°)}{2} = \frac{AB \times AD \times \sin(60°)}{2} + \frac{AD \times AC \sin(60°)}{2}$$

Mais, on sait que $\sin(120°) = \sin(180° - 120°) = \sin(60°)$, donc

$$AB \times AC = AB \times AD + AD \times AC$$

Finalement, on obtient

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$$

Nous allons arriver à énoncer le théorème le plus important de cette partie, *la loi des sinus.*

> Dans un triangle, soient α, β et γ les mesures de ses angles et a, b et c sont respectivement les longueurs des côtés opposés à ces angles. Alors, on a les égalités
>
> $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

DÉMONSTRATION. La démonstration est très simple. Elle consiste à voir l'aire du triangle en question comme étant

$$\frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{ca\sin\beta}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2}$$

Et en divisant par abc, on obtient

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Et en inversant, on obtient le résultat cherché.

> Dans un triangle, le côté de plus grande longueur est opposé à l'angle de plus grande mesure.

DÉMONSTRATION. On distingue deux cas. Commençons par le cas le plus simple. Si tous les angles du triangle sont aigus, alors on a le résultat en utilisant la loi des sinus et le caractère croissant de la fonction sinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Sinon, si il existe un angle de mesure $> 90°$ dans le triangle en question, appelons le α et notons β et γ les mesures des deux autres angles. On sait que

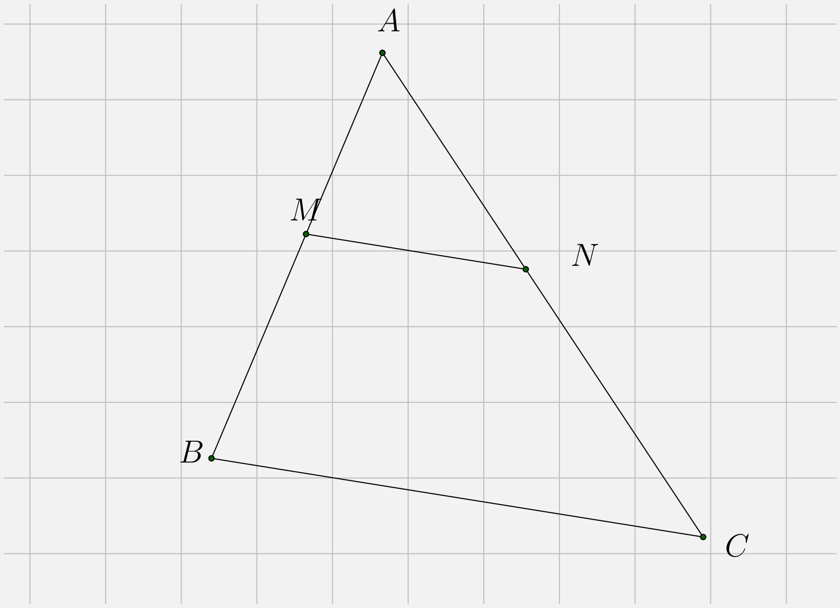
$$\beta + \gamma = \pi - \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Donc, par croissance de la fonction sinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin(\beta) \leq \sin(\beta+\gamma) = \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$, donc $b \leq a$ par la loi des sinus. De même, on retrouve que $c \leq a$. En résumé le côté de plus grande longueur est opposé à l'angle de plus grande mesure.

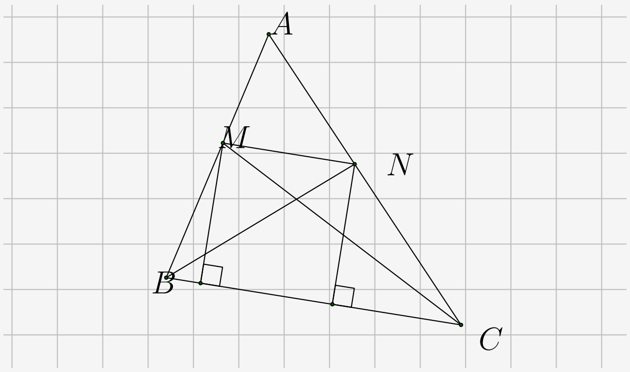
1.1.3 Théorème de Thalès

Soient ABC un triangle et M et N deux points appartenant respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que les deux droites (BC) et (MN) soient parallèles. Alors, on a

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$



Démonstration. Regardons la figure ci-dessous.



D'une part, on a

$$\frac{AN}{NC} = \frac{[AMN]}{[MNC]}$$

Et d'autre part

$$\frac{AM}{MB} = \frac{[AMN]}{[BMN]}$$

et on sait que les deux triangles MNC et BMC possèdent la même surface (puisqu'ils ont une base commune et la même hauteur correspondante). Donc,

$$\frac{AC}{AN} = \frac{AN+NC}{AN} = 1 + \frac{NC}{AN} = 1 + \frac{MB}{AM} = \frac{AM+MB}{AM} = \frac{AB}{AM}$$

Et en inversant, on obtient le résultat.

Soient ABC un triangle et M et N deux points appartenant respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$, on a alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Démonstration. On considère le point P appartenant à $[BC]$ tel que (MP) soit parallèle à la droite (AC). On sait que le quadrilatère $MNCP$ est un parallélogramme (puisque chaque deux côtés opposés sont parallèles). Alors,

$$\frac{MN}{BC} = \frac{PC}{BC}$$

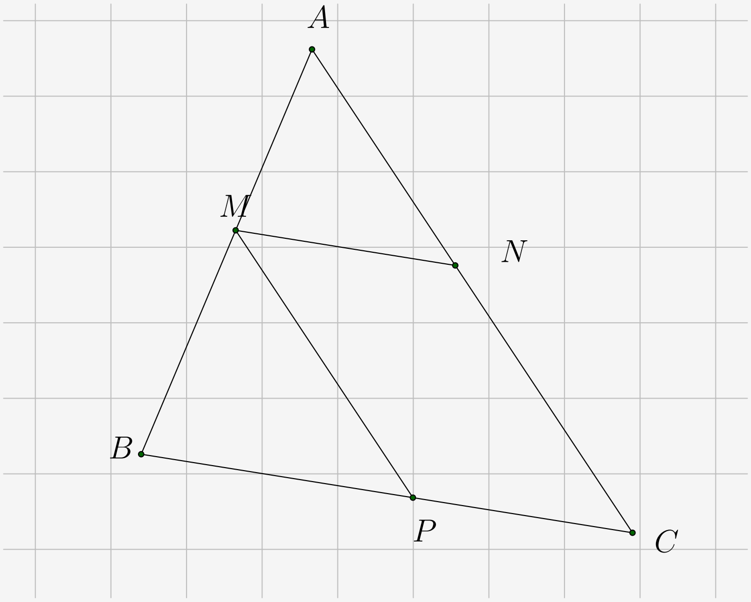
Mais on sait d'après le résultat de la proposition précédente que

$$\frac{PC}{BC} = \frac{MA}{BA}$$

Donc,

$$\frac{MN}{BC} = \frac{MA}{BA}$$

Et ceci permet de conclure.



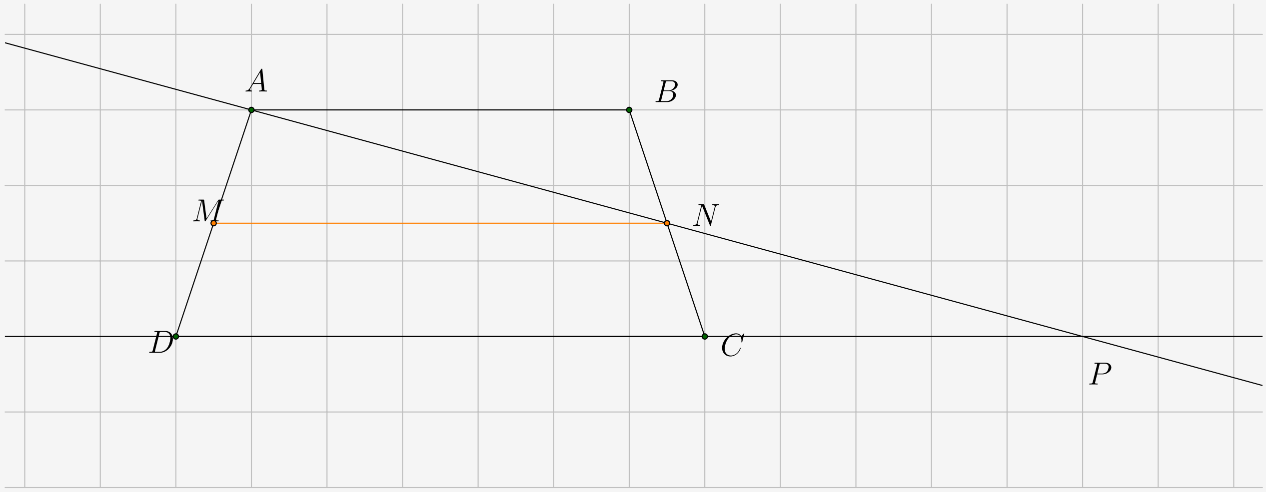
Remarque. Considérons les notations du théorème précédent et soient M' et N' respectivement les symétriques des points M et N par rapport au point A, alors on a la version suivante du théorème de Thalès,

$$\frac{AM'}{AB} = \frac{AN'}{AC} = \frac{M'N'}{BC}$$

Soient $ABCD$ un trapèze isocèle ($[AB]$ et $[CD]$ ses bases) et M et N respectivement les milieux des segments $[AD]$ et $[BC]$. Montrer que

$$MN = \frac{AB + CD}{2}$$

Solution. Regardons la figure ci-dessous.



Considérons le point P, l'intersection de la droite (AN) avec la droite (DC). En appliquant le théorème de Thalès une première fois, on obtient

$$\frac{NA}{NP} = \frac{NB}{NC} = \frac{AB}{PC}$$

On en tire que $NA = NP$, puis en appliquant le théorème de Thalès une seconde fois, on obtient

$$\frac{MN}{DP} = \frac{AN}{AP} = \frac{AN}{AN + NP} = \frac{AN}{2AN} = \frac{1}{2}$$

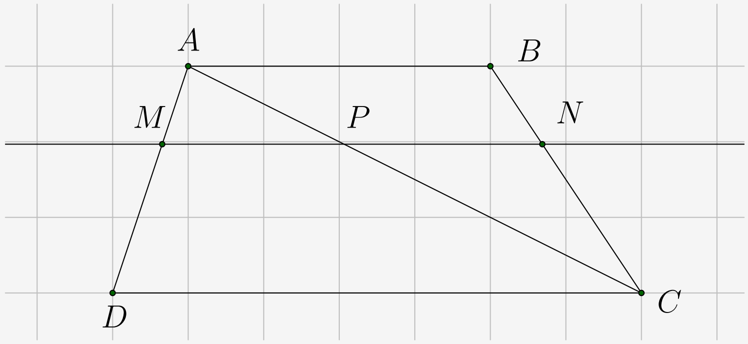
Mais, on a $DP = DC + CP = DC + AB = AB + CD$, donc

$$MN = \frac{AB + CD}{2}$$

Soit $ABCD$ un trapèze ($[AB]$ et $[CD]$ ses bases) et M et N deux points appartenant respectivement aux côtés $[AD]$ et $[BC]$ tels que les deux droites (MN) et (BC) soient parallèles. Montrer que

$$\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$$

Solution. Observons la figure ci-dessous.



On applique le théorème de Thalès deux fois pour obtenir

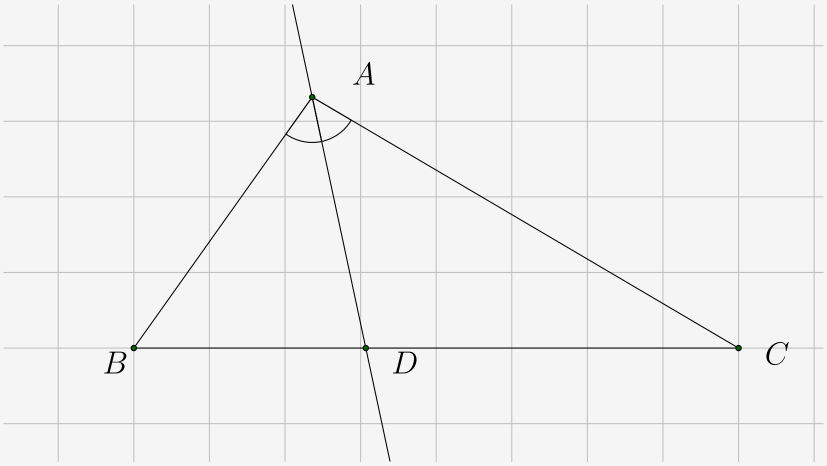
$$\frac{MA}{MD} = \frac{PC}{PA} = \frac{NB}{NC}$$

D'où le résultat.

1.1.4 Théorème de la bissectrice

Soit ABC un triangle et $[AD)$ la bissectrice de l'angle $\angle BAC$ avec D un point du segment $[BC]$. Alors, on a
$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Démonstration. Considérons la figure ci-dessous.



Appliquons la loi des sinus sur le triangle ABD, on obtient
$$\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\angle BAD}$$
Appliquons la loi des sinus sur le triangle ADC, on obtient
$$\frac{AC}{\sin \angle ADC} = \frac{DC}{\sin \angle DAC}$$
Donc,
$$\frac{DB}{AB} = \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle ADB} = \frac{\sin DAC}{\sin \angle ADC} = \frac{DC}{AC}$$
Puisque $\angle ADB + \angle ADC = 180°$. D'où le théorème.

1.1.5 Formule de Heron

Dans cette partie, on énonce (sans démonstration), la formule dite de Heron permettant de déterminer la valeur de l'aire d'un triangle à partir de la connaissance des longueurs de ses côtés.

Soient a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle, p son demi-périmètre et $\mathcal{A}$ l'aire de ce triangle. On a alors la formule suivante,
$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

1.1.6 Triangles semblables, triangles isométriques

En géométrie euclidienne, on dit que deux triangles sont semblables s'ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille.

Parmi les multiples formalisations de cette définition intuitive, les deux plus courantes sont, deux triangles sont semblables,
si leurs côtés sont proportionnels ou, ce qui est équivalent, s'ils ont les mêmes angles.

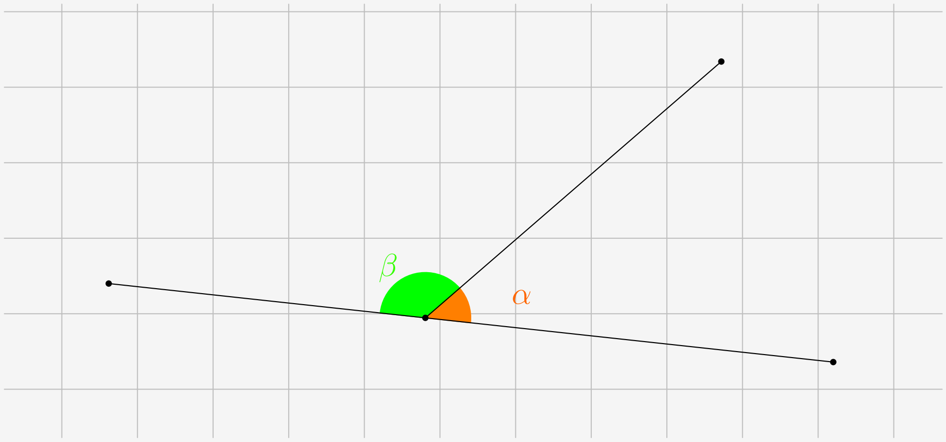
REMARQUE. Deux triangles sont dit isométriques s'ils sont semblables et ils ont deux côtés de même longueur.

1.2 Géométrie du cercle

La géométrie des cercles apparaît énormément dans le monde olympique, les propriétés des angles associés sont fondamentales et fort utiles dans la résolution des problèmes de type olympiade.

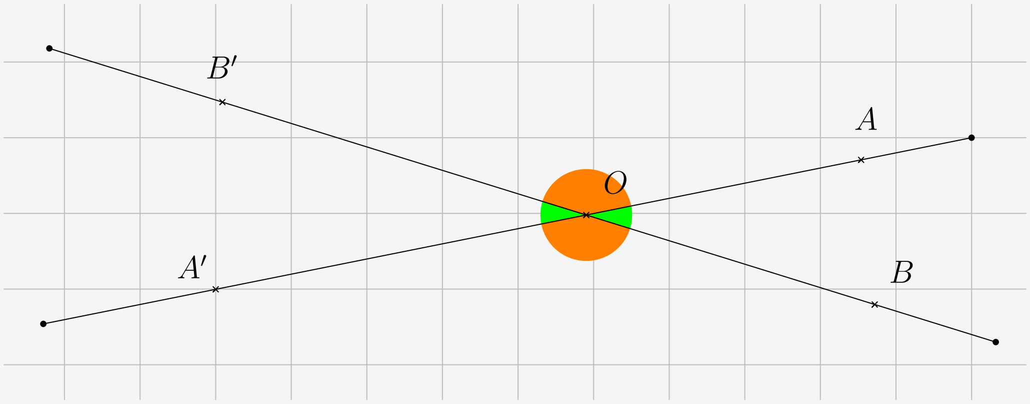
1.2.1 Chasse aux angles

Un angle dont la mesure est 180° est appelé un angle *plat*. Dans la figure ci-dessous, on a $\alpha + \beta = 180°$.



Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.

DÉMONSTRATION. On considère la figure ci-dessous.

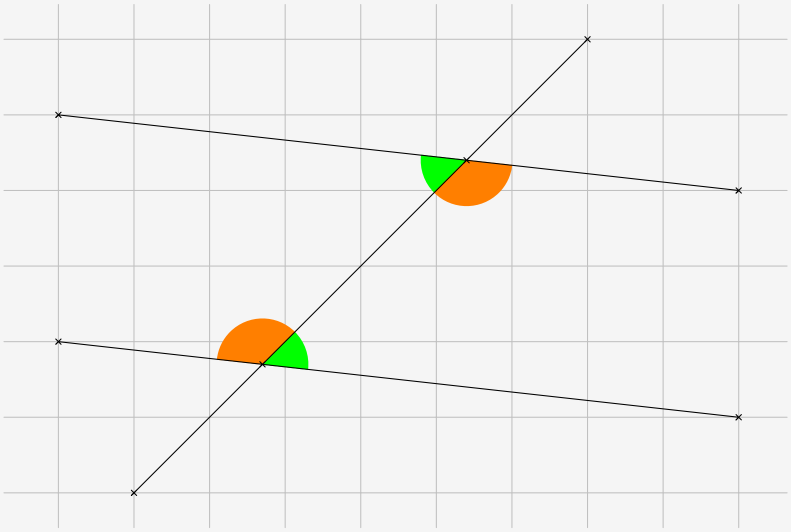


Il s'agit de montrer que $\angle AOB = \angle A'OB'$ et que $\angle AOB' = \angle A'OB$. Or on sait que

$$\angle AOB = 180° - \angle AOB' = 180° - (180° - \angle A'OB') = \angle A'OB'$$

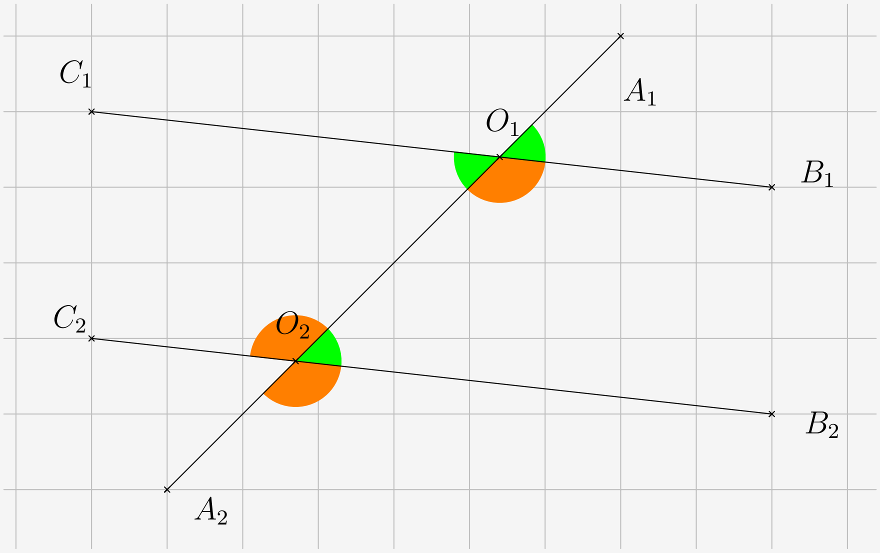
De même on obtient $\angle AOB' = \angle A'OB$.

Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors elles forment des angles alternes-internes de même mesure. Ainsi si deux droites sont parallèles, alors la perpendiculaire à une est perpendiculaire à l'autre.



Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles correspondants ainsi formés sont égaux.

DÉMONSTRATION. On considère la figure ci-dessous.



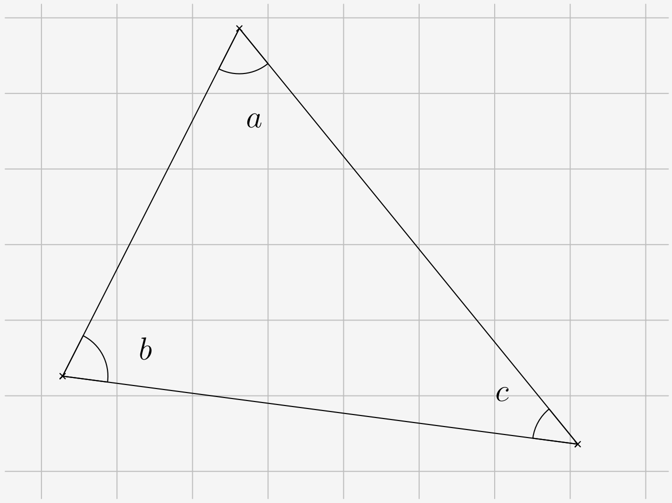
Il s'agit de prouver que $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_1O_2B_2$ et que $\angle A_2O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$. Or, on sait que

$$\angle A_1O_1B_1 = \angle C_1O_1A_2 = \angle A_10_2B_2$$

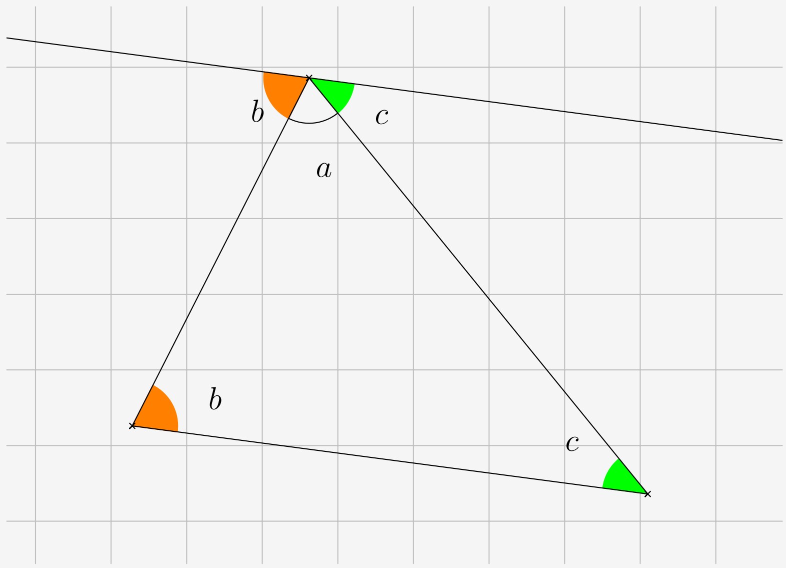
De même, on montre que $\angle A_2O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$.

La somme des mesures des angles d'un triangle est 180°.

DÉMONSTRATION. On considère la figure ci-dessous.



Il s'agit de montrer que $a+b+c=180°$. On trace la droite parallèle au côté opposé à l'angle a dans le triangle considéré.

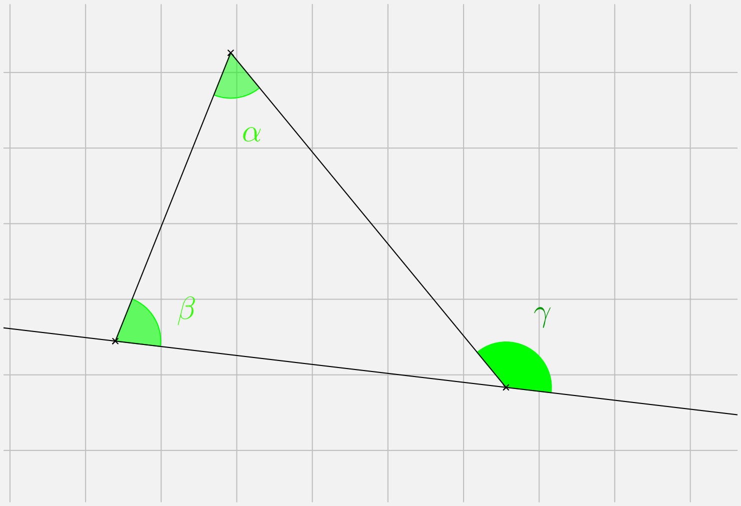


On remarque après que l'angle $b+a+c$ est un angle plat, finalement on obtient

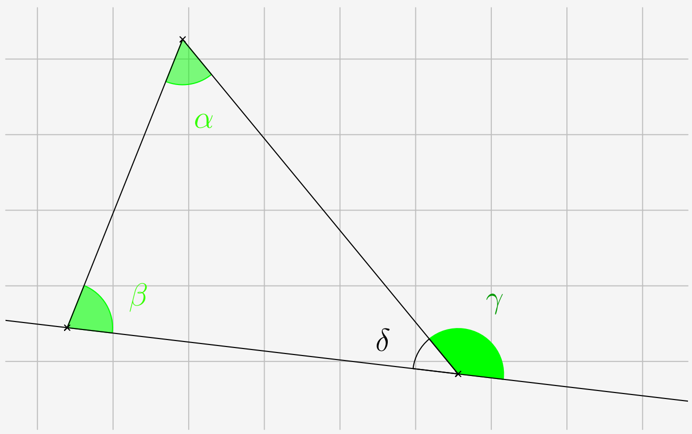
$$a+b+c=180°$$

Dans la figure ci-dessous, on a

$$\gamma=\alpha+\beta$$



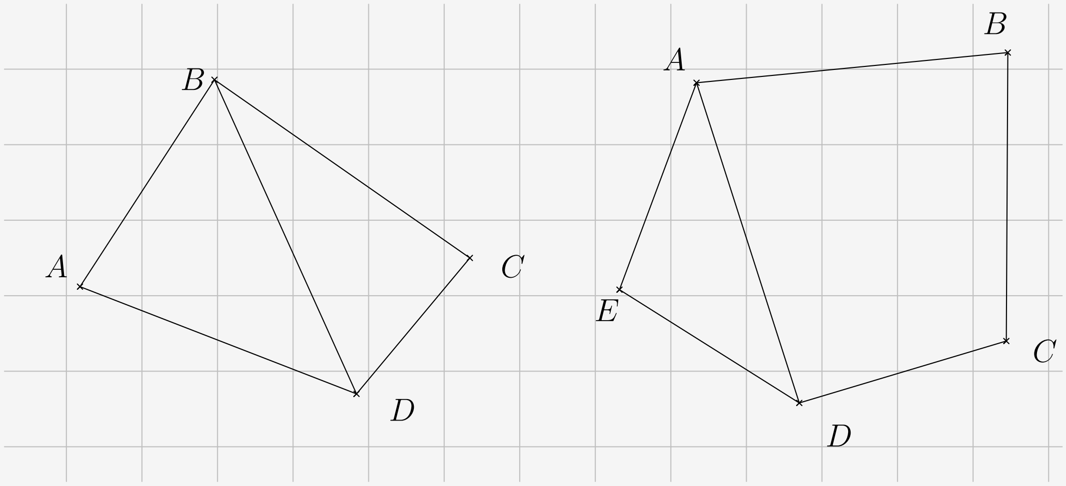
Démonstration. On considère l'angle δ nommé dans la figure ci-dessous.



On sait d'une part que $\gamma + \delta = 180°$ et d'autre part que $(\alpha + \beta) + \delta = 180°$. On tire donc que $\gamma = \alpha + \beta$.

Montrer que la somme des mesures des angles d'un quadrilatère est $360°$ et que la somme des mesure des angles d'un pentagone convexe est $540°$.

Solution. On considère la figure ci-dessous.



Plaçons nous dans le cas du quadrilatère. Il s'agit de montrer que

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$$

Or on sait que

$$\begin{aligned}\angle A + \angle B + \angle C + \angle D &= \angle A + \angle ABD + \angle DBC + \angle BCD + \angle CDB + \angle BDA + \angle BAD \\ &= \underbrace{\angle A + \angle ABD + \angle ADB}_{180°} + \underbrace{\angle C + \angle DBC + \angle CDB}_{180°} = 180° + 180° = 360°\end{aligned}$$

De même la somme des mesures des angles du pentagone $ABCDE$ est la somme des angles du quadrilatère $ABCD$ (qui vaut 360° d'après ce qui précède) et la somme des angle du triangle ΔADE (qui vaut 180°). Donc,

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 360° + 180° = 540$$

Remarque. On peut généraliser ce résultat en montrant que la somme des mesures des angles de n'importe quel polygone convexe à n côté vaut $(n-2) \times 180°$. En particulier, pour le cas d'un triangle $(n = 3)$, d'un quadrilatère $(n = 4)$ et d'un pentagone $(n = 5)$, on voit les résultats établis précédemment.

On considère un polygone convexe dont la somme des mesures des angles est 2200° à l'exception d'un angle α.

1. Déterminer le nombre de côtés de ce polygone.
2. Combien vaut la valeur de la mesure de l'angle α ?

Solution. Soit n le nombre des côté du polygone en question. Il s'agit de déterminer le quotient de la division euclidienne de 2200 par 180. Or,

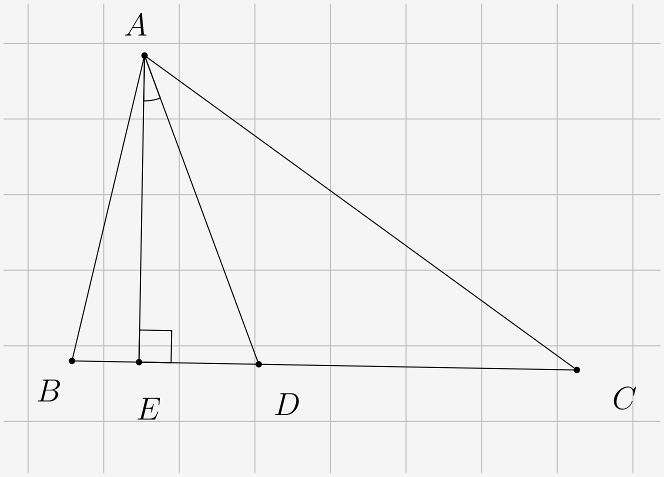
$$2200 = 12 \times 180 + 40 = 13 \times 180 - 140$$

Donc, $n - 2 = 13$. Il vient que $n = 15$ et $\alpha = 140°$.

Dans un triangle ΔABC, on suppose que $\angle B > \angle C$ et $[AD)$ la bissectrice de l'angle $\angle A$ (D appartient au segment $[BC]$) et E est la projection orthogonale de A sur le coté $[BC]$. Montrer que

$$\angle DAE = \frac{\angle B - \angle C}{2}$$

Solution. On considère la figure ci-dessous.



On commence par exprimer $\angle BAD$ en fonction de $\angle B$ et $\angle C$. On écrit (puisque $[AD)$ est la bissectrice de $\angle BAC$),

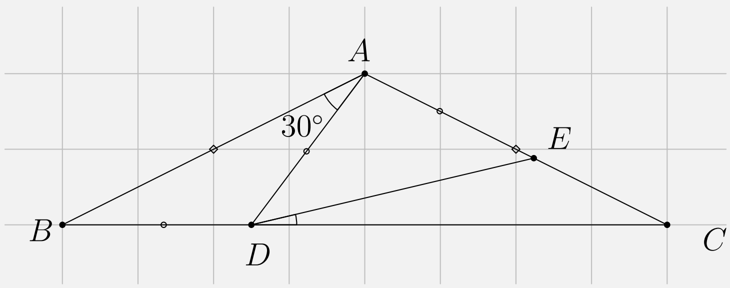
$$\angle BAD = \frac{\angle A}{2} = \frac{180^\circ - \angle B - \angle C}{2} = 90^\circ - \frac{\angle B + \angle C}{2}$$

Puis on écrit

$$\angle DAE = \angle BAD - \angle BAE = \left(90^\circ - \frac{\angle B + \angle C}{2}\right) - (90^\circ - \angle B) = \frac{\angle B - \angle C}{2}$$

D'où le résultat.

Dans la figure ci-dessous, on a $AB = AC$, $DB = DA = AE$ et $\angle BAD = 30^\circ$.



Déterminer la valeur de la mesure de l'angle $\angle CDE$.

Solution. On note x la valeur de la mesure de l'angle $\angle CDE$. On a

$$x = \angle ADC - \angle ADE = \angle ADC - (\angle C + x)$$

Donc,

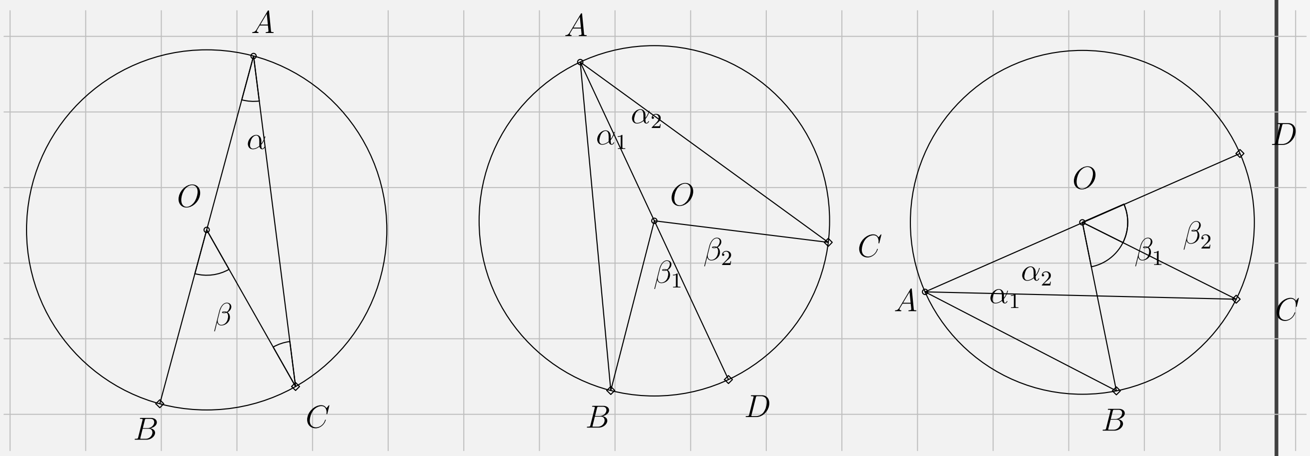
$$x = \frac{\angle ADC - \angle C}{2} = \frac{\angle B + \angle BAD - \angle B}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

Finalement, on obtient

$$\angle CDE = 15^\circ$$

En géométrie euclidienne plane, plus précisément dans la géométrie du cercle, les théorèmes de l'angle inscrit et de l'angle au centre établissent des relations liant les angles inscrits et les angles au centre interceptant un même arc.

Considérons la figure ci-dessous. La mesure de l'angle $\beta = \angle BOC$ est le double de la mesure de l'angle $\alpha = \angle BAC$.



DÉMONSTRATION. Trois cas de figures se présentent comme ci-dessus. Plaçons nous dans le cas de la première figure (à gauche). On sait que $\beta = \angle OAC + \angle OCA = 2\angle OAC = 2\alpha$ D'où le résultat pour le premier cas. Pour le second cas, on se ramène en premier cas en considérant le point D (représenté dans la figure), on sait que $\beta_1 = 2\alpha_1$ et que $\beta_2 = 2\alpha_2$. Donc,

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$$

D'où le résultat pour le second cas. Pour le dernier cas, on considère le point D (représenté dans la figure). On écrit

$$\beta = \angle BOD - \angle COD = \beta_1 - \beta_2 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha$$

D'où le résultat pour le troisième cas de figure. Et le théorème est alors démontré.

Soient O le centre d'un cercle $\mathcal{C}$, A, M et B trois points appartenant au cercle $\mathcal{C}$. Alors $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $\angle AMB = 90°$.

DÉMONSTRATION. Supposons que $[AB]$ est diamètre du cercle $\mathcal{C}$. Alors, l'angle $\angle BOC$ est un angle au centre interceptant l'arc BC, puisque M appartient au cercle $\mathcal{C}$, alors

$$\angle AMB = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$$

Réciproquement, si $\angle AMB = 90°$, alors

$$\angle AOB = 2\angle AMB = 2 \times 90° = 180°$$

Donc, les point A, O et B sont alignés. C'est équivaut à dire que $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$.

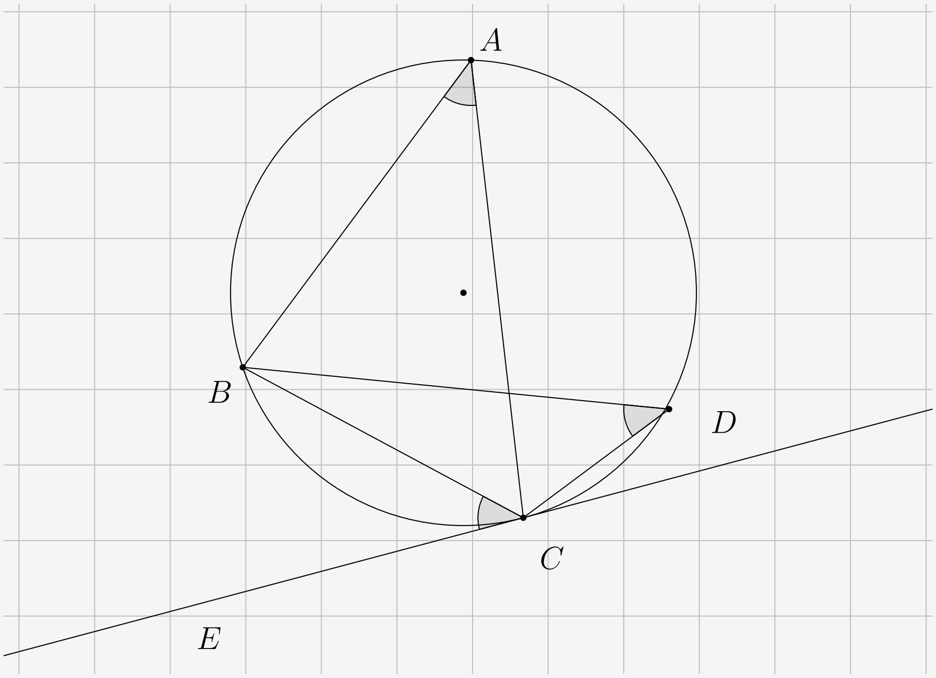
Dans un cercle, deux angles interceptant le même arc sont égales.

DÉMONSTRATION. Il suffit de considérer l'angle au centre interceptant le même arc. Il sera d'une part égal au double du premier angle, et d'une autre part égal au double du second angles.

En conclusion, deux angles interceptant le même arc sont égales. REMARQUE. La réciproque de ce théorème reste vraie. Autrement dit, si quatre points A, B, C et D du plan vérifie l'égalité

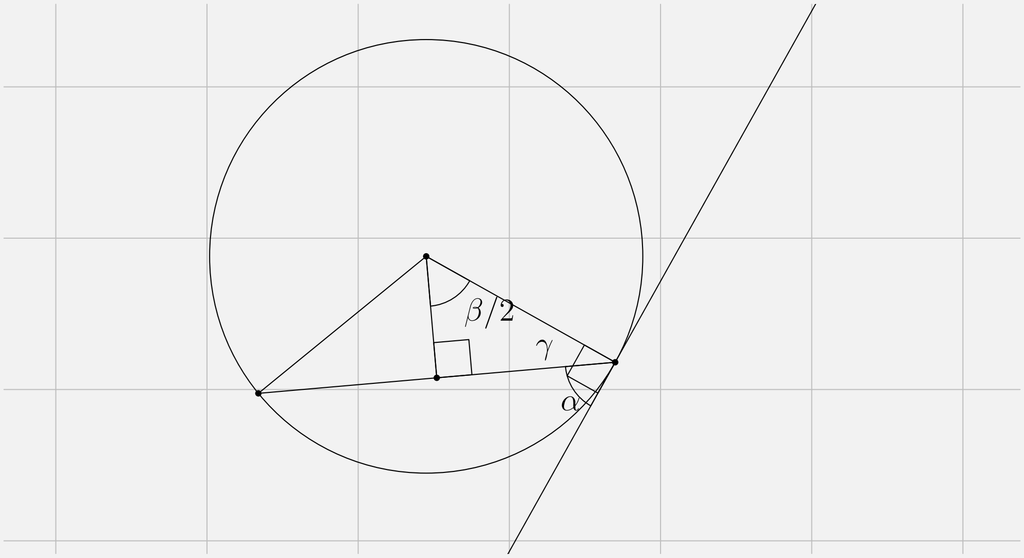
$$\angle ACB = \angle ADB$$

Alors, les quatre points A, B, C et D appartiennent au même cercle (on dit que les points A, B, C et D sont cocycliques).

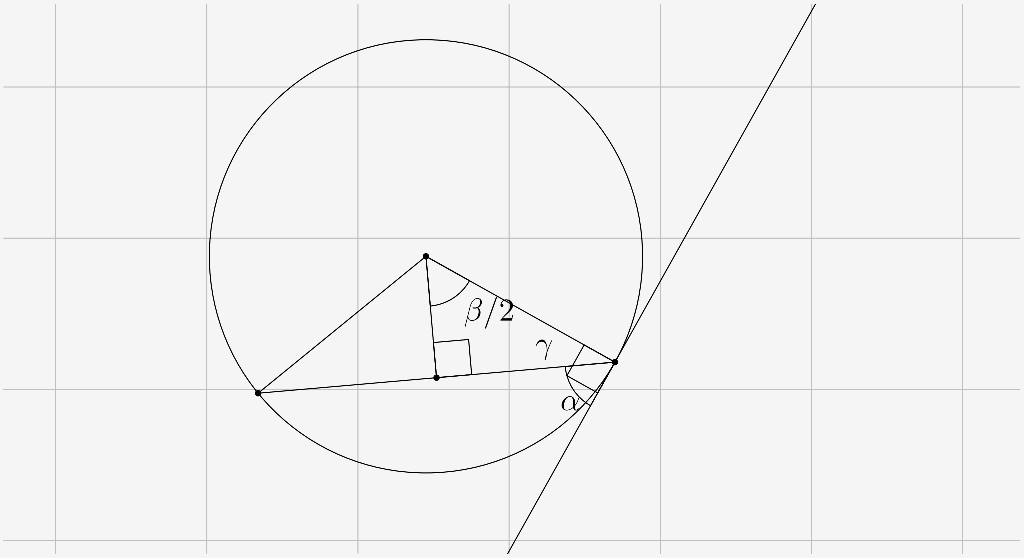


Observer la figure ci-dessus. On sait que $\angle BAC = \angle BDC$ (puisqu'ils interceptent le même arc BC). Qu'est ce qui se passe si on approche D de C. Intuitivement on aura $\angle BCE = \angle BAC$. C'est le théorème qu'on verra par la suite.

Dans la figure ci-dessous, on a $\beta = 2\alpha$,



DÉMONSTRATION. Comme ci-dessous, on observe que α et $\beta/2$ ont le même angle complémentaire γ dans $90°$. Donc, $\alpha = \beta/2$, c'est-à-dire $\beta = 2\alpha$, d'où le théorème.



On dit qu'un quadrilatère $ABCD$ est cyclique (ou que les points A, B, C et D sont cocycliques) si les points A, B, C et D appartiennent au même cercle.

On a déjà vu une propriétés sur les angles interceptant le même arc qui permet de montrer que quatre points sont cocycliques. Voyons cependant un théorème très important.

Soient X et Y deux points d'un cercle et Z et T deux points du même cercle de façon que ces deux points n'appartiennent pas tous les deux au même arc XY. Alors, on a

$$\angle XZY + \angle XTY = 180°$$

Remarque. La réciproque de ce théorème reste vraie de sorte que si quatre points du plan différents deux à deux X, Y, Z et T vérifie l'égalité

$$\angle XZY + \angle XTY = 180°$$

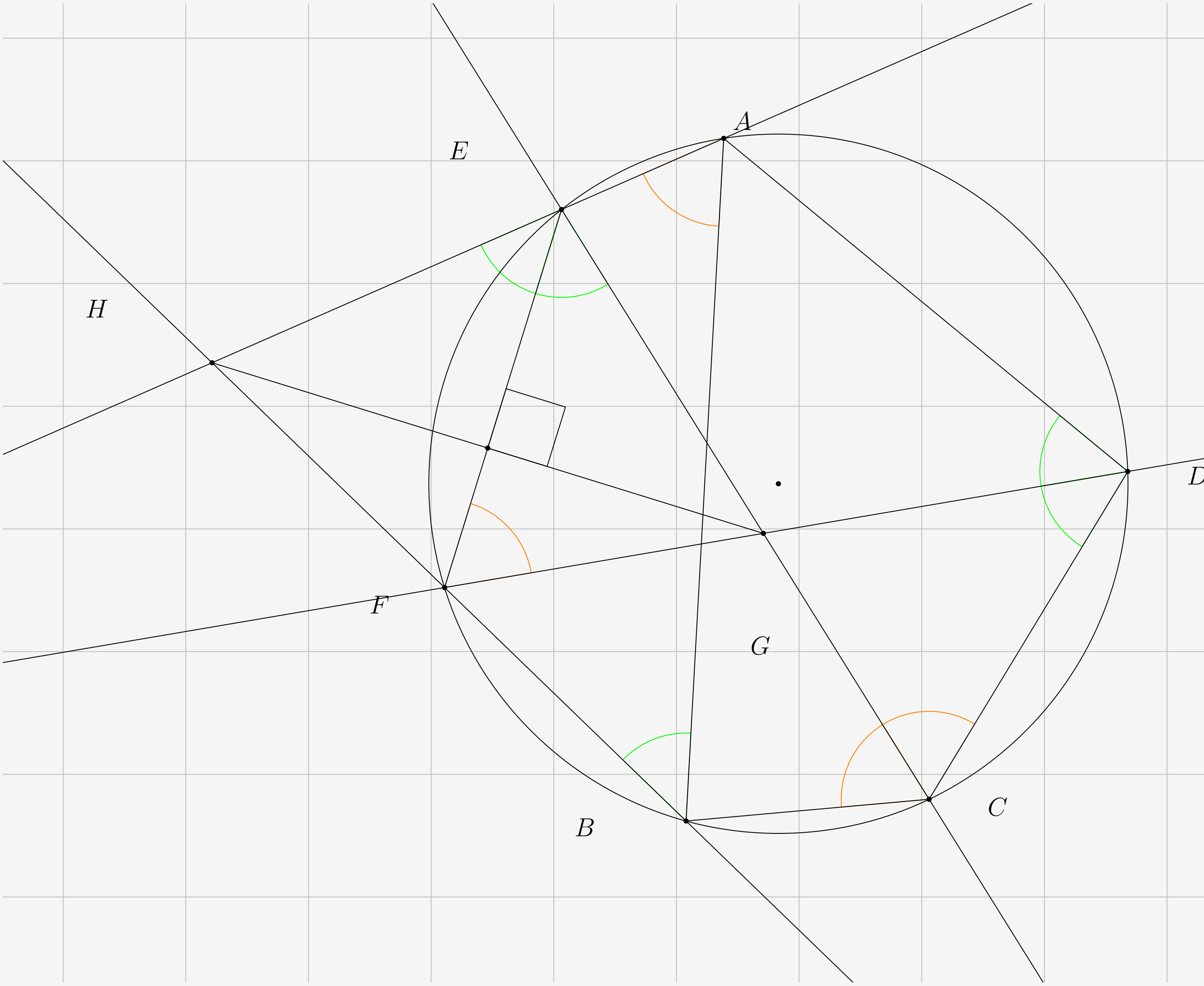
Alors, les points X, Y, Z et T sont cocycliques.

(Olympiade marocaine 2012) Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique avec $[AB]$ son côté le plus grand. Les bissectrices des angles $\angle BCD$ et $\angle ADC$ coupent respectivement le cercle circonscrit du quadrilatère $ABCD$ au points E et F. On appelle G le point d'intersection des droites (CE) et (DF) et H le point d'intersection des droites (AE) et (BF). Montrer que les droites (EF) et (GH) sont perpendiculaires.

Solution. Pour montrer que les droites (EF) et (GH) sont perpendiculaires, on va montrer que la droite (EF) est la médiatrice du segment $[GH]$. On sait que

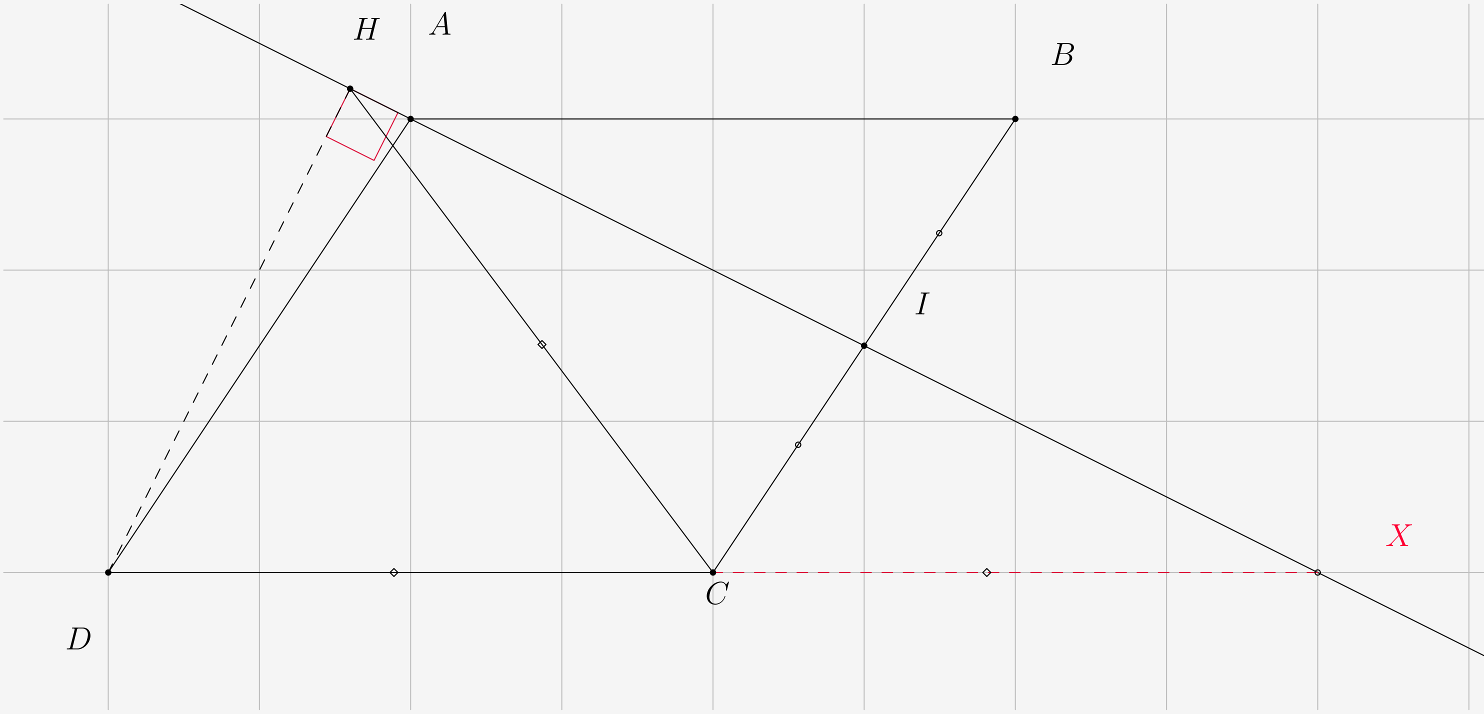
$$\angle FEC = \angle FDC = \angle FDA = \angle FEH$$

La dérnière égalité provient du fait que $AEFD$ est un quadrilatère cyclique. De même on montre $\angle HFE = \angle GFE$. On en déduit que la droite (EF) est la médiatrice du segment $[GH]$ par une simple manipulations sur les angles. Finalement, on a montré que (EF) et (GH) sont perpendiculaires.

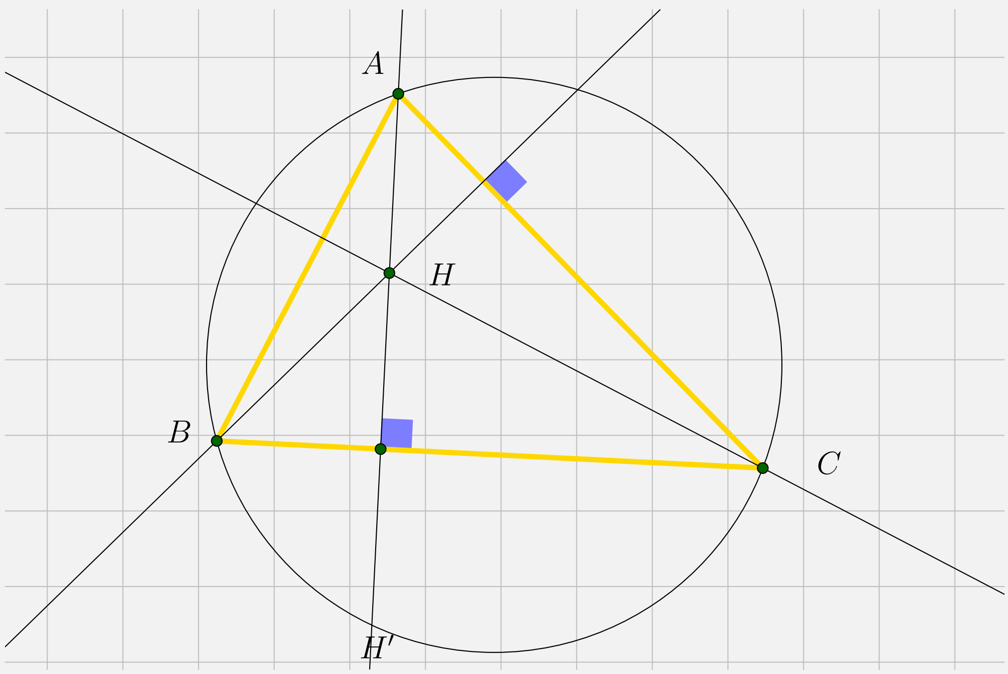


(Olympiade marocaine 2018) Soit $ABCD$ un parallélogramme et I le milieu du segment $[BC]$. Soit H la projection orthogonale du point D sur la droite (AI). Montrer que $CH = CD$.

Solution. Considérons la figure ci-dessous. Soit X l'intersection de la droite (DC) avec la droite (AI). On va montrer par la suite que C est le milieu du segment $[DX]$. Puisque I est le milieu de $[BC]$ et les deux droites (AB) et (CX) sont parallèles, alors I est le milieu de $[AX]$ et $CX = AB$. D'autre part, on sait déjà que $AB = DC$ (puisque $ABCD$ est un parallélogramme), il vient que $CD = CX$, donc C est le milieu de $[DX]$. On sait d'autre part que le triangle ΔDHX est rectangle en H. Donc, $CD = CH = CX$. En particulier, on a $CD = CX$. D'où le résultat souhaité.



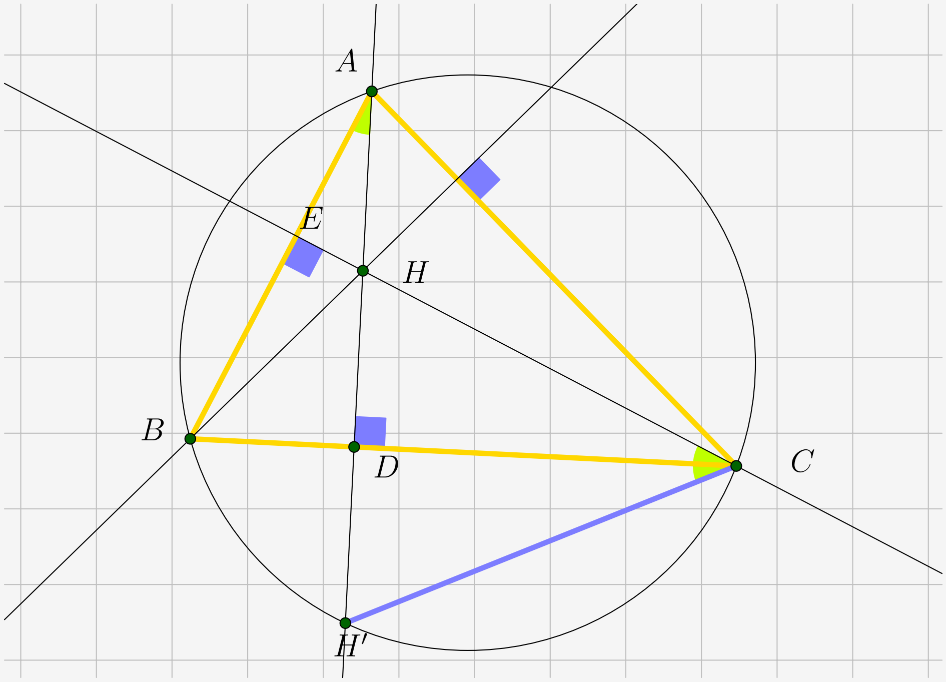
Soit ΔABC un triangle dont les angles sont tous aigus et soient H son orthocentre et H' la symétrique de H par rapport à la droite (BC), alors H' appartient au cercle circonscrit du triangle ΔABC.



DÉMONSTRATION. Considérons la figure ci-dessous. Il s'agit de montrer que les points A, B, H' et C sont cocycliques, c'est à dire $\angle BCH' = \angle BAH'$. Or, on sait que

$$\angle BCH' = \angle BCH = \angle DCE = \angle DAE = \angle BAH'$$

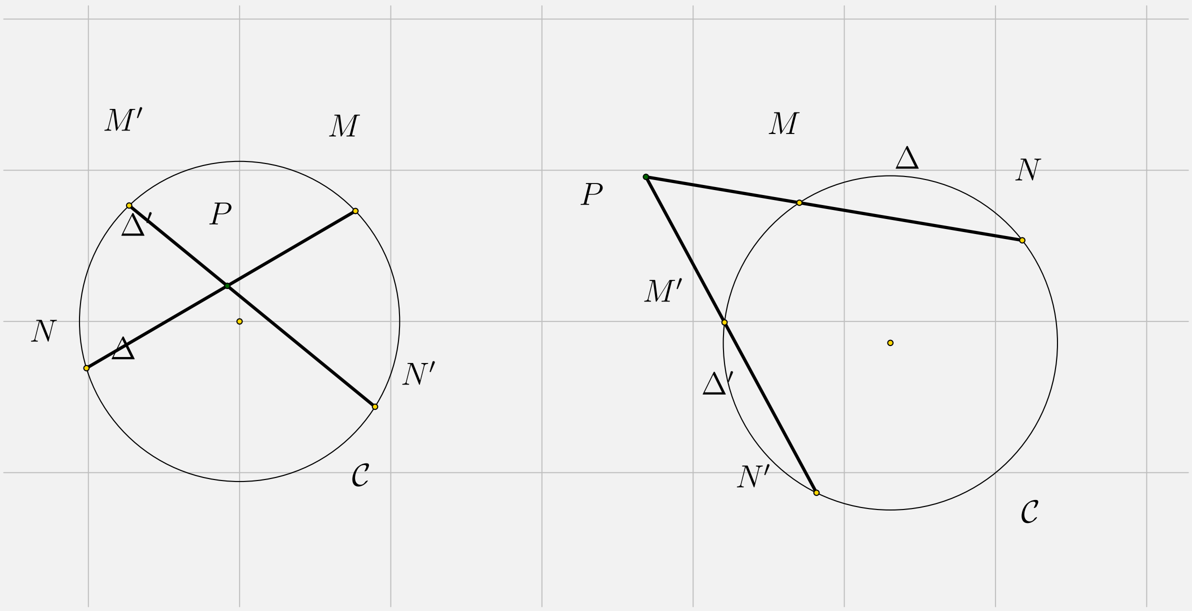
L'égalité $\angle DCE = \angle DAE$ provient du fait que $AEDC$ est un quadrilatère cyclique (car $\angle ADC = \angle AEC$). D'où le théorème.



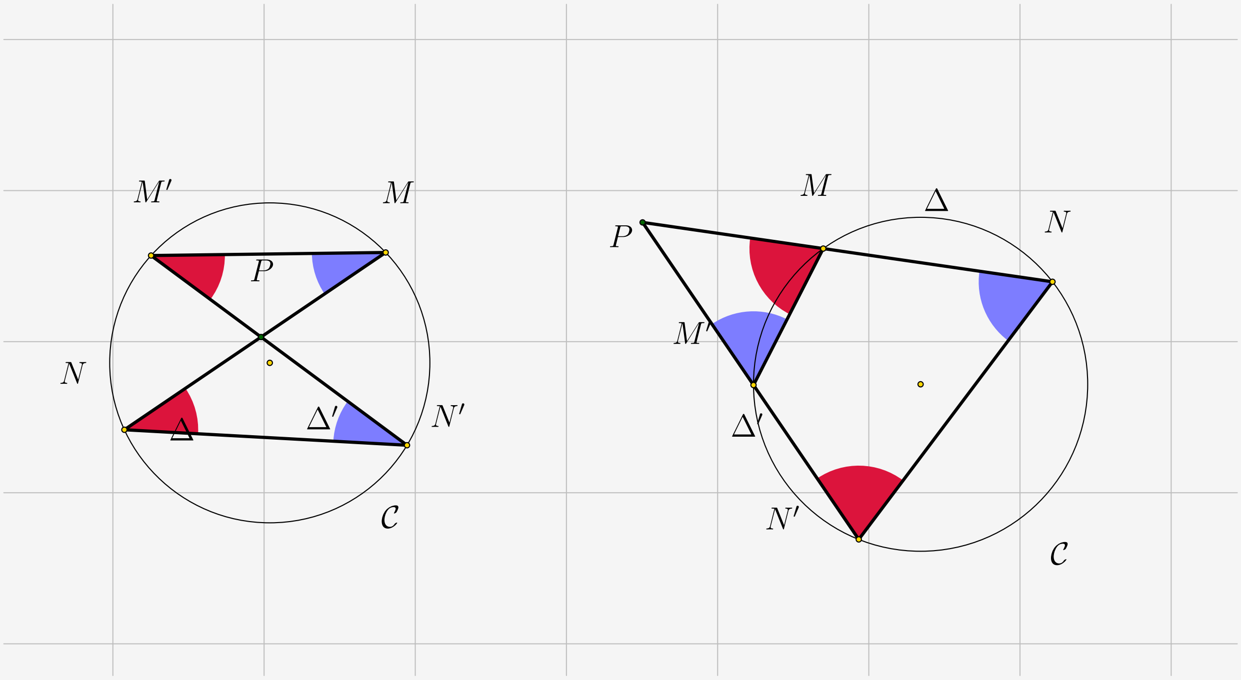
1.2.2 Puissance d'un point par rapport à un cercle

La puissance d'un point par rapport à un cercle est un nombre réel qui ne dépend que du cercle et de ce point. C'est un outil fondamental dans la résolution des problèmes de géométrie de type olympiade.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle et P un point quelconque du plan et soit Δ un point quelconque du plan passant par P et coupant le cercle $\mathcal{C}$ en deux points M et N. Le produit $PA \times PB$ ne dépend que du point P et du cercle $\mathcal{C}$. Autrement dit, Δ' est une autre droite passant par le point P et coupant le cercle $\mathcal{C}$ aux points M' et N', alors $PM \times PN = PM' \times PN'$.



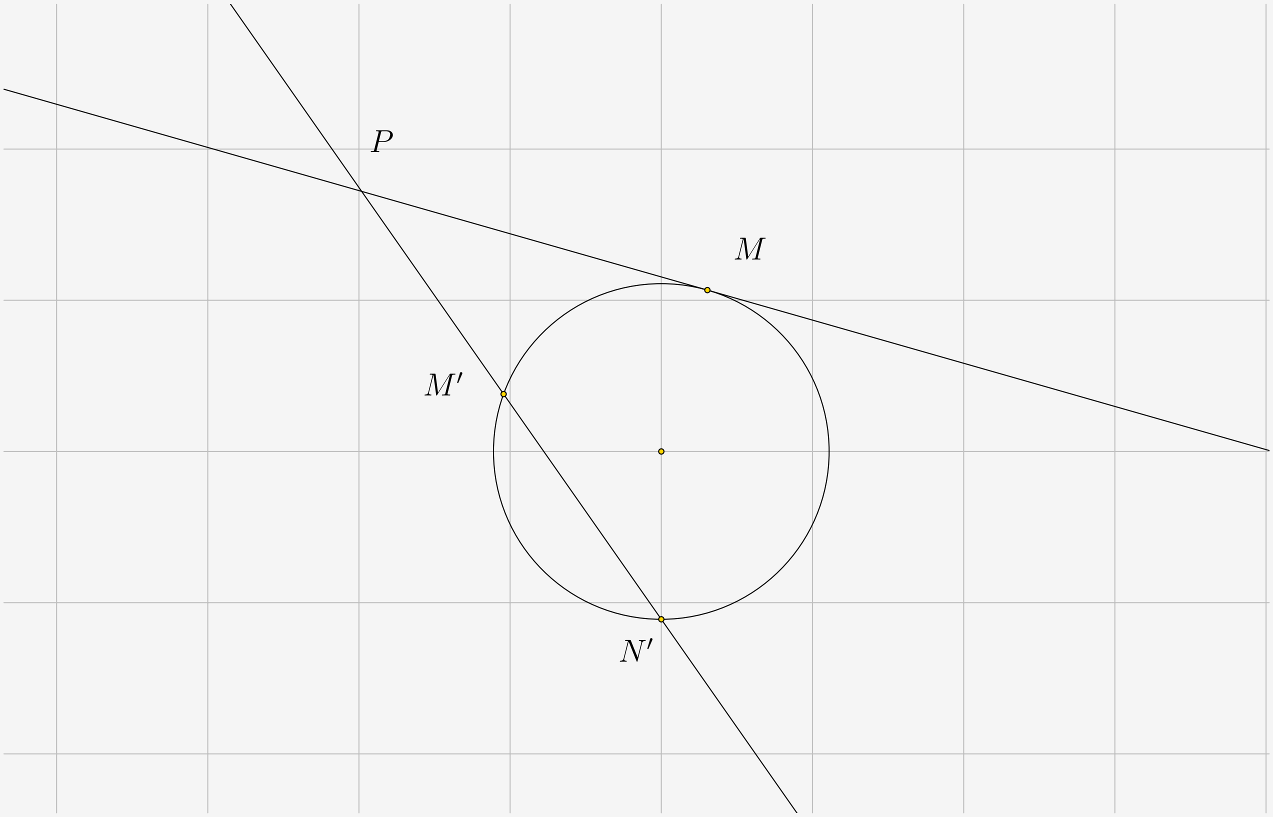
Démonstration. Considérons la figure ci-dessous.



Plaçons nous dans le cas où le point P se situe à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$ (le cas de figure à gauche). Les deux triangles $\Delta PMM'$ et $\Delta PN'N$ sont semblables (puisque l'on a $\angle PMM' = \angle PNN'$ et $\angle PM'M = \angle PNN'$. Donc,

$$\frac{PM}{PN'} = \frac{PM'}{PN}$$

Ce qui est équivaut à dire que $PM \times PN = PM' \times PN'$. De même on montre le résultat dans le second cas (la figure de droite), en considérant les deux triangles semblables $\Delta PMM'$ et $\Delta PN'N$.
REMARQUE. Il existe un cas limite dans lequel Δ est une tangente du cercle comme dans la figure ci-dessous.



Dans ce cas, on a alors

$$PM^2 = PM' \times PN'$$

REMARQUE. La preuve est similaire à celle utilisée dans la démonstration du théorème ci-dessus.

1.2.3 Théorème de Ptolémée

Soient A, B, C et D quatre points du plan, alors A, B, C et D sont cocycliques (dans cet ordre) si et seulement si on a l'égalité

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$$

REMARQUE. Pour la démonstration, on la laisse comme exercice pour le lecteur.

1.3 Exercices du premier chapitre

Exercice 1 (Olympiade nationale 2017). Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Les points D, E et F sont respectivement les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets A, B et C.

1. Montrer que $\angle BAO = \angle DAC$.
2. Montrer que les droites (OA) et (EF) sont perpendiculaires.

Exercice 2 (Olympiade nationale 2017). Soient ABC un triangle et (C) son cercle circonscrit. On considère un point E de la tangente (T) au cercle (C) au point A. Les points P et Q sont respectivement les projections orthogonales du point E sur les droites (AB) et (AC).

1. Montrer que les droites (PQ) et (BC) sont perpendiculaires.
2. La tangente (T) et la bissectrice intérieure de l'angle $\angle BAC$ coupent la droites (BC) respectivement aux points F et D. Montrer que $FD = DA$.

Exercice 3 (Olympiade nationale 2017). Soient ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit $\mathcal{C}$ et D le point diamétralement opposé à A. La droite tangente à $\mathcal{C}$ au point D coupe la droite (BC) en un point P. On considère le cas où la droite (OP) coupe les segments $[AB]$ et $[AC]$ aux points N et M. Montrer que $OM = ON$.

Exercice 4 (Olympiade nationale 2018). On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et soit $[AB]$ un de ses diamètres. Soit E un point extérieur au cercle $\mathcal{C}$ et n'appartenant pas à la droite (AB). Les droites passant par E et tangente au cercle $\mathcal{C}$ aux points S et T tel que S soit le plus proche au point A. Soit H la projection orthogonale du point E sur la droite (AB). Montrer que

$$\angle THE = \angle EHS$$

Exercice 7 (Olympiade nationale 2018). Soit $ABCD$ un trapèze tel que (AB) soit parallèle à (CD), $AB = 42$, $BC = 20$ et $DA = 15$. On considère le cercle $\mathcal{C}$ tangent aux droites (CD) et (AB) et de centre le point P le milieu su segment $[AB]$. Calculer le produit $PA \times PB$.

Exercice 8 (Olympiade nationale 2018). Soient $ABCD$ un parallélogramme et I et J sont, respectivement deux points des segments $[AD]$ et $[AB]$ tels que $ID = JB$. Montrer que

$$\angle BCP = \angle PCD$$

où P est le point d'intersection des droites (JD) et (BI).

Exercice 9 (Olympiade nationale 2019). Soit ABC un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. La hauteur issue du sommet A coupe le cercle $\mathcal{C}$ en un point D et coupe le segment $[BC]$ en un point E. Soit J le milieu du segment $[CD]$. Montrer que les droites (EJ) et (AB) sont perpendiculaires.

Exercice 10 (Olympiade nationale 2019). Soit (EA) une tangente à un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ au point A ($E \notin \mathcal{C}$). On considère une droite passant par E et coupant le cercle $\mathcal{C}$ aux points C et D telle que $C \in [ED]$. La droite (EO), où O le centre du cercle $\mathcal{C}$, coupe $[BC]$ et $[BD]$, respectivement, aux points F et G. Montrer que O est le milieu de $[FG]$.

Exercice 5 (Olympiade nationale 2018). On considère un rectangle $ABCD$ de centre O, de longueur AB et de largeur AD. Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle OBC. Le cercle $\mathcal{C}$ coupe le segment $[AB]$ en un deuxième point E. Montrer que le triangle AEC isocèle.

Exercice 6 (Olympiade nationale 2018). Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique tel que (AC) et (BD) sont perpendiculaires et Δ la droite l'image de la droite (AC) par la symétrie axiale d'axe la bissectrice intérieure de l'angle $\angle BAD$. Montrer que la droite Δ passe par le centre du cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$.

Exercice 11 (Olympiade nationale 2019). On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Soient (AB) et (AC) deux droites tangentes au cercle $\mathcal{C}$ aux points B et C. Le point E appartient au diamètre $[BD]$ tel que (CE) et (BD) soient perpendiculaires.

1. Montrer que
$$BE \times BO = AB \times CE$$
2. Montrer que
$$\frac{AB}{\sqrt{BE}} = \frac{BO}{\sqrt{ED}}$$

Exercice 12 (Olympiade nationale 2019). Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles tangents extérieurement au point T. Les deux droites Δ_1 et Δ_2 sont les deux tangentes communes à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement aux points E et F. La droite (ET) coupe $\mathcal{C}_2$ une seconde fois, au point G. Sachant que A est le point d'intersection et Δ_1 et Δ_2, montrer que les droites (AT) et (GF) sont parallèles.

CHAPTER 2

STRATÉGIES DE BASE

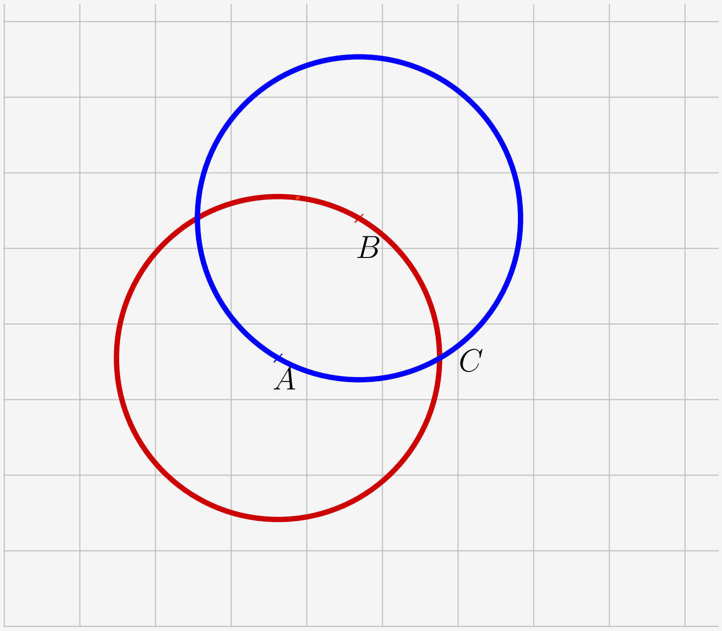
Ce chapitre concerne les stratégies de base que tout candidat souhaitant concourir pour les olympiades de mathématiques doit les connaître. De plus, les notions et les techniques présentées dans ce chapitre sont fondamentales dans la suite du cours de ce polycopié.

2.1 Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement logique, philosophique, scientifique consistant soit à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant l'absurdité de la proposition complémentaire (ou « contraire »), soit à montrer la fausseté d'une proposition en déduisant logiquement d'elle des conséquences absurdes. Nous allons donner par la suite des exercices concernant ce type de raisonnement et qui vont permettront d'illustrer le raisonnement par l'absurde.

> On colorie tous les points du plan par l'une des deux couleurs, le bleu ou le rouge. Montrer qu'il existe deux points du plan distants de 1 mètre et qui sont coloriés par la même couleur.

Solution. Montrons le résultat en procédant par l'absurde. Supposons que chaque fois que l'on choisit un point, tous les points qui lui sont distants de 1 mètre sont de couleur différente à sa couleur. Choisissons un point A qu'on supposera par exemple de couleur bleue. Le cercle de centre A est de rayon $r = 1$ mètre est l'ensemble des points distants de A de 1 mètre. Ce cercle doit donc être colorié en rouge, soit B un point de ce cercle, traçons le cercle de centre B et de rayon $r = 1$ mètre, ce cercle doit être colorié par le blue (puisque B est en rouge). Observons maintenant un point d'intersection des deux cercles, ce point C doit être à la fois bleue rouge et bleue. Ceci bien évidemment n'est pas possible, donc notre hypothèse de départ est fausse. Donc il existe forcément deux points vérifiant les hypothèses de l'exercice.



Soit n un entier naturel tel qu'il possède une puissance paire. Montrer que l'entier n est pair.

Solution. Soit m un entier tel que n^m est paire. Montrons que n est également pair. Par l'absurde, supposons que celui ci est impair, puisque le produit de nombres impairs est également impair, donc n^m est impair et ceci est contraire aux donnés de l'exercice.

Soient a, b et c trois nombres réels vérifiant

$$abc = 1 \qquad \text{et} \qquad a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Montrer que l'un au moins de ces réels est égal à 1.

Solution. Supposons que tous ces réels soient différents de 1. On sait que

$$a + b + \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + ab$$

Par la suite,

$$ab - (a + b) = \frac{1}{ab} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

En ajoutant 1 aux deux côtés de l'égalité et en factorisant, on obtient

$$(a-1)(b-1) = \left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right) = \frac{(a-1)(b-1)}{ab}$$

Puisque $a \neq 1$ et $b \neq 1$, alors en simplifiant par $(a-1)(b-1)$, on trouve $c = 1/ab = 1$, et ceci contredit les hypothèses. Finalement, l'un parmi les trois réels a, b et c doit être égal à 1.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a > b$. Montrer par l'absurde que

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \notin \mathbb{N}$$

SOLUTION. Rappelons qu'un nombre rationnel s'écrit d'une manière unique sous forme irréductible, nous aurons besoin de cette affirmation par la suite. Par l'absurde, supposons que ce rapport est un entier quand notera par la suite k. Quitte à diviser par le carré du plus grand diviseur commun de a et b, on peut supposer que a et b sont premiers entre eux. On a bien évidemment $k \geq 2$ puisque k ne peut être ni nul ni égal 1. On sait que $a^2 + b^2 = k(a^2 - b^2)$, donc $(k+1)b^2 = (k-1)a^2$ et par la suite

$$\frac{k+1}{k-1} = \frac{a^2}{b^2}, \qquad (*)$$

Soit d le plus grand diviseur commun de $k+1$ et $k-1$. Puisque d divise ces deux entiers, alors il divise leur différence qui vaut 2, donc $d \in \{1, 2\}$. Si $d = 1$, l'unicité, sachant que a^2 et b^2 sont premiers entre eux, l'unicité de l'écriture irréductible du nombre rationnel en $(*)$ permet de déduire que $k-1 = a^2$ et $b^2 = k+1$, donc $b^2 - a^2 = 2$, autrement dit $(a-b)(a+b) = 2$, l'un des deux entiers $a-b$ et $a+b$ est pair, puisque $a-b$ et $a+b$ ont même parité, alors leur produit (qui vaut 2) est divisible par 4, et ceci n'est pas possible. Supposons maintenant que $d = 2$, donc les deux entiers $(k+1)/2$ et $(k-1)/2$ sont premiers entre eux, et de plus

$$\frac{\frac{k+1}{2}}{\frac{k-1}{2}} = \frac{a^2}{b^2}$$

Le même argument d'irréductibilité de tout à l'heure permet d'affirmer que $(k+1)/2 = a^2$ et $(k-1)/2 = b^2$, d'où $a^2 - b^2 = 1$, puisque $a - b > 0$, donc $a + b > 2b \geq 2$ et ceci n'est pas possible avec $(a-b)(a+b) = 1$. En conclusion, le rapport k ne peut jamais être un entier naturel.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ des nombres réels appartenant à $[0, 1]$ où n un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $x_{k+1} - x_k \leq 1/n$.

SOLUTION. Supposons par l'absurde que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a $x_{k+1} - x_k > \dfrac{1}{n}$. Écrivons

$$x_{n+1} - x_1 = (x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + \ldots + (x_2 - x_1) > \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n \text{ fois}} = 1$$

Et ceci n'est pas possible, puisque x_{n+1} et x_1 appartiennent à $[0, 1]$. D'où le résultat par l'absurde.

Montrer que $1/3$ n'est pas un nombre décimal.

SOLUTION. Rappelons la caractérisation de divisibilité par 3, un entier naturel est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres dans la base décimale est divisible par 3. Revenons à notre exercice, par l'absurde, supposons que $1/3$ un nombre décimal, de sorte qu'il existe un entier a et un entier naturel n tel que $1/3 = a/10^n$, c'est à dire $3a = 10^n$, on peut tirer de cette égalité que 3 divise 10^n, ceci n'est pas possible car 3 ne divise par 1 la somme des chiffres de 10^n dans la base décimale.

> Soit p un entier naturel. Montrer que si $2^p - 1$ est un nombre premier, alors il en est de même pour p.

SOLUTION. Si $2^p - 1$ est un nombre premier et p est un nombre qui n'est pas premier, de sorte que l'on peut écrire $p = ab$ avec $2 \leq a, b \leq p - 1$, on a alors

$$2^p - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a - 1)(1 + 2^a + \ldots 2^{a(b-1)})$$

D'où $2^p - 1$ est divisible par $2a - 1 > 1$, donc $2^p - 1$ n'est pas premier, et ceci contredit l'hypothèse de départ. D'où le résultat par absurde. ➻ Rappelons que l'on a utilisé l'identité

$$a^n - 1 = (a - 1)(1 + a + \ldots + a^{n-1})$$

vraie pour tout nombre réel a et tout entier $n \geq 1$.

> Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

SOLUTION. Supposons que l'ensemble des nombres premiers est fini et notons $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ses éléments. On forme l'entier

$$N = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$$

Cet entier est bien évidemment ≥ 2, il admet par conséquent un diviseur premier qu'on notera p. Le nombre premier p apparaît dans le produit $p_1 p_2 \ldots p_n$, donc p divise N et $p_1 p_2 \ldots p_n$, il divise par conséquent leur différence qui vaut 1, ce qui constitue une absurdité claire. ➻ Tout entier naturel ≥ 2 admet un diviseur premier, ce résultat sera démontré dans la suite de ce cours.

2.2 Principe de récurrence et ses variantes

En mathématiques, le raisonnement par récurrence (ou raisonnement par induction, ou par induction complète) est une forme de raisonnement visant à démontrer une propriété portant sur tous les entiers naturels. Le raisonnement par récurrence consiste à vérifier que la propriété est vraie pour un premier rang n_0, puis montrer que la propriété est vraie pour le rang $n + 1$ sous hypothèse qu'elle soit vraie pour le rang n. Si ces deux conditions sont vérifiées, alors la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$. Nous allons donner des exemples bien choisis pour illustrer d'abord le raisonnement par récurrence simple, puis nous allons voir d'autres types de raisonnement par récurrence.

2.2.1 Raisonnement par récurrence simple

> Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a
>
> $$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

SOLUTION. On procède par une récurrence simple. *Initialisation.* L'identité est vraie pour le premier rang 1.

Hérédité. Supposons que l'identité soit vraie pour un certain rang n et montrons qu'elle est vraie également pour le rang $n+1$

$$1+2++(2n+1)=\underbrace{1+2+\ldots+(2n-1)}_{n^2 \text{ par hypothèse de récurrence}}+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

Donc, l'identité est vraie pour le rang $n+1$. En conclusion, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel non nul n, on a

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

> Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, l'entier n^3-n est divisible par 6.

Solution. Procédons par récurrence. Pour le rang $n=0$, il est clair que le résultat est vraie. Supposons que le résultat soit vrai pour un rang n. Il s'agit de montrer que $(n+1)^3-(n+1)$ est divisible par 6. On écrit

$$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=n^3-n+3(n^2+n)=n^3-n+3n(n+1)$$

L'entier n^3-n est divisible par 6, par hypothèse de récurrence. L'entier $n(n+1)$ étant pair (car c'est le produit de deux entiers consécutifs), l'entier $3n(n+1)$ est également divisible par 6. Donc $(n+1)^3-(n+1)$ est somme de deux entiers divisibles par 6. Il est donc divisible par 6. D'où le résultat par récurrence.

> Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, on a
>
> $$1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$$

Solution. Pour $n=2$, on a bien évidemment

$$1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}<\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2}$$

Supposons l'inégalité vraie pour le rang n, et montrons l'inégalité pour le rang $n+1$. Il suffit de montrer que

$$2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\leq 2-\frac{1}{n+1}$$

C'est équivaut à montrer que

$$\frac{1}{(n+1)^2}\leq\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

En mettant les fractions au même dénominateur, l'inégalité devient évidente. D'où par le principe de récurrence, on a pour tout entier $n \geq 2$

$$1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$$

(Inégalité de Bernoulli). Soit $x \geq 0$ un nombre réel. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a
$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Solution. Fixons un nombre réel $x \geq 0$. Pour $n \geq 0$, on a $(1+x)^1 \geq 1+x$. Supposons que le résultat soit vrai pour le rang n, pour le rang $n+1$ on a

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

D'où le résultat par récurrence.

2.2.2 Récurrence multiple

Dans des situations, où nous avons besoin de montrer une propriété portant des entiers naturels, de supposer une propriété vraie pour un nombre fini d'entiers consécutifs et que la récurrence simple n'est pas suffisante. Nous allons s'appuyer sur des exemples par la suite concernant ce type de récurrence.

Soient $x_0, x_1, x_2, \ldots$ des nombres réels tel que $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$ et le terme x_{n+2} est définie récursivement en fonction de x_{n+1} et x_n par

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}+x_n}{2} + 3n + \frac{7}{2}$$

pour tout entier naturel n. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $x_n = n^2$.

Solution. Le $(n+2)$-ème terme x_{n+2} est défini implicitement en fonction de ses deux termes précédents. Une récurrence simple ne suffit pas, puisque l'on a besoin de x_n et x_{n+1}. On utilisera une récurrence double. Pour l'initialisation, on vérifie que la propriété est vraie pour les deux premiers rangs, ce qui est immédiat. Supposons que $x_n = n^2$ et $x_{n+1} = (n+1)^2$ et montrons que $x_{n+2} = (n+2)^2$. On a

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}+x_n}{2} + 3n + \frac{7}{2} = \frac{n^2+(n+1)^2}{2} + 3n + \frac{7}{2} = n^2+4n+4 = (n+2)^2$$

Et la récurrence est établie.

Soit α un nombre réel non nul tel que

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\alpha^k + \frac{1}{\alpha^k} \in \mathbb{Z}$$

Solution. Commençons par remarquer si la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors il est vraie pour tout $k \in \mathbb{Z}^-$. Puisque l'on a pour $k \in \mathbb{Z}^-$,

$$\alpha^k + \frac{1}{\alpha^k} = \frac{1}{\alpha^k} + \alpha^k = \alpha^{-k} + \frac{1}{\alpha^{-k}} \quad (\text{et } -k \in \mathbb{N})$$

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété «$\alpha^n + 1/\alpha^n \in \mathbb{Z}$». Il s'agit de montrer que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. On va montrer ceci par récurrence. On a bien évidemment $\mathcal{P}(0)$ vraie, et $\mathcal{P}(1)$ est vraie par hypothèse. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies pour un certain entier naturel n. On remarque que

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}}\right) = \alpha^{n+2} + \frac{1}{\alpha^{n+2}} + \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}$$

Ensuite,

$$\alpha^{n+2} + \frac{1}{\alpha^{n+2}} = \Big(\underbrace{\alpha + \frac{1}{\alpha}}_{\in\mathbb{Z}}\Big)\Big(\underbrace{\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}}}_{\in\mathbb{Z}}\Big) - \Big(\underbrace{\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}}_{\in\mathbb{Z}}\Big) \in \mathbb{Z}$$

Et ceci achève notre récurrence.

2.2.3 Récurrence forte

La récurrence précédente peut être généralisée à plus d'hypothèses, 3, 4, etc. Mais tous ces principes apparaissent comme des cas particuliers du principe de récurrence suivant, parfois appelé récurrence forte, qui permet, pour démontrer la propriété au rang suivant de la supposer vraie pour tous les rangs inférieurs (pour cette raison, cette forme de récurrence est aussi appelée récurrence cumulative).

> Montrer que tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.

Solution. Soit $n \geq 2$ un entier, pour $n = 2$ le résultat est immédiat. Supposons que le résultat est vrai jusqu'au l'ordre n et montrons le pour le rang $n+1$. Si $n+1$ est premier, on a bien le résultat car $n+1 \mid n+1$, sinon $n+1$ est composé, c'est à dire qu'il existe $2 \leq a \leq n$ tel que $a \mid n+1$, puisque $a \leq n$ alors, il existe un nombre premier p divisant a, a étant un diviseur de $n+1$, on alors p divise $n+1$. Ce qui achève la récurrence.

> Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
>
> $$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$
>
> Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, le réel H_n ne peut pas être un entier naturel.

Solution. On a $H_2 = \dfrac{3}{2}$ et $H_3 = H_2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ il existe P_n, Q_n avec P_n impair et Q_n pair et tels que $H_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$, ce qui permettra de conclure. Pour $n = 2$, le résultat est vérifié. Supposons que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre n et montrons le pour le rang $n+1$. On a

$$H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} = \frac{P_n}{Q_n} + \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)P_n + Q_n}{(n+1)Q_n}$$

Si $n+1$ est impair, on prend $P_{n+1} = (n+1)P_n + Q_n$ et $Q_{n+1} = (n+1)Q_n$ et on achève la récurrence.

Sinon si $n+1$ est pair, on peut poser $n+1=2m$, on a alors

$$H_{n+1}=H_{2m} \quad =\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1} \quad =\frac{1}{2}\underbrace{H_m}_{P_m/Q_m}+\underbrace{\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}}_{\frac{K}{2L+1}}=\frac{P_m}{2Q_m}+\frac{K}{2L+1} \quad =\frac{(2L+1)P_m+2K}{2(2L+1)Q_m} \tag{2.1}$$

Sachant que $(2L+1)P_m+2KQ_m$ (resp. $2(2L+1)Q_m$) est impair (resp. pair) on obtient le résultat.

> Montrer qu'à l'aide de pièces de monnaie de 3 et 5, on peut payer n'importe quel tarif ≥ 8.

Solution. Pour tout entier $n \geq 8$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété «on peut payer le tarif de n, par des pièces de monnaie de 3 et 5». Il est clair que $\mathcal{P}(8)$ est vraie puisque l'on a $8=5+3$. Soit n un entier naturel ≥ 8 et on suppose que $\mathcal{P}(8), \mathcal{P}(9), \ldots, \mathcal{P}(k)$ sont vraies et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. Deux cas se présentent, si $k-5 \geq 8$, alors en remarquant que $k=(k-5)+3+3$ et que l'on peut payer un tarif de $k-5$ par des pièces de monnaie de 3 et 5 (par hypothèse de récurrence), alors on peut payer le tarif de $k+1$. Le second cas est le suivant, $k-5 \in \{4,5,6,7\}$, c'est à dire $k \in \{9,10,11,12\}$, on écrit $9=3+3+3, 10=5+5, 11=3+3+5$ et $12=3+3+3+3$ et on achève notre récurrence.

2.3 Principe de descente infinie de Fermat

Le principe de descente infinie selon lequel il n'existe pas de suite d'entiers naturels strictement décroissante. Si à partir d'une solution, on sait construire une *plus petite* strictement, et qu'on peut recommencer indéfiniment, alors le problème de départ n'a pas de solution. Donnons quelques exemples de situations permettant d'illustrer cette technique.

> Trouver tous les entiers x, y et z qui vérifient l'équation
> $$x^3+2y^3=4z^3 \quad ?$$

Solution. On va montrer que cette équation n'admet pas de solution autre que le triplet $(0,0,0)$. Supposons qu'il existe une solution non nul pour cette équation, on note (x_0, y_0, z_0) le triplet non nul vérifiant cette équation et tel que $|x_0|+|y_0|+|z_0|$ soit minimal. On a alors $x_0^3=2(2z_0^3-y_0^3)$, donc x_0^3 est pair et on déduit que x_0 est pair; on écrit $x_0=2x_0'$ pour un certain un entier x_0', on observe que $4x_0'^3=2z_0^3+(-y_0)^3$, donc le triplet $(-y_0, z_0, x_0')$ est encore solution de l'équation de base. Donc $|y_0|+|z_0|+|x_0'| \geq |x_0|+|y_0|+|z_0|$, on tire $2|x_0'| \leq |x_0'|$, alors $|x_0'|=0$, finalement $x_0=0$. Par conséquent $y_0^3=2z_0^3$, un argument similaire que le précédent permet de montrer que $y_0=0$, par conséquent $z_0=0$. Donc $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$. Réciproquement, le triplet $(0,0,0)$ s'agit bien d'une solution. En conclusion, l'unique solution de l'équation en question est $(0,0,0)$.

> Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Solution. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2}=x/y$, c'est à dire $x^2=2y^2$. Soit (x_0, y_0) un couple d'entiers naturels vérifiant $x_0^2=2y_0^2$ tel que x_0 soit minimal.

On sait que $x_0^2 = 2y_0^2$, donc x_0^2 est pair, et donc x_0 l'est également. Écrivons $x_0 = 2x_0'$, et alors $4x_0'^2 = 2y_0^2$, c'est à dire $y_0^2 = 2x_0'^2$, la minimalité du couple (x_0, y_0) permet d'affirmer que $y_0 \geq x_0$, mais on sait que $x_0/y_0 = \sqrt{2} > 1$, d'où l'absurdité.

2.4 Parties de $\mathbb{N}$

Une partie non vide de l'ensemble $\mathbb{N}$, admet un plus petit élément et une partie non vide de l'ensemble $\mathbb{N}$ qui est majoré, elle est finie et elle admet par conséquent un plus grand élément. Ces deux propriété sont d'une importance capitale, et peuvent être la clé de solution dans plusieurs situations de type olympiade.

> Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Solution. Supposons par l'absurde que l'on peut écrire $\sqrt{2} = p/q$ où p et q deux entiers naturels non nuls. Parmi tous les couples (p, q) vérifiant $\sqrt{2} = p/q$, soit (p_0, q_0) un tel couple de façon que q_0 soit minimal. Or, on remarque que

$$\sqrt{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{2-p/q}{p/q-1} = \frac{2q-p}{p-q}$$

Et puisque $2q - p$ et $p - q$ sont des entiers naturels, le caractère minimal de q permet d'affirmer que $p - q \geq q$ et alors $\sqrt{2} = p/q \geq 2$, ce qui est bien évidemment impossible.

> Montrer que pour tout nombre réel $x \geq 1$, il existe un entier naturel q vérifiant
>
> $$10^q \leq x < 10^{q+1}$$

Solution. On forme l'ensemble

$$E = \{n \in \mathbb{N}, \quad 10^n \leq x\}$$

L'ensemble E est une partie non vide de $\mathbb{N}$ qui contient 0, elle est de plus majoré par x puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \leq 10^n \leq x$ (pour $n \in E$). L'ensemble E admet donc un plus grand élément qu'on notera q par la suite. On a bien évidemment $q + 1 \notin E$ (puisque $q + 1 > q$), donc $10^{q+1} > x$. D'où l'existence d'un entier naturel q vérifiant $10^q \leq x < 10^{q+1}$. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des

nombres rationnels est dense dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ dans le sens où entre deux réels différents, il existe un nombre rationnel.

> Soient x et y deux nombres réels positifs tels que $y - x > 1$, alors il existe un entier naturel compris entre x et y.

Solution. Si x où y est entier, alors c'est fini. Sinon, on forme l'ensemble $X = \{n \in \mathbb{N}, \quad n \leq x\}$. L'ensemble X est une partie non vide (contient 0) et elle est majoré (par x). L'ensemble X admet donc un plus grand élément qu'on notera p. On note $m = p + 1$, on montrera par la suite que m est compris entre x et y, on a clairement $m > x$ puisque $m \notin X$ (car $m > p$ et p le plus grand élément de X). Pour la seconde inégalité, on a $y > x + 1 \geq p + 1 = m$. D'où le résultat. ➻

On a utilisé et on utilisera une propriété dite d'Archimède qui affirme que tout nombre réel possède un entier relatif qui le majore. ➽ Cette propriété qu'on vient de démontrer peut être généralisée de la façon suivante; entre deux réels de différence > 1, il existe un entier relatif.

> (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). Montrer qu'entre deux nombres réels différents, il existe un nombre rationnel.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. D'après la propriété d'Archimède il existe un $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{y-x} < q$. Donc $1 < qy - qx$, on en déduit qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $qx \leq p \leq py$, c'est à dire $x \leq \dfrac{p}{q} \leq y$, en posant $r = p/q$, on a $x \leq r \leq y$, ce qui permet de conclure.

> Montrer que tout entier naturel $n \geq 2$ admet un diviseur premier.

Solution. Soit $n \geq 2$ un entier. Notons D_n l'ensemble des diviseurs de n qui sont différents de 1, $D_n = \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid n,\, d \neq 1\}$. L'ensemble D_n est non vide puisque n divise n, l'ensemble D_n étant une partie de $\mathbb{N}$, elle admet alors un plus petit élément qu'on notera p. Montrons que p est nombre premier. Supposons que p admet un diviseur q, $1 < q < p$, alors q divise n par transitivité. Il vient que $q \in D_n$. Donc $q \geq p$ par construction de p. Et cela contredit le fait que q est compris entre 2 et $p - 1$.

> On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $[[1, n]]$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n. Soit $f : [[1, n]] \to [[1, n]]$ une application croissante. Montrer que f admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe $m \in [[1, n]]$ vérifiant $f(m) = m$.

Solution. On forme l'ensemble

$$E = \{p \in [[1, n]], \quad f(p) \geq p\}$$

L'ensemble E est non vide car il contient 1, de plus E est majoré par n. Notons alors m le plus grand élément de E. Montrons par la suite que $f(m) = m$, on sait déjà que $f(m) \geq m$ puisque $m \in E$. On sait que $m+1 \notin E$, donc $f(m+1) < m+1$, alors $f(m+1) \leq m$, mais $f(m) \leq f(m+1)$ par croissance de f, donc $f(m) \leq m$. La double inégalité permet de conclure.

> Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante, montrer que pour tout entier naturel n, on a $f(n) \geq n$.

Solution. *Première méthode.* Supposons qu'il existe un entier naturel p tel que $f(p) < p$. Bien sur, on a $p \geq 1$ puisque $f(0)$ ne peut pas être < 0. On forme l'ensemble

$$E = \{p \in \mathbb{N}^*, \quad f(p) < p\}$$

Cet ensemble est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (par hypothèse). Elle admet donc un plus petit élément qu'on notera $n_0 \geq 1$. Remarquons que la croissance stricte de f entraîne $f(n_0 - 1) \leq f(n_0) - 1$, donc $f(n_0 - 1) < n_0 - 1$, d'où $n_0 - 1 \in E$ et ceci contredit la minimalité de n_0. D'où le résultat par absurde ! *Seconde méthode.* On montre le résultat par une récurrence simple. On a bien évidemment $f(0) \geq 0$. Supposons que $f(n) \geq n$, pour le rang $n+1$, on a $f(n+1) \geq f(n)+1 \geq n+1$.

D'où le résultat par récurrence. *Troisième méthode.* On remarque que pour tout entier naturel k, on a $f(k+1)-f(k)\geq 1$. On fixe $n\in\mathbb{N}$, et on écrit

$$f(n)-f(0)=[f(n)-f(n-1)]+\ldots+[f(1)-f(0)]\geq \underbrace{1+\ldots+1}_{n\text{ fois}}=n$$

Donc, pour tout entier naturel n, on a $f(n)\geq n+f(0)\geq n$. D'où le résultat. ➽ Cet exercice cache une intuition géométrique intéressante. En effet, en considérant le graphe de la fonction f vérifiant les hypothèses de l'exercice. Pour tracer le point de coordonnées $(n+1, f(n+1))$, il faut passer à la limite du point de coordonnées entières $(n, f(n))$ au point $(n, f(n)+1)$ (puisque $f(n+1)>f(n)$). Ce qui est explique le fait qu'on reste toujours au-dessus de la première bissectrice du repère orthonormé direct !

2.5 Exercices du deuxième chapitre

Exercice 1. Montrer par récurrence que toute fonction croissante de $[[1,n]]$ vers $[[1,n]]$ possède un point fixe où n un entier naturel non nul.

Exercice 2. Montrer que pour tout entier $n\geq 1$, on a

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Exercice 3. Montrer que pour tout entiers $m\geq n\geq 3$, on a

$$m^n\geq n^m$$

Exercice 4. Soient a,b et c trois entiers impairs. Montrer que l'équation

$$ax^2+bx+c=0$$

n'admet de solution rationnelle.

Exercice 5 (Hongrie 2000). Trouver tous les nombres premiers p pour lesquels des entiers naturels non nuls tels que

$$p^n=x^3+y^3$$

Exercice 6. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a 133 divise $11^{n+2}+12^{2n=1}$.

Exercice 7 (Théorème des deux couleurs). On se donne $n\geq 1$ droites distinctes dans le plan. Montrer que l'on peut colorer les régions déterminées par ces n droites à l'aide d'au plus deux couleurs de telle manière que deux régions qui partagent une frontière sont de couleurs différentes.

Exercice 8. Soient n un entier naturel non nul et $(s_1,\ldots,s_n)$ une permutation de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$. Montrer que le produit

$$(a_1-1)(a_2-2)\ldots(a_n-n)$$

est pair.

Exercice 9. Soit $n\geq 3$ un entier naturel. Montrer que la somme des mesures des angles d'un n-gone est $(n-2)\pi$.

Exercice 10. Démontrer que les nombres $1007, 10017, 100117, 1001117,\ldots$ sont tous divisibles par 53.

Exercice 11. Soit N un entier naturel qui n'est pas un carré parfait. Montrer que $\sqrt{N}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 12. Soit $n\geq 6$. Montrer que l'on peut découper un carré en n carrés plus petits.

CHAPTER 3

THÉORIE DES NOMBRES (ARITHMÉTIQUE)

La théorie des nombre constitue l'un des quatre axes des olympiades de mathématiques, cet axe étudie les propriétés des entiers et la relation de divisibilité entre eux, les nombres premiers ...

3.1 Divisibilité

Étant donné deux entiers relatifs n et $d \neq 0$, on dit que d divise n s'il existe un entier q tel que $n = dq$. On dit que n est un multiple de d. Un entier naturel p est dit premier si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p. On dit que deux entiers ne sont pas premiers entre eux s'il existe un diviseur non trivial (différent de 1) qui les divisent tous les deux.

> Si un entier non nul d divise un entier n, alors d divise n'importe quel multiple de n.

Démonstration. Puisque d divise n, alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n = qd$. Soit m un multiple de n, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = kn$, donc $m = kq \times d$, d'ou d divise m.

> Soient a, b, c et d des entiers tels que a divise c et b divise d, alors ab divise cd.

Démonstration. Les entiers c et d sont des multiples respectifs de a et b, donc $c = aq$ et $d = aq'$ pour des certains entiers q et q'. Par la suite, on obtient $cd = q_1 q_2 ab$ et en posant $q = q_1 q_2$, on a $cd = q \times ab$. Donc ab divise cd.

> Un entier d qui divise deux entiers, divise alors leur somme et leur différence.

Démonstration. On procède comme dans les deux démonstrations précédentes. On donnera par la suite une propriété fondamentale qu'on admettra par la suite.

> Si un nombre premier divise le produit de deux entiers a et b, alors p divise a ou b.

➽ Il résulte que si un nombre premier p divise une puissance d'un entier, alors p divise cet entier.

> Soient n un entier. Montrer que les deux entiers n^{2019} et $n^{2020}+n+1$ sont premiers entre eux.

Solution. Par l'absurde, supposons que ces deux entiers ne sont pas premiers entre eux. Il existe donc un nombre premier qu'on le notera p qui les divises tous les deux. Par conséquent p divise n (puisque n^{2019} est une puissance de n), le fait que p divise n entraîne que p divise $n^{2020}+n$ qui est un multiple de n, et puisque p divise $n^{2020}+n+1$, donc il divise leur différence 1 et ceci n'est pas possible avec p premier, ceci achève notre preuve.

> Montrer que l'entier n^4+n^2+1 ne peut jamais être un nombre premier pour un entier $n \geq 2$.

Solution. On utilise la fameuse identité dite de Sophie Germain, en effet

$$n^4+n^2+1 = n^4+2n^2+1-n^2 = (n^2+1)^2-n^2 = (n^2-n+1)(n^2+n+1)$$

Les entiers n^2-n+1 et n^2+n+1 étant tous les deux supérieurs ou égal à 2, l'entier n^2+n^2+1 ne peut pas être un nombre premier.

> On considère le polynôme à coefficients entiers de degré ≥ 1 suivant
>
> $$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$$
>
> Montrer qu'une racine entière de P divise nécessairement a_0.

Solution. Soit α une racine entière de P. On sait que

$$P(\alpha) = \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

Donc

$$\alpha \times (\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \ldots + a_1) = -a_0$$

Finalement α divise a_0 et ceci permet de conclure.

> Résoudre dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ l'équation suivante
>
> $$x^3+7 = 8x^2+6x$$

Solution. Il s'agit de trouver les racines réelles du polynôme X^3-8X^2-6X+7. Commençons par chercher les racines entières de ce polynôme. D'après le résultat de l'exercice précédent, une racine α du polynôme en question doit diviser 7, par conséquent $\alpha \in \{-7,-1,1,7\}$. Un test immédiat montre que $\alpha = 7$. Une division euclidienne de X^3-8X^2-6X+7 par $X-7$, montre que

$$X^3-8X^2-6X+7 = (X-7)(X^2-X+1)$$

Or, le polynôme X^2-X+1 n'a pas de racine réelle (car il est de discriminant strictement négatif). Donc l'ensemble des solutions réelles de l'équation est $\{7\}$.

Soient x et y deux entiers naturels tel que x divise y et $y \neq 0$, alors on a x est nécessairement inférieur ou égal a y.

Démonstration. L'entier naturel x divise $y \neq 0$, par conséquent on a l'existence d'un entier $k \neq 0$ tel que $y = kx$, autrement dit $y/x = k \geq 1$. D'où le résultat.

Soient x et y deux entiers naturels non nuls tel que chacun divise l'autre. Alors, ces deux entiers sont égaux, c'est à dire $x = y$.

Démonstration. Puisque x divise y et y est non nul, alors $x \leq y$, de même on obtient $y \leq x$. La double inégalité fournit alors $x = y$.

Trouver tous les couples d'entiers naturels (x, y) qui vérifient l'équation suivante

$$x^2 = y! + 2001$$

où pour un entier naturel $n \geq 1$, l'entier $n!$ désigne le produit de tous les entiers compris entre 1 et n ($n!$ est dite factorielle de n) et par convention, on prend $0! = 1$.

Solution. Il est clair que y doit être non nul puisque 2002 n'est pas un carré parfait (on peut par exemple l'encadrer entre deux carrés parfaits $1936 = 44^2$ et $2025 = 45^2$). Il en est de même, pour $y \in \{1, 2\}$, les entiers $2002, 2003, 2007$ ne sont pas des carrés parfaits. Par conséquent, s'il existe une solution (x, y), alors $y \geq 3$, donc 3 divise $y!$ (puisque 3 apparaît dans le produit $y!$), d'où 3 divise $y! + 2001 = x^2$, puisque 3 est un nombre premier on déduit que 3 divise x, donc 9 divise x^2, mais 9 ne divise pas 2001, 9 ne doit pas diviser $y!$ (sinon 9 va diviser $2001 = x^2 - y!$), donc $y \leq 5$ car dans le cas contraire, on va avoir 9 divise $y!$ (puisque 3 et 6 apparaîtront dans $y!$ -par conséquent $y!$ va être multiple de 18 qui est multiple de 9). Finalement, on a pu borné raisonnablement y, de plus $y \in \{3, 4, 5\}$. Un test immédiat montre que l'unique couple solution de l'équation est $(45, 4)$.

Trouver tous les entiers naturels n tels que $n^2 + 11$ divise $n^3 + 13$

Solution. Soit n un tel entier, on sait que d'une part $n^2 + 11$ divise $n^3 + 13$ et d'autre par $n^2 + 11$ divise $n^3 + 11n = n(n^2 + 11)$, donc $n^2 + 11$ divise

$$11n - 13 = (n^3 + 11n) - (n^3 + 13)$$

Ce terme est bien évidemment non nul, et $n = 1$ n'est pas solution, et puisque $11n - 13 > 0$ pour $n \geq 2$, on a $n^2 + 11 \leq 11n - 13$, on vérifie facilement que n doit être ≤ 11. Un test permet de voir que $n = 3$ et $n = 8$ sont les solutions du problème.

Soit n un entier naturel. Montrer que si n est un nombre impair, alors pour tout entier naturel k, l'entier $n^{2^k} - 1$ est divisible par 2^{k+1}.

Solution. *Première méthode.* On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Pour $k = 0$, le résultat est évident puisque $n - 1$ est un nombre pair. Supposons que le résultat est vrai pour le rang k et montrons qu'il reste vrai pour le rang $k+1$. Pour le rang $k+1$, on a

$$n^{2^{k+1}} - 1 = \left(n^{2^k}\right)^2 - 1 = \underbrace{\left(n^{2^k} - 1\right)}_{\text{divisible par } 2^{k+1}} \underbrace{\left(n^{2^k} + 1\right)}_{\text{divisible par } 2}$$

Donc, l'entier $n^{2^{k+1}} - 1$ est divisible par 2^{k+2}, d'où le résultat souhaité par récurrence. *Seconde méthode.* La seconde méthode consiste à écrire le terme $n^{2^k} - 1$ sous forme de produit de $k+1$ entiers pair. En effet

$$n^{2^k} - 1 = (n-1)(n+1)(n^2+1)\ldots\left(n^{2^{k-1}} + 1\right)$$

Chacun des termes de ce produit est pair, puisque n est impair. Ce sont en nombre $k+1$, le résultat parait maintenant évident.

(Olympiade marocaine 2015) Déterminer tous les couples d'entiers naturels (n, m) tels que

$$(m+n)^2 \quad \text{divise} \quad 4(mn+1)$$

Solution. On sait que si $(m+n)^2$ divise $4(mn+1)$, alors

$$(m+n)^2 \leq 4(mn+1)$$

puisque le terme de droite est clairement strictement positif. Cette dernière inégalité est équivalent à $(m-n)^2 \leq 4$. Autrement dit $|m-n| \leq 2$. Supposons par symétrie des rôles de m et n que $m \geq n$, donc $m - n \in \{0, 1, 2\}$, donc les solutions éventuelles sont (n, n), $(n, n+1)$ et $(n, n+2)$. La réciproque, montre que les solutions possibles (sous l'hypothèse $m \geq n$) sont $(1,1), (0,1)$ et tous les couples d'entiers naturels $(n, n+2)$. Finalement, l'ensemble des solutions S du problème est

$$S = \{(0,1), (1,0), (1,1), (n, n+2), (n+2, n) / \quad n \in \mathbb{N}\}$$

3.2 PGCD-PPCM

La notion du plus grand diviseur commun de deux entiers est fondamentale en arithmétique. Nous allons voir par la suite les propriétés essentielles portant sur le pgcd et le plus petit commun multiple.

3.2.1 Plus grand diviseur commun de deux entiers

Soient a et b deux entiers relatifs, le plus grand diviseur commun de a et b est le diviseur de commun d de a et b tel que tout diviseur commun d' de a et b divise d. Le plus grand diviseur commun de deux entiers a et b est souvent noté $a \wedge b$ ou $\text{pgcd}(a, b)$. Deux entiers sont dit premiers entre eux si leur plus grand diviseur commun vaut 1.

Soient a et b deux entiers relatifs et $n \geq 1$ un entier naturel. Montrer que

$$a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$$

Démonstration. On pose d le membre de gauche de l'identité en question et Δ le membre de de droite. Puisque d et Δ sont positifs (par définition du pgcd), alors il suffit de montrer que d

divise Δ et que Δ divise d. On sait que $(a \wedge b)$ divise a, donc $\Delta = (a \wedge b)^n$ divise a^n et de même on a Δ divise b^n. L'entier Δ, alors divise le plus grand diviseur commun de a^n et b^n, il divise alors d. Finalement, Δ divise d. Montrons maintenant que d divise Δ, par l'absurde supposons qu'on a pas ceci de sorte qu'il existe un nombre premier qu'on notera p qui divise d et qu'il ne divise pas Δ, p divise d alors p divise a^n et p divise b^n, par conséquent p divise a et b, il divise alors leur pgcd $a \wedge b$, finalement p divise $(a \wedge b)^n = \Delta$, ceci est bien évidemment n'est pas possible puisque p est supposé qu'il ne divise pas Δ. D'où le résultat.

> Soient a et b deux entiers naturels tels qu'il existe un entier naturel non nul p vérifiant a^p divise b^p. Montrer que a divise b.

Démonstration. L'entier a^p divise b^p, donc $a^p = a^p \wedge b^p$ et par la suite

$$a^p = a^p \wedge b^p = (a \wedge b)^p$$

en utilisant le résultat de l'exercice précédent. Les deux entiers a et $a \wedge b$ sont positifs, donc $a = a \wedge b$, d'où a divise b.

> Soient a et b deux entiers naturels. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si $a + b$ et ab sont premiers entre eux.

Solution. Supposons que $a + b$ et ab sont premiers entre eux et soit d le plus grand diviseur commun de a et a. On sait que d divise a et b, donc d divise la somme $a + b$ et divise ke produit ab. Par conséquent d divise le pgcd de ces deux derniers qui vaut 1 par hypothèse, donc d divise 1, puisque d est positif, alors $d = 1$. Pour la réciproque, supposons que a et b sont premiers entre eux. Si jamais on avait $a + b$ et ab ne sont premiers entre eux, on aura l'existence d'un nombre premier p qui les divisent tous les deux. Le nombre premier p divise le produit ab, par conséquent il divise a ou b. Par symétrie des rôles, supposons que p divise a, puisque p divise $a + b$, alors p divise $b = a + b - a$. Finalement, on a montré qu'il existe un nombre premier p divisant a et b, et ceci n'est pas possible puisque le plus grand diviseur commun de a et b vaut 1.

> Soient a et b deux entiers naturels. Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors les deux entiers $ab + a + b$ et $a^2b + ab^2$ sont premiers entre eux.

Solution. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, on a l'implication suivante; si a et b sont premiers entre eux, alors $a + b$ et ab sont premiers entre eux et par le même argument, on obtient $a + b + ab$ et $ab(a + b) = a^2b + ab^2$ sont premiers entre eux. Ceci achève la preuve.

> Soient a et b deux entiers relatifs et d leur plus grand diviseur commun. Montrer que si on écrit $a = d\alpha$ et $b = d\beta$, on a alors $\alpha \wedge \beta = 1$.

Démonstration. Soit $\alpha \wedge \beta = z$, il s'agit de montrer que $z = 1$. Si jamais on avait $z \geq 2$, alors en écrivant $\alpha = z\alpha'$ et $\beta = z\beta'$, on obtient $a = dz\alpha'$ et $b = dz\beta'$, donc dz est un diviseur commun de a et b, celui ci par conséquent est un diviseur de d (car d est le pgcd de a et b), ensuite dz divise d, mais $dz \geq d$ et $d \neq 0$, donc nécessairement on a $z = 1$, et ceci contredit l'hypothèse imposée sur z.

Trouver tous les couples d'entiers (x, y) tels que $x^2 - y^2 = 7344$ et $x \wedge y = 12$.

Solution. Soit (x, y) une solution éventuelle du problème. Puisque 12 est le plus grand diviseur commun de x et y, alors d'après le résultat précédent, il existe deux entiers a et b tels que $x = 12a$ et $y = 12b$, de plus a et b sont premiers entre eux. En substituant dans l'égalité $x^2 - y^2 = 7344$, on obtient $144a^2 - 144b^2 = 7344$, autrement dit

$$(E), \qquad a^2 - b^2 = 51$$

On est ramené alors à résoudre l'équation (E) en (a, b), si (a, b) est une solution de (E), alors $(a - b)(a + b) = 51$ et puisque $51 = 1 \times 51 = 3 \times 17$ et que $a - b \leq a + b$, alors $a - b = 1$ et $a + b = 51$ (on ne peut pas avoir $a - b = -51$ et $a + b = -1$ puisque a et b sont des entiers naturels) ou $a - b = 3$ et $a + b = 17$ et par conséquent $(a, b) \in \{(26, 25), (10, 7)\}$, d'ou $(x, y) = (12a, 12b) \in \{(312, 300), (120, 84)\}$, la réciproque montre que l'ensemble S des solutions du problème est

$$S = \{(312, 300), (120, 84)\}$$

3.2.2 Plus petit commun multiple de deux entiers

Le plus petit commun multiple de deux entiers x et y est un multiple commun de x et y qui divisent tous les autres multiples communs de x et y.

Soient x et y deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer que le plus petit multiple commun de x et y est xy.

Démonstration. L'entier xy est multiple commun de x et y, par conséquent le plus petit commun multiple de x et y le divise, autrement dit $x \vee y$ divise xy. Montrons maintenant que xy divise $x \wedge y$, si jamais ceci n'est pas vrai, il va exister un nombre premier p divisant xy et ne divisant pas $x \vee y$. Le nombre premier divise xy, par symétrie des rôles de x et y on peut supposer que p divise x, puisque x divise $x \vee y$ alors p divise $x \vee y$ et ceci n'est pas possible par hypothèse sur le nombre premier p.

Montrer que pour tous entiers naturels x et y l'identité

$$x \wedge y \times x \vee y = x \times y$$

Démonstration. On écrit pour $x, y \in \mathbb{N}$, $x = da$ et $y = db$ avec a et b deux entiers naturels premiers entre eux. On sait que $x \wedge y = da \wedge db = d \times a \wedge b = d$ et que $x \vee y = da \vee db = d \times a \vee b = dab$ (d'après le résultat de la question précédente), par la suite

$$x \wedge y \times x \vee y = d^2ab = da \times db = x \times y$$

Et le résultat découle.

➽ Les deux identités $da \wedge db = d \times a \wedge b$ et $da \vee db = d \times a \vee b$ sont vraies pour tous entiers naturels a, b et d. On peut les démontrer par des arguments de divisibilité comme dans les questions précédentes. ➽ Il résulte de cette identité, que deux entiers x et y sont premiers entre eux si et seulement leur ppcm est xy.

(Olympiade Russe 1995) Soient x et y deux entiers naturels tels que

$$\text{pgcd}(x, y) + \text{ppcm}(x, y) = x + y$$

Montrer que l'un des entiers naturels x et y divise l'autre.

Solution. Soit (x, y) un couple d'entiers naturels vérifiant l'identité de l'énoncé et d le pgcd de x et y. On pose $x = da$ et $y = db$ tels que a et b deux entiers naturels premiers entre eux. L'identité de l'exercice devient

$$d + dab = da + db$$

puisque

$$\text{ppcm}(x, y) = \frac{xy}{\text{pgcd}(x, y)} = \frac{d^2ab}{d} = dab$$

Donc,

$$1 + ab = a + b$$

et en remarquant que $(a-1)(b-1) = ab - a - b$, on obtient $(a-1)(b-1) = 0$ et ceci équivaut à dire $a = 1$ ou $b = 1$, c'est à dire $x = d$ ou $y = d$, d étant le pgcd de x et y. Alors x divise y ou y divise x, ce qu'il fallait démontrer.

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation

$$(E), \qquad [x \vee (x+1)] \vee (x+2) = 210$$

Solution. Soit x une solution éventuelle de l'équation (E). L'entier x divise $x \vee (x+1)$ qui à son tour divise $[x \vee (x+1)] \vee (x+2) = 210$, de même $x+1$ et $x+2$ sont des diviseurs de 210. Finalement, $x, x+1$ et $x+2$ sont des diviseurs de 210. Les diviseurs de 210 sont $1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105$ et 210, en regardant cette liste de diviseur on constate que $x = 1$ ou $x = 5$. En vérifiant, on trouve que 5 est l'unique solution de l'équation (E).

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation

$$(3 + x) \wedge (3 \vee x) = 3$$

Solution. Soit x une solution éventuelle de l'équation, on sait que 3 est le pgcd de $3 + x$ et $3 \vee x$. En particulier 3 divise $3 + x$, donc 3 divise x et on déduit l'existence de $a \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 3a$. En substituant dans l'équation de base, on retrouve $(3 + 3a) \wedge (3 \vee 3a) = 3$, donc $(1 + a) \wedge a = 1$, et ceci est évident pour tout $a \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, tous les entiers $x = 3a$ (avec $a \in \mathbb{Z}$) sont solutions de l'équation. Finalement, l'ensemble S des solutions de l'équation est

$$S = \{3a, \quad a \in \mathbb{Z}\}$$

Soit $n \geq 3$ un entier naturel. Déterminer

$$(3^{n+2} - 3^n) \wedge (2^{n+2} - 2^n)$$

Solution. Pour déterminer le pgcd des entiers $3^{n+2}-3^n$ et $2^{n+2}-2^n$, on va déterminer d'abord leur ppcm. On a d'une part $2^{n+2}-2^n=4\times 2^n-2^n=3\times 2^n$ et d'autre part on a $3^{n+2}-3^n=9\times 3^n-3^n=8\times 3^n$, donc

$$(3^{n+2}-3^n)\vee(2^{n+2}-2^n)=24\times 3^{n-1}\vee 24\times 2^{n-3}=24\times 3^{n-1}\vee 2^{n-3}=24\times 2^{n-3}\times 3^{n-1}=2^n\times 3^n=6^n$$

Donc

$$(3^{n+2}-3^n)\wedge(2^{n+2}-2^n)=\frac{(3^{n+2}-3^n)\times(2^{n+2}-2^n)}{6^n}=24$$

Soit a un entier relatif non nul. Montrer que l'implication suivante est toujours vraie,

$$\left\{\ a\wedge x=a\wedge y a\vee x=a\vee y\ \Longrightarrow x=y\right.$$

où x et y deux entiers naturels non nuls.

Solution. Les deux égalités entraînent l'égalité suivante

$$a\wedge x\times a\vee x=a\wedge y\times a\vee y$$

Donc $|a|\times x=|a|\times y$, d'où $x=y$ puisque $|a|\neq 0$.

3.3 Division euclidienne

3.3.1 Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

En arithmétique des entiers, la division euclidienne ou division entière est une opération qui, à deux entiers naturels appelés dividende et diviseur, associe deux autres entiers appelés quotient et reste. Initialement définie pour deux entiers naturels non nuls, elle se généralise aux entiers relatifs. Cette division est au fondement des théorèmes de l'arithmétique élémentaire et de l'arithmétique modulaire qui traite des congruences sur les entiers.

Soient a et $b>0$ deux entiers naturels, il existe un unique couple d'entiers naturels (q,r) tel que

$$a=bq+r$$

et $0\leq r\leq b-1$. L'entier q et r sont appelés respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de a par b.

➼ Ce théorème parait naturel, en effet en fixant deux entiers naturels $b>0$ et a, on commence par 0 pour atteindre a, puis on ajoute un b, puis un autre b jusqu'à ce qu'on arrive un un certain à rang q tel que $bq\leq a<(b+1)q$, ce q est le premier terme qu'on cherche et on pose $r=a-bq$, on a bien $0\leq r=a-bq<b$ (c'est à dire $0\leq r\leq b-1$). On donne par la suite une démonstration du théorème rigoureuse qui se base sur une propriété propriété portant sur les entiers naturels.

Démonstration. Soit $A=\{p\in\mathbb{N}\mid pb\leq a\}$. On a $0\in A$, donc A est une partie de $\mathbb{N}$ non vide. De plus elle est majorée par a car $p\leq pb\leq a$. Elle admet donc un plus grand élément qu'on notera q. Alors $q\in A$ et $q+1\notin A$, il vient $qb\leq a<(q+1)b$ et par suite $0\leq a-bq\leq b-1$, on pose $r=a-bq$, on a alors $0\leq r\leq b-1$. D'où l'existence de (q,r). Passons à l'unicité. Soit (q_1,r_1) un couple vérifiant $a=bq_1+r_1$. Sans perte de généralité, on suppose que $q\geq q_1$. Si $q>q_1$, alors $q - q_1 \geq 1$ et par suite $r_1 - r = b(q - q_1) \geq b$, mais $0 \leq r \leq r_1 \leq b$, donc $q = q_1$ et il vient $r_1 = r$. D'où l'unicité.

> Soient a et $b > 0$ deux entiers naturels. Montrer que
> $$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, a - b)$$

Démonstration. Soient a et $b > 0$ deux entiers naturels. On pose $d_1 = \text{pgcd}(a, b)$ et $d_2 = \text{pgcd}(a, a - b)$. Montrons que d_1 divise d_2 et que d_2 divise d_1. On sait que d_1 divise a et b, donc d_1 divise a et $a - b$, par conséquent d divise le pgcd de a et $a - b$ qui vaut d_2. D'autre part, d_2 divise a et $a - b$, donc d_2 divise $a - (a - b) = b$ et par la suite, finalement d_2 divise a et b, donc d_2 divise leur pgcd qui vaut d_1. D'où le résultat.

> Soient a et $b > 0$ deux entiers naturels et $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b, alors on a
> $$a \wedge b = b \wedge r$$

Démonstration. On utilise le résultat de la proposition précédente en la appliquant plusieurs fois, plus précisément

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a) = \text{pgcd}(b, a - b) = \text{pgcd}(b, a - 2b) = \ldots = \text{pgcd}(b, a - qb) = \text{pgcd}(b, r)$$

➻ En applications, on utilise souvent ce résultat pour montrer que deux nombres sont premiers entre eux, ou plus généralement pour déterminer le pgcd de deux entiers naturels.

> Déterminer le plus grand commun diviseurs des deux nombres 186 et 39.

Solution. On écrit $186 = 4 \times 39 + 30$ puis $39 = 30 \times 1 + 9$, puis $30 = 3 \times 9 + 3$ et ensuite $9 = 3 \times 3 + 0$, donc

$$3 = 0 \wedge 3 = 3 \wedge 9 = 9 \wedge 30 = 30 \wedge 39 = 39 \wedge 186$$

Finalement, le plus grand commun diviseur des deux nombres 186 et 39 est 3. ➻ Notons que le pgcd est le dernier reste non nul dans la succession des divisions euclidiennes établie.

> Montrer que pour tout entier naturel n, les deux entiers $n^{2019} + 2$ et $n^2 - n + 1$ sont premiers entre eux.

Solution. Si $n = 0, 1$, c'est évident. Supposons que $n \geq 2$, on remarque $2019 = 3 \times 673$ est un multiple de 3 qui est de plus impair, on écrit alors (puisque 673 est impair)

$$n^{2019} + 2 = \left(n^3\right)^{673} + 1 + 1 = (n^3 + 1)Q(n) + 1 = T(n)(n^2 - n + 1) + 1$$

où $Q(n)$ et $T(n)$ des expressions polynomiales en fonction de n. Puisque, on a $0 \leq 1 < n^2 - n + 1$, alors 1 est le reste de la division euclidienne de $n^{2019} + 2$ par $n^2 - n + 1$, donc

$$(n^{2019} + 2) \wedge (n^2 - n + 1) = (n^2 - n + 1) \wedge 1 = 1$$

D'où le résultat. ➻ On a utilisé l'identité

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - ba^{n-2} + \ldots - b^{n-1})$$

vraie pour tout entier naturel n impair et tout nombres réels a et b.

Soient $b > 0$ et a deux entiers naturels tels que q_1 le quotient de la division euclidienne de a par b, q_2 le quotient de la division euclidienne de $2a$ par b et q_3 le quotient de la division euclidienne de $2a + b$ par $2b$. Montrer que

$$q_2 = q_1 + q_3$$

SOLUTION. Soient $a = bq_1 + r_1$, $2a = bq_2 + r_2$ et $2a + b = 2bq_3 + r_3$ les divisions euclidienne respectives de a par b, de $2a$ par b et $2a + b$ par $2b$. D'une part $2a + b = 2bq_3 + r_3$ et d'autre part

$$2a + b = 2(bq_1 + r_1) + b = (2q_1 + 1)b + 2r_1$$

Donc,

$$bq_2 + r_2 = b(2q_1) + 2r_1, \qquad (*)$$

Par la suite, on obtient

$$2bq_3 + r_3 = 2bq_1 + 2r_1 + b, \qquad (**)$$

Puisque $0 \leq 2r_1 < 2b$, alors ou bien $0 \leq 2r_1 < b$ ou $b \leq 2r_1 < 2b$. Plaçons nous dans le premier cas, l'unicité du quotient et du reste de la division euclidienne permet de tire de $(*)$, $q_2 = 2q_1$ et puisque $0 \leq 2r_1 + b < 2b$ et $0 \leq r_3 < 2b$, alors $(**)$ entraîne $q_1 = q_3$. D'où $q_2 = q_1 + q_3$. Le second cas entraîne $0 \leq 2r_1 - b < b$, et on réécrit $(*)$ sous la forme

$$bq_2 + r_2 = b(2q_1 + 1) + 2r_1 - b$$

Donc $q_2 = 2q_1 + 1$, et on réécrit $(**)$ sous la forme

$$2bq_3 + r_3 = 2b(q_1 + 1) + 2r_1 - b$$

Donc, par unicité du quotient on trouve $q_3 = q_1 + 1$. Donc $q_2 = q_1 + q_3$. En conclusion, dans tous les cas, on a

$$q_2 = q_1 + q_3$$

Soient $x, y > 0$ deux entiers naturels. Montrer que le plus petit entier naturel non nul k tel que y divise kx est un diviseur de y.

SOLUTION. Il s'agit de montrer que le reste de la division euclidienne de y par k est nul. Soit $y = kq + r$ la division euclidienne de y par k. On remarque que

$$rx = (y - kq)x = yx - q \times kx$$

Donc, rx est une combinaison linéaire de deux multiple yx et kx de y, rx est donc un multiple de y, mais $r \geq 0$ est inférieur strictement à k (d'après le théorème de la division euclidienne), donc r est nul puisque k est le plus petit entier naturel non nul tel que y divise kx.

Soient $a \geq 2$ un entier naturel et m et n deux entiers naturels non nuls. Montrer que

$$a^n - 1 \wedge a^m - 1 = a^m - 1 \wedge a^r - 1$$

où r est le reste de la division euclidienne de n par m.

Solution. L'identité souhaitée ressemble à une identité qu'on a déjà énoncé et qu'on a montré. On procède d'une manière analogue, on montre que si $n = mq + r$ la division euclidienne de n par m,

$$a^n - 1 \wedge a^m - 1 = a^{mq+r} - 1 \wedge a^m - 1 = a^{(m-1)q+r} - 1 \wedge a^m - 1$$

Notons $\Delta_1 = a^{mq+r} - 1 \wedge a^m - 1$ et $\Delta_2 = a^{(m-1)q+r} - 1 \wedge a^m - 1$. Montrons que Δ_1 divise Δ_2 et que Δ_2 divise Δ_1. De même on montre que a et Δ_1 sont premiers entre eux. Montrons maintenant que Δ_2 divise Δ_1. On a Δ_2 divise $a^{(m-1)q+r} - 1$ et $a^m - 1$, donc il divise leur produit

$$\left(a^{(m-1)q+r} - 1\right)\left(a^m - 1\right) = a^{mq+r} - 1 - (a^m - 1) - \left(a^{m(q-1)+r} - 1\right)$$

Donc, Δ_2 divise $a^{mq+r} - 1$, par conséquent Δ_2 divise Δ_1 le pgcd de $a^m - 1$ et $a^{mq+r} - 1$. On montre de manière similaire que Δ_1 divise Δ_2. Finalement, on a montré que

$$a^{mq+r} - 1 \wedge a^m - 1 = a^{(m-1)q+r} - 1 \wedge a^m - 1$$

Donc

$$a^n - 1 \wedge a^m - 1 = a^{mq+r} - 1 \wedge a^m - 1 = a^{(m-1)q+r} - 1 \wedge a^m - 1 = a^{(m-2)q+r} - 1 \wedge a^m - 1 = \ldots = a^r - 1 \wedge a^m - 1$$

D'où le résultat.

> Soient $a \geq 2$ un entier naturel et m et n deux entiers naturels non nuls. Montrer que
>
> $$a^n - 1 \wedge a^m - 1 = a^{n \wedge m} - 1$$

Démonstration. Soit $n = mq + r$ la division euclidienne de n par m. On sait que

$$a^n - 1 \wedge a^m - 1 = a^m - 1 \wedge a^r - 1 = a^r - 1 \wedge a^{r_1} - 1$$

où r_1 est le reste de la division euclidienne de m par r, de même

$$a^n - 1 \wedge a^m - 1 = a^m - 1 \wedge a^r - 1 = a^r - 1 \wedge a^{r_1} - 1 = a^{r_1} - 1 \wedge a^{r_2} - 1$$

où r_2 est le reste de la division euclidienne de r par r_1, et ainsi de suite jusqu'à annuler l'exposant de a, on trouve alors en notons z le dernier reste non nul de cette succession de divisions euclidiennes,

$$a^n - 1 \wedge a^m - 1 = a^m - 1 \wedge a^r - 1 = a^r - 1 \wedge a^{r_1} - 1 = a^{r_1} - 1 \wedge a^{r_2} - 1 = a^z - 1 \wedge a^0 - 1 = a^z - 1$$

Sachant que le dernier reste non nul z présente le pgcd de n et m, on a bien

$$a^n - 1 \wedge a^m - 1 = a^{n \wedge m} - 1$$

ce qui achève la preuve.

3.4 Identité de Bezout et ses variantes

L'identité de Bezout affirme que deux nombres entiers x et y sont premiers entre eux si et seulement si le 1 est une combinaison linéaire de x et y. On donne par la suite un exemple illustratif.

> Montrer que les deux nombres 26 et 57 sont premiers entre eux et déterminer deux entiers relatifs u et v vérifiant
>
> $$26u + 57v = 1$$

Solution. On utilise l'algorithme d'Euclide pour montrer que 57 et 26 sont premiers entre eux. On écrit $57 = 2 \times 26 + 5$ puis $26 = 5 \times 5 + 1$, donc en remontant on obtient

$$1 = 26 - 5 \times 5 = 26 - 5 \times (57 - 2 \times 26) = 26 + 10 \times 26 - 5 \times 57 = 11 \times 26 - 5 \times 57$$

Donc le couple $(u, v) = (11, -5)$ convient. De manière générale, on énonce (sans démonstration) le théorème dit de Bezout.

> Soient x et y deux entiers relatifs. Alors x et y sont premiers entre eux si et seulement s'il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que
>
> $$ux + vy = 1$$

➻ La preuve de l'implication réciproque dans le théorème de Bezout est évidente. Pour l'implication directe, on utilise une remonté de l'algorithme d'Euclide comme dans l'exemple précédent. Il résulte du théorème de Bezout la proposition suivante,

> Soient x et y deux entiers relatifs et d leur plus grand commun diviseur, alors d est une combinaison linéaire de x et y, autrement dit, il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que
>
> $$ux + vy = d$$

Démonstration. Puisque d est le plus grand diviseur commun de x et y, alors il existe a et b deux entiers relatifs tels que $x = ad$ et $y = bd$ et de plus $a \wedge b = 1$. Les deux entiers a et b étant premiers eux, le théorème de Bezout assure l'existence d'un couple d'entiers (u', v') vérifiant $au' + bv' = 1$, en multipliant les deux côtés de cette égalité par d, on obtient l'existence d'un couple d'entiers $(u, v) = (du', dv')$ tel que $ux + vy = d$. D'où le résultat. ➻ Attention ! Dans cette proposition, on n'a pas d'équivalence comme dans le théorème de Bezout.

> Pour tout entier naturel non nul n, on pose
>
> $$a_n = 2 \times 10^n + 1 \qquad \text{et} \qquad b_n = 2 \times 10^n - 1$$
>
> Déterminer un couple d'entier relatifs (u, v) vérifiant
>
> $$u \times a_n + v \times b_n = 1$$

Solution. On utilise le remonté de l'algorithme d'Euclide pour déterminer le couple d'entiers relatifs (u, v), on a

$$a_n = 2 \times 10^n + 1 = 2 \times (10^n - 1) + 2 = 1 \times b_n + 2$$

Et on a aussi

$$b_n = 2 \times 10^n - 1 = 2 \times (10^n - 1) + 1$$

Donc en remontant

$$1 = b_n - 2 \times (10^n - 1) = b_n - (a_n - b_n)(10^n - 1) = 10^n b_n - (10^n - 1)a_n$$

Donc, le couple $(u, v) = \Big(-(10^n - 1), 10^n \Big)$ convient.

3.5 Théorème de Gauss et ses variantes

Soient a, b et c trois entiers relatifs tels que a divise bc, si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Démonstration. Les deux entiers a et b sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bezout, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$, en multipliant par c les deux côtés de l'égalité, on trouve $acu + bcv = c$, sachant que acu et bcv sont des multiples de a, alors c est un multiple de a. D'où le résultat.

Soient x et y deux entiers tels que $2x + 1$ divise $8y$. Montrer que $2x + 1$ divise y.

Solution. On sait que $2x+1$ est un nombre impair qui divise $8y$, donc $2x+1$ divise y puisque $2x + 1 \wedge 8 = 1$.

Soient a et b deux entiers relatifs et p un nombre premier divisant ab, alors p divise a ou b.

Démonstration. Supposons que p ne divise pas a, alors p et a sont premiers entre eux, mais p divise ab, donc d'après le théorème de Gauss, p divise b. On montre de même qui si p ne divise pas b, alors p divise a. D'où le résultat. ➳ Ce résultat peut être généralisée pour un produit fini;

si un nombre premier p divise un produit d'entiers relatifs, alors p divise nécessairement un parmi eux.

Soient a, b et c trois entiers relatifs tels que a divise c, b divise c et $a \wedge b = 1$, alors ab divise c.

Démonstration. Puisque a divise c, alors $c = ak$ pour un entier k, mais on sait que b divise $c = ak$, donc et que b et a sont premiers entre eux, donc par le théorème de Gauss, b divise k, mais $c = ak$, donc ab divise c.

Montrer que $n^3 - n$ est divisible par 6 pour tout entier relatif n.

Solution. Soit n un entier relatif, celui-ci possède la même parité que n^3, donc $n^3 - n$ est pair, autrement dit 2 divise $n^3 - n$. D'autre pat, on remarque que

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1) = (n - 1)n(n + 1)$$

Donc, $n^3 - n$ est le produit de trois entiers consécutifs, sachant que parmi trois entiers consécutifs, on trouve toujours un qui est multiple de 3, alors 3 divise $n^3 - n$. Finalement, on a montré que 2 divise $n^3 - n$ et 3 divise $n^3 - n$ et puisque l'on a 2 et 3 premiers entre eux, alors $6 = 2 \times 3$ divise $n^3 - n$.

Soient x et y deux entiers naturels ≥ 2 premiers entre eux. Il existe un unique couple d'entiers naturels (u_0, v_0) tel que

$$u_0x - v_0y = 1$$

Démonstration. Les deux entiers naturels x et $y \geq 2$ étant premiers entre eux, le théorème de Bezout assure l'existence de $u_1, v_1 \in \mathbb{Z}$ tels que $u_1 x - v_1 y = 1$. Soit $u_1 = qy + r$ la division euclidienne de u_1 par y, on obtient $1 = (qy+r)x - v_1 y = rx - (v_1 - qx)y = u_0 x - v_0 y$ avec $u_0 = r$ et $v_9 = v_1 - qx$. De l'égalité $(v_1 - qx)y = rx - 1 \geq -1$, or $(v_1 - qx)y$ ne peut pas être égal à -1 puisque y est ≥ 2 par hypothèse. Donc $v_0 = (v_1 - qx)y \geq 0$. Le couple d'entiers naturels (u_0, v_0) convient donc. Montrons par la suite que le couple (u_0, v_0) est unique. Soit alors (u_0', v_0') un couple vérifiant la même propriété que (u_0, v_0) vérifie. On a alors $(u_0' - u_0)x = (v_0' - v_0)y$, ceci montre que a divise $b|u_0' - u_0|$, mais a et b sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, on peut déduire que a divise $|u_0' - u_0'|$, sachant que $0 \leq |u_0' - u_0'| \leq a - 1$, donc $|u_0' - u_0| = 0$, par conséquent $u_0' = u_0$, et de même on trouve $v_0' = v_0$, les couples (u_0, v_0) et (u_0', v_0') sont alors identiques. D'où l'unicité.

Soit a un entier relatif, montrer que pour tout entier naturels n et m, on a

$$a^n - 1 \wedge a^m - 1 = a^{n \wedge m} - 1$$

Solution. Si l'un des deux entiers n et m divise l'autre. Par exemple, n divise m. Montrons que

$$a^n - 1 \wedge a^m - 1 = a^n - 1$$

On écrit $m = kn$, on a alors

$$a^m - 1 = a^{kn} - 1 = (a^n - 1)(1 + a^n + a^{2n} + \ldots + a^{(k-1)n})$$

Donc $a^n - 1$ divise $a^m - 1$ et par la suite, on a le résultat. Supposons maintenant que aucun des deux entiers naturels n et m ne divise l'autre, de sorte que le pgcd de n et m est différent de n et de m. Écrivons alors $n = d\alpha$ et $m = d\beta$ où $d = \text{pgcd}(n, m)$, de $d \neq n, m$ on peut tirer que $\alpha \geq 2$ et $\beta \geq 2$, et de plus on sait que α et β sont premiers entre eux. Donc α et β remplissent les conditions de la proposition précédente. Il résulte qu'il existe un couple d'entiers naturels (u', v') tel que $u'\alpha = v'\beta + 1$. En multipliant par d, les deux côtés de cette égalité, on déduit l'existence d'un couple (u, v) d'entiers naturels vérifiant $nu = mv + d$, il s'agit de montrer que

$$a^n - 1 \wedge a^m - 1 = a^d - 1$$

On montre que chacun des membres des deux côtés de cette égalité divise l'autre. On sait déjà que le côté de droite divise le côté de gauche puisque l'on peut écrire par exemple

$$a^n - 1 = a^{\alpha d} - 1 = (a^d - 1)(1 + a^d + a^{2d} + \ldots + a^{(\alpha-1)d}), \qquad (*)$$

Par la suite, $a^d - 1$ divise $a^n - 1$, de même on montre que $a^d - 1$ divise $a^m - 1$. Donc, $a^d - 1$ divise le pgcd de $a^n - 1$ et $a^m - 1$. Montrons maintenant que Δ divise $a^d - 1$ où Δ est le pgcd de $a^n - 1$ et $a^m - 1$. On sait que Δ divise $a^n - 1$, donc Δ divise $a^{nu} - 1$ par le même argument utilisé dans $(*)$. Donc Δ divise $a^{mv+d} - 1$, mais on sait que Δ divise $a^{mv} - 1$ (par le même argument que dans $(*)$), donc Δ divise la différence

$$a^{mv+d} - 1 - (a^{mv} - 1) = a^{mv+d} - a^{mv} = a^{mv}(a^d - 1)$$

mais Δ et a sont premiers entre eux puisque l'on a Δ divise $a^m - 1$ (si $z = \Delta \wedge a$, alors z va diviser $a^n - 1$ et a^n, donc z divisera 1, d'où $z = 1$), Finalement Δ divise $a^d - 1$. Ceci permet de conclure.

Soient a et b deux entiers relatifs et n et m deux entiers naturels. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si a^n et b^m sont premiers entre eux.

Démonstration. Supposons que a et b sont premiers entre eux et montrons que a^n et b^m sont premiers entre eux. Supposons que a^n et b^m ne sont pas premiers entre eux de sorte qu'il existe un nombre premier p qui les divises tous les deux. Donc p divise a^n et p divise a^m et par la suite p divise a et b et ceci est impossible avec a et b premiers entre eux d'où la condition nécessaire. Réciproquement si a^n et b^m sont premiers entre eux, il existe alors deux coefficients de Bezout u et v vérifiant

$$u \times a^n + v \times b^m = 1$$

En posant $U = ua^{n-1}$ et $V = vb^{m-1}$, on déduit l'existence de deux entiers U et V vérifiant $aU + bV = 1$, donc par le théorème de Bezout, les deux entiers a et b sont premiers entre eux.

3.5.1 L'équation $ax + by = c$

Dans cette section nous allons voir une résolution de l'équation

$$(E), \quad ax + by = c$$

en $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ avec a, b et c des entiers donnés. Nous allons pas faire une étude générale de l'équation, mais plutôt nous allons nous baser sur des exemples en pratique pour savoir résoudre ce genre d'équations.

Trouver tous les couples d'entiers relatifs (x, y) vérifiant

$$(E) \qquad 2x + 3y = 1$$

Solution. On remarque facilement que le couple $(-1, 1)$ est une solution particulière. Et on écrit en considérant le couple (x, y) comme solution particulière de l'équation (E), $2x+3y = -2+3$, alors

$$2(x+1) = 3(1-y), \qquad (*)$$

, donc 2 divise $3(1-y)$ et puisque 2 et 3 sont premiers entre eux, alors par le théorème de Gauss, on déduit que 2 divise $y-1$ et alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - 1 = 2k$, autrement dit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 2k+1$. En substituant dans $(*)$, on trouve $x + 1 = -3(k$, autrement dit, on a $(x, y) = (-3k-1, 2k+1)$ pour un certain entier relatif k. Réciproquement, on a

$$2(-3k-1) + 3(2k+1) = -6k - 2 + 6k + 3 = 1$$

vraie pour tout entier relatif k. Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est

$$\{(-3k-1, 2k+1)/ \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

➽ Remarquer que la solution particulière constitue l'étape fondamentale de résolution de ce type d'équations. Cependant, déterminer une solution particulière n'est pas toujours évident. Souvent, pour des valeurs numériques des coefficients de l'équation, on utilise la remonté d'Euclide qui consiste à faire l'algorithme d'Euclide puis remonter !

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante d'inconnu (x, y),

$$(F), \qquad 5x = 3 + 10^{100}y$$

Solution. Suppose que l'équation (F) admet une solution (x, y), on sait que $5x$ et $10^{100}y$ sont divisibles par 5, donc $3 = 5x - 10^{100}y = 3$ est un multiple de 5, ceci est bien évidemment impossible. ➼ L'équation $ax + by = c$ à paramètres entiers admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement le pgcd de a et b divise c.

On considère l'équation (G) en (x, y) définie par

$$(G), \qquad 61x - 33y = 1$$

1. Sans utiliser l'algorithme d'Euclide, montrer que l'équation (G) admet une solution.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (G).

Solution.

1. On remarque que 61 est un nombre premier puisque tous les nombres premiers $2, 3, 5, 7$ inférieurs ou égal à $\sqrt{61}$ ne les divises pas. De plus 61 ne divise pas 33, donc 61 et 33 sont premiers entre eux. Donc, le théorème de Bezout garantit l'existence d'une solution de l'équation (G).

2. On commence par chercher une solution particulière de l'équation (G), on utilise l'algorithme d'Euclide, on écrit $61 = 33 + 27$, puis $33 = 27 + 4$, ensuite $27 = 6 \times 4 + 3$ et enfin $4 = 3 + 1$. En remontant, on trouve

   $1 = 4-3 = 4-(27-6\times4) = 7\times4-27 = 7\times(33-27)-27 = 7\times33-8\times27 = 7\times33-8(61-33) = 15\times33-8\times6$

   Donc
   $$-8 \times 61 - (-15) \times 31 = 1$$
   Finalement, on a trouvé une solution particulière $(-8, -15)$. Ensuite on écrit le 1 de l'équation sous forme de combinaison linéaire des coefficients de l'équation 61 et -33, autrement dit si le couple (x, y) est solution de l'équation (G), alors $61x - 33y = -8 \times 61 - (-15) \times 31$. Ensuite, on factorise pour obtenir
   $$61(x + 8) = 33(y + 15), \qquad (*)$$
   Par la suite, on obtient que 61 divise $33(y + 15)$, donc par le théorème de Gauss, 61 divise $y + 15$, il s'en suit que $y = 61k - 15$. En substituant y dans $(*)$, on obtient $x + 8 = 33k$, c'est à dire $x = 33k - 8$. Donc, si (x, y) est une solution de l'équation (G), alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(x, y) = (33k - 8, 61k - 15)$. Réciproquement, on vérifie facilement que tous les couples $(33k - 8, 61k - 15)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ sont solutions de l'équation (G). Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (G) est
   $$S = \{(33k - 8, 61k - 15)/ \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

3.6 Nombres premiers

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs. Ces deux diviseurs sont 1 et le nombre considéré, puisque tout nombre a pour diviseurs

1 et lui-même (comme le montre l'égalité $n = 1 \times n$), les nombres premiers étant ceux qui n'en possèdent aucun autre. On a déjà prouvé dans ce cours que l'ensemble des nombres premiers est infini.

> Soient a et n deux entiers ≥ 2. Montrer que si $a^n - 1$ est un nombre premier, alors $a = 2$ et n est un nombre premier.

SOLUTION. Montrons d'abord que $a = 2$, si jamais on avait $a \geq 3$, alors $a - 1 \geq 2$ et alors l'entier $M_n = a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \ldots + 1)$ ne sera pas premier et on déduit que $a = 2$. Montrons maintenant que n est premier. Supposons par absurde qu'il existe $2 \leq x, y \leq n-1$ tels que $n = xy$. Donc

$$M_n = 2^n - 1 = 2^{xy} - 1 = (2^x - 1)(2^{x(y-1)} + \ldots + 1)$$

qui n'est pas premier, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Donc n est un nombre premier.

> Montrer que tout nombre premier ≥ 5 s'écrit sous la forme $6k - 1$ ou la forme $6k + 1$ où k un entier naturel.

SOLUTION. Soit p un nombre premier, Soit $p = 6k + r$ la division euclidienne de p par 6, on a alors $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Bien évidemment, r doit être différent de $0, 2, 3, 4$, sinon p sera respectivement divisible par $6, 2, 3$ et 2 ce qui contredira le caractère primaire de $p \geq 5$. Donc $r \in \{1, 5\}$, donc $p = 6k + 1$ ou $p = 6k + 5 = 6(k + 1) - 1 = 6k' + 1$ où $k = k + 1$. Donc, p s'écrit sous la forme $6k + 1$ ou $6k - 1$ avec k un entier naturel.

> Un entier naturel a est composé (non premier) si et seulement s'il admet un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{a}$.

DÉMONSTRATION. Si l'entier admet un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{a}$, alors il n'est pas premier. Supposons maintenant que a est un entier composé de sorte qu'il existe deux entiers b et c compris entre 2 et $a - 1$ tels que

$$2 \leq c \leq b \leq a - 1$$

et soit p un diviseur premier de c (il existe puisque $c \geq 2$), le nombre premier p est un diviseur premier de a et de plus $p^2 \leq c^2 \leq bc = a$, d'où $p \leq \sqrt{a}$, donc p convient.

> Soit p un entier naturel. Si tous les nombres premiers inférieurs ou égal à $\sqrt{p}$ ne divise pas p, alors p est un nombre premier.

DÉMONSTRATION. Si p n'était pas premier, alors p va admettre un diviseur premier qui lui est inférieur à sa racine d'après la proposition précédente, et ceci est contraire à l'hypothèse sur l'entier naturel p. ➽ Ce critère est pratique pour décider la primalité d'un entier naturel.

> Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6k - 1$ ou il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6k + 1$.

Solution. Puisqu'un nombre premier ≥ 5 s'écrit sous la forme $6k-1$ ou $6k+1$, et que l'ensemble des nombres premiers ≥ 5 est infini (puisque l'ensemble des nombres premiers est infini), alors il existe un nombre infini de nombre premiers de la forme $6k-1$ ou il existe un nombre infini de nombres premiers de la forme $6k+1$.

> Montrer qu'il existe une infinité de nombre premiers de la forme $4k-1$ pour $k \geq 1$ un entier naturel.

Solution. Notons qu'un nombre premier $k \geq 3$ s'écrit ou bien sous la forme $4k-1$ ou bien sous la forme $4k+1$ pour $k \geq 1$ un entier naturel. Par l'absurde, supposons que les nombres premiers de la forme $4k-1$ (il en existe, par exemple 3) sont en nombre fini $s \geq 1$, notons les $p_1, p_2, \ldots, p_s$. On pose

$$N = 4p_1p_2\ldots p_s - 1$$

L'entier $N \geq 2$ admet un diviseur premier p de la forme $4k-1$ (en remarquant un produit fini d'entiers de la forme $4k+1$ est lui même de la forme $4k+1$, mais N est de la forme $4k-1$). Malheureusement, p apparaît dans le produit $p_1p_2\ldots p_s$, donc p divise $4p_1p_2\ldots p_s$, mais p divise $N = 4p_1p_2\ldots p_s - 1$, donc p divise 1, ce qui est bien évidemment impossible.

> Montrer qu'il existe une infinité de nombre premiers de la forme $6k-1$ pour $k \geq 1$ un entier naturel.

Solution. On utilise le fait qu'un nombre premier sous la forme $6k-1$ ou bien sous la forme $6k+1$. Supposons que les nombres premiers de la forme $6k-1$ (il en existe, par exemple 5). Soit, alors P le plus grand nombre premier de la forme $6k-1$. On pose

$$N = 6P! - 1$$

L'entier $N \geq 2$ admet un diviseur premier p de la forme $6k-1$ (en remarquant un produit fini d'entiers de la forme $6k+1$ est lui même de la forme $6k+1$, mais N est de la forme $6k-1$). Mais p apparaît dans la factorielle $P!$ puisque $p \leq P$, donc p divise $P!$ et par la suite p divise $6P!$, mais p divise $N = 6P! - 1$, d'où l'absurdité.

> Montrer que l'entier
> $$4^{3^{2019}} + 1$$
> n'est pas un nombre premier.

Solution. Il suffit de remarquer que 3^{2019} est un nombre impair, donc

$$4^{3^{2019}} + 1 = (4+1) \times K = 5K$$

Donc notre entier est divisible par 5 est il est supérieur strictement à 5. Alors, l'entier en question n'est pas premier.

> Soit p un nombre premier ≥ 5. Montrer que 24 divise $p^2 - 1$.

Solution. On voit facilement que p^2-1 est divisible par 8 puisque $p = 4k \pm 1$, en levant au carré, on trouve que p^2-1 est multiple de 8. D'autre part, on a $p = 3k \pm 1$, dans les deux cas p^2-1 est divisible par 3. Finalement, on a montré que p^2-1 est divisible par 8 et 3. Par conséquent, p^2-1 est multiple de $24 = 3 \times 8$.

3.7 Décomposition en facteurs premiers

Le théorème fondamentale de l'arithmétique, appelé également, le théorème de factorisation en facteurs premiers. Ce théorème est d'une importance capitale en théorie des nombres, en effet il permet de résoudre plusieurs situations compliqués.

Tout entier naturel $N \geq 2$ s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \qquad (*)$$

où $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ des nombres premiers et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \geq 1$ des entiers naturels. L'écriture $(*)$ s'appelle la décomposition en facteurs premiers (ou décomposition primaire) de l'entier naturel N.

Démonstration. Montrons d'abord l'existence de la décomposition primaire. On procède par récurrence forte. Pour $N = 2$, c'est évident. Supposons que tout entier naturel $n \geq 2$ inférieur ou égal à N admet une décomposition primaire et montrons que $N + 1$, possède une décomposition primaire. Puisque $N + 1$ est $geq 2$, alors il admet un diviseur premier qu'on noter p, si $N + 1 = p$, c'est bon. Sinon $(N = 1)/p \geq 2$ et de plus on a $(N+1)/p \leq N$, donc par hypothèse de récurrence, l'entier $(N + 1)/p$ admet une décomposition primaire, d'où N admet une décomposition primaire. Montrons maintenant l'unicité de lé décomposition primaire. Soient $N \geq 2$ un entier naturel et k le nombre de ses diviseurs premiers et

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_k^{\beta_k}$$

deux décompositions primaires de N. On observe que p_1 apparaît dans le produit $q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_k^{\beta_k}$, puisque p_1 est un nombre premier, alors p_1 divise $q_l^{\beta^l}$ pour un certain $l \in \{1, 2, \dots, k\}$, puisque p_1 est un nombre premier, alors p_1 divise q_l. Alors $p_1 = q_l$ puisque p_1 et q_l sont des nombres premiers. De plus α_1 doit être égal à β_l, sinon on aura par exemple (en supposant $\alpha_1 > \beta_l$) la chose suivante; $p_1^{\alpha_1 - \beta_l}$ va diviser le produit $q_1^{\beta_1} \dots q_{l-1}^{\beta_{l-1}} q_{l+1}^{\beta_{l+1}} \dots q_k^{\beta_k}$ et dans ce dernier produit, $q_l = p_1$ ne figure pas, ceci bien évidemment est impossible. De même, on montre que l'on ne peut pas avoir $\alpha_1 < \beta_l$. De proche en proche, on montre que pour tout indice $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, il existe un unique indice $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ tel que $(p_i, \alpha_i) = (q_l, \beta_l)$, mais on sait que $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ et $q_1 < q_2 < \dots < q_k$. Donc $(p_i, \alpha_i) = (q_i, \beta_i)$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. D'où l'unicité de la décomposition primaire.

Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux tels que leur produit ab est un carré parfait. Montrer que a et b sont des carrés parfaits.

Solution. Soit $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_l^{\alpha_l}$ et $b = q_1^{\beta_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ les décompositions primaires respectives de a et b. On sait que les $p_1, \dots, p_l, q_1, \dots, q_s$ sont deux à deux distincts. Il s'agit donc de montrer que les α_i et les β_j sont des entiers pairs. Ceci est bien évidemment facile à voir par unicité de décomposition primaire de $c = ab$ qui est un carré parfait (car pour tout i et tout j, p_i et q_j apparaît dans la décomposition primaire de c, avec les p_i et q_j ont des exposants α_i et β_j pairs). D'où le résultat. ➻ De même, on montre que si le produit de deux entiers naturels premiers entre eux est une puissance n-ème. Alors, chacun de ces deux entiers est une puissance n-ème.

Existe t-il un entier relatif x vérifiant

$$x + x^3 = 2^{1998} \quad ?$$

Solution. On remarque que $x = 0, 1$ n'est pas une solution bien évidemment, et que les entiers négatifs ne sont pas solutions également. Donc, si x est une solution entière, elle est nécessairement ≥ 2. On remarque que

$$1 \times (x^2 + 1) - x \times x = 1$$

Donc, par le théorème de Bezout, x et $x^2 + 1$ sont premiers entre eux. Or,

$$x(x^2 + 1) = x + x^3 = \left(2^{999}\right)^2$$

un carré parfait, donc d'après ce qui précède x et $x^2 + 1$ sont des carrés parfaits. De plus, il sont différents de 1, et alors il sont tous les deux divisibles par 2, ceci bien évidemment n'est pas possible puisque x et $x^2 + 1$ sont premiers entre eux comme déjà mentionné.

Soit N un entier naturel qui une puissance 2019-ème et une puissance 2021-ème. Montrer qu'il existe un entier naturel n tel que

$$N = n^{4080399}$$

Solution. On commence par remarquer que $4080399 = 2019 \times 2021$. Soient a et b deux entiers naturels tels que $N = a^{2019}$ et $N = b^{2021}$. L'unicité de la décomposition primaire permet de voir que 2019 divise l'exposant α de chaque nombre premier p qui figure dans la décomposition primaire de $N = b^{2021}$, mais $\alpha = 2021\gamma$ où γ l'exposant de p dans la décomposition primaire de b. Donc 2019 divise $\alpha = 2021\gamma$, donc par le théorème de Gauss, il vient que 2019 divise γ. Finalement $b = n^{2019}$ pour un certain entier naturel n, donc

$$N = b^{2021} = n^{2021 \times 2019} = n^{4080399}$$

Donc, n convient.

Décomposer l'entier naturel $N = 27000001$ en facteurs premiers.

Solution. On remarque que

$$N = 27000001 = 300^3 + 1 = (300 + 1)(300^2 - 300 + 1) = 301 \times [(300 + 1)^2 - 900]$$

$$= 301 \times (301^2 - 30^2) = 301 \times 331 \times 271 = 7 \times 43 \times 271 \times 331$$

On vérifie que les facteurs $7, 43, 271$ et 331 sont des nombres premiers par un critère cité précédemment.

Existe t-il un entier relatif x vérifiant l'équation

$$x^2 + x^6 = 8^{1997} \quad ?$$

Solution. Si x est une solution, alors $-x$ est également une solution puisque l'expression $x^2 + x^6$ est paire. Supposons donc que x est une solution qui est positive. Il est facile de voir que

x est différent de 0 et de 1 puisque 0 x ne peut pas être impair, puisque x divise $8^{1997} = (2^3)^{1997}$ qui est une puissance de 2, par conséquent x est une puissance de 2, donc x est en particulier pair. De même, on obtient que x^4+1 est pair (puisque $x^2(1+x^4) = x^2 + x^6$). Finalement, on a montrer que 2 divise x et x^4+1, donc 2 divise x^4 et x^4+1, donc 2 divise leur différence qui vaut 1. Ceci bien sur n'est pas possible, donc l'équation n'admet pas de solution entière.

3.8 Arithmétique modulaire

Avant de commencer cette section, le lecteur doit s'assurer qu'il a bien assimiler la totalité des propriétés et des techniques établies précédemment.

Les congruences sont largement utilisées dans la résolutions de problèmes en théorie des nombres; plus spécifiquement au monde olympique. Nous allons introduire la notion de congruence modulo un entier, et on illustrera les techniques et les propriétés à travers les exemples et les exercices.

Soient a et b deux entiers relatifs et n un entier non nul. On dit que a est congru à b modulo n et on écrit $a \equiv b \pmod n$ si n divise la différence $a-b$. On dit que a et b sont congrus modulo n.

Montrer que

$$4^{2n+1} \equiv 4 \pmod{60}$$

pour tout entier naturel non nul n.

Solution. Il s'agit de montrer que la différence $4^{2n+1}-4$ est un multiple de 15, on écrit pour un entier naturel non nul n,

$$4^{2n+1} - 4 = 4(4^{2n}-1) = 4 \times (16^n - 1) = 4 \times (16-1)(1+16+16^2+\ldots+16^{n-1}) = 60K$$

où K un entier naturel. Donc 60 divise $4^{2n+1}-4$, par conséquent $4^{2n+1} \equiv 4 \pmod{60}$.

Soit n un entier naturel qui n'est pas multiple de 3. Montrer que

$$n^2 \equiv 1 \pmod 3$$

Solution. Soit n un entier naturel qui n'est pas divisible par 3. Il s'agit de montrer que 3 divise n^2-1. Puisque n n'est pas divisible par 3, alors les restes de la division euclidienne de n par 3 sont 1 ou 2, autrement dit s'écrit sous la forme $n = 3k+1$ ou sous la forme $n = 3k-1$. Dans le premier cas, on a

$$n^2 - 1 = (n-1)(n+1) = 3k(3k+1)$$

Et dans le second cas, on a

$$n^2 - 1 = (n-1)(n+1) = (3k+1)(3k+3) = 3(k+1)(3k+1)$$

Dans les deux cas, n^2-1 est divisible par 3, par conséquent n^2 est congru à 1 modulo 3. ➻ Pour tout entier relatif a et tout entier non nul n, si $a \equiv n \pmod n$, alors $a \equiv 0 \pmod n$.

La relation de congruence est compatible avec la somme des entiers. Autrement dit, si a, b, c et d sont des entiers relatifs et n un entier non nul et $a \equiv b \pmod n$ et $c \equiv d$

(mod n), alors

$$a+c \equiv b+d \pmod n$$

DÉMONSTRATION. Si $a \equiv b \pmod n$ et $c \equiv d \pmod n$, alors n divise $a-b$ et n divise $c-d$, donc n divise leur somme,

$$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$$

Donc $a+c \equiv b+d \pmod n$. ➺ Le résultat se généralise facilement pour un nombre fini de termes.

Montrer que

$$5 \quad \text{divise} \quad 16^{100}+16^{200}+16^{300}+16^{400}+16^{500}$$

SOLUTION. Pour $e \in \{1,2,3,4,5\}$, on a $16^{100e}-1$ divisible par 5 puisque

$$16^{100e}-1=(16-1)(1+16+16^2+\ldots+16^{100e-1})$$

Donc, pour tout $e \in \{1,2,3,4,5\}$, $16^{100e} \equiv 1 \pmod 5$ Alors,

$$16^{100}+16^{200}+16^{300}+16^{400}+16^{500} \equiv \underbrace{1+1+\ldots+1}_{5 \text{ fois}} \equiv 5 \equiv 0 \pmod 5$$

La relation de congruence est compatible avec le produit des entiers. Autrement dit, si a,b,c et d sont des entiers relatifs et n un entier non nul et $a \equiv b \pmod n$ et $c \equiv d \pmod n$, alors

$$ac \equiv bd \pmod n$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire la chose suivante,

$$ac-bd=ac-ad+ad-bd=a(c-d)+d(a-b)$$

Puisque n divise $c-d$ et $a-b$, alors n divise $ac-bd$. Donc, $ac \equiv bd \pmod n$. ➺ Le résultat se généralise facilement pour un nombre fini de termes, une conséquence est la suivante.

Soient a et b deux entiers relatifs qui sont congrus modulo $n \in \mathbb{Z}^*$, alors pour tout entier naturel m, a^m et b^m sont congrus modulo n.

Soient a,b,c,a',b',c' six entiers relatifs et $n \in \mathbb{Z}^*$ un entier qui divise les différences $a-a'$, $b-b'$ et $c-c'$. Montrer que n divise la différence $abc-a'b'c'$.

SOLUTION. Il suffit de traduire les données, on écrit

$$a \equiv a' \pmod n, \qquad b \equiv b' \pmod n, \qquad c \equiv c' \pmod n$$

Puisque, la congruence est compatible avec le produit, on a bien $abc \equiv a'b'c' \pmod n$. Donc, n divise $abc-a'b'c'$.

Soit P un polynôme à coefficients entiers, a et b deux entiers et n un entier non nul tel que $a \equiv b \pmod{n}$, alors
$$P(a) \equiv P(b) \pmod{n}$$

Démonstration. On écrit
$$P = c_l X^l + c_{l-1} X^{l-1} + \ldots + c_1 X + c_0$$
Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, l\}$, on a $a^k \equiv b^k \pmod{n}$, et alors $c_k a^k \equiv c_k b^k \pmod{n}$. En sommant, sur les $k \in \{0, 1, \ldots, l\}$, on trouve
$$P(a) = c_l a^l + c_{l-1} a^{l-1} + \ldots + c_1 a + c_0 \equiv c_l b^l + c_{l-1} b^{l-1} + \ldots + c_1 b + c_0 = P(b) \pmod{n}$$

Déterminer tous les entiers n vérifiant
$$n^2 + 3n + 6 \equiv 0 \pmod{5}$$

Solution. Soit P le polynôme $X^2 + 3X + 6$, On sait que pour tout n, on a $n \equiv 0, 1, 2, 3, 4 \pmod{5}$, donc $n \equiv 0, 1, 2, -2, -1$, par la suite
$$P(n) \equiv P(0), P(1), P(2), P(-2), P(-1) = 6, 10, 16, 4, 4 \equiv 1, 0, 1, 4, 4 \pmod{5}$$
Donc $P(n) \equiv 0 \pmod{5}$ si et seulement si $n \equiv 1 \pmod{5}$. Finalement, l'ensemble des solutions du problème est
$$S = \{5k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.
2. En déduire que $x \equiv 2 \pmod{5}$, alors $1 + x + x^2 + \ldots + x^{2047}$ est divisible par 5.

Solution.

1. On remarque que $2^2 = 4 \equiv -1 \pmod{5}$, donc $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$, par la suite $2^{4k} \equiv 1 \pmod{5}$, $2^{4k+1} \equiv 2 \pmod{5}$, $2^{4k+2} \equiv 4 \pmod{5}$ et $2^{4k+3} \equiv 8 \equiv 3 \pmod{5}$. Donc, on obtient comme précédemment, le reste de 2^n modulo 5 suivant les restes de n modulo 4.
2. On remarque que la somme de quatre puissances consécutifs de 2 est congrue à $1+2+4+3 = 10$ modulo 5. Donc, la somme de quatre puissances consécutifs de 2 est divisible par 5 et on écrit pour $x \equiv 2 \pmod{5}$,
$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{2047} \equiv \underbrace{(1 + 2 + 2^3 + 2^4)}_{\equiv 0 \pmod{5}} + \ldots + \underbrace{(2^{2044} + 2^{2045} + 2^{2046} + 2^{2047})}_{\equiv 0 \pmod{5}} \equiv 0 \pmod{5}$$
Puisque on a 2048 termes et 2048 est un multiple de 4.

➽ Souvent, pour déterminer la valeur numérique du reste d'une puissance divisée par un entier, on cherche à faire apparaître un 1 ou -1 puisque les puissance de ces deux entiers sont faciles à déterminer. La première question de l'exercice précédent est un bon exemple.

Soient a et b deux entiers relatifs et n un entier non nul tel que $a \equiv b \pmod n$, alors pour tout entier non nul c, on a
$$ac \equiv bc \pmod{cn}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que si n divise $a-b$, alors cn divise $c(a-b) = ca - cb$.

Soient a et b deux entiers relatifs et n et m deux entiers non nuls premiers entre eux tels que $a \equiv b \pmod n$, et $a \equiv b \pmod m$
$$a \equiv b \pmod{nm}$$

Démonstration. Il suffit de voir que n divise $a-b$ et m divise $a-b$, donc nm divise $a-b$ puisque n et m sont premiers entre eux. ➺ Plus généralement, si $a \equiv b \pmod n$, et $a \equiv b \pmod m$, alors $a \equiv b \pmod{n \vee m}$.

Montrer que pour tout entier x, l'entier
$$X = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$$
est divisible par 720.

Solution. L'entier X est produit de 6 entiers consécutifs, il est donc divisible par 6. D'autre part, $x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ est produit de 5 entiers consécutifs et finalement X est divisible par 8, puisque $x(x+1)$, $(x+2)(x+3)$ et $(x+4)(x+5)$ sont divisibles par 2, donc leur produit X. Donc X est divisible par le ppcm de $5, 6$ et 8 et celui-ci vaut 720.

(Olympiade Anglaise 2000) Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier
$$A_n = 121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n$$
est divisible par 2000.

Solution. Puisque $2000 = 16 \times 125$ et que $16 \wedge 125 = 1$, alors il suffit de montrer que l'entier A_n est divisible par 2000. Modulo 16, on a $121 \equiv 25 \pmod{16}$, donc $121^n \equiv 25^n \pmod{16}$, et on a aussi $1900 \equiv -4 \pmod{16}$, donc $100^n \equiv (-4)^n \pmod{16}$, d'où $A_n \equiv 0 \pmod{16}$. D'autre part, on a $121^n \equiv (-4)^n \pmod{125}$ et aussi $1900^n \equiv 25^n \pmod{125}$. Finalement $A_n \equiv 0 \pmod{125}$. En conclusion, $A_n \equiv 0 \pmod{16}$ et $A_n \equiv 0 \pmod{125}$, donc $A_n \equiv 0 \pmod{2000}$ puisque 16 et 25 sont premiers entre eux.

(Olympiade Irlandaise 1996) Soit p un nombre premier, a et n deux entiers naturels ≥ 1 tels que
$$2^p + 3^p = a^n$$

Solution. Il est clair que si $p = 2$, le résultat est évident. Supposons maintenant que le nombre premier p est ≥ 3. On remarque que $5 = 2 + 3$ divise $2^p + 3^p$ puisque p est un nombre impair. donc 5 divise a^n, si n était ≥ 2, alors 25 va diviser $5(2^{p-1} - 2^{p-2}3 + \ldots - 3^{p-1})$, puisque

$3 \equiv -2 \pmod 5$, alors

$$2^{p-1} - 2^{p-2}3 + \ldots - 3^{p-1} \equiv \underbrace{2^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + 2^{p-1}}_{p \quad \text{fois}} \equiv p2^{p-1} \pmod 5$$

Donc p divise $p2^{p-1}$ et alors 5 divise p par le théorème de Gauss puisque 5 et 2 sont premiers entre eux. D'où, $p = 5$ et alors en substituant p dans l'équation de base, on retrouve une contradiction.

Montrer que 7 divise

$$13^{682} - 1$$

SOLUTION. On remarque que

$$13^{682} = (14-1)^{682} = (2 \times 7 - 1)^{682} \equiv (-1)^{682} \equiv 1 \pmod 7$$

D'où le résultat. ➽ De manière générale, on a pour tout entiers a, b et tout entier non nul n,

$$(an + b)^m \equiv b^m \pmod n$$

où $m \geq 1$ un entier naturel.

Montrer que les entiers

$$a_n = 1 + 6 + 6^2 + \ldots + 6^{n-1} - n$$

sont divisibles par 5 pour tout entier naturel non nul n.

SOLUTION. On remarque que $6^k \equiv 1 \pmod 5$ pour tout entier naturel k, donc

$$1 + 6 + + \ldots + 6^{n-1} \equiv \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \quad \text{fois}} \pmod 5$$

D'où le résultat.

Deux entiers naturels sont dit des nombres jumeaux sont deux nombres premiers qui ne diffèrent que de 2.
Soient $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}_{(10)}$ et $\overline{b_1 b_2 \ldots b_n}_{(10)}$ la représentation en base décimale de deux nombres jumeaux ≥ 5. Montrer que l'entier N de représentation en base décimale $\overline{a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_n b_n}_{(10)}$ ne peut pas être un nombre premier.

SOLUTION. Pour un entier naturel x quelconque dont la représentation en base décimale $\overline{x_1 \ldots x_n}_{(10)}$, on a $x \equiv x_1 + \ldots + x_n \pmod{10}$. En effet, on écrit

$$x = \overline{x_1 \ldots x_n}_{(10)} = 10^n x_1 + 10^{n-1} x_2 + \ldots + x_n \equiv x_1 + \ldots + x_n \pmod 3$$

Les deux entiers a et b étant des nombres jumeaux, ils sont en particuliers des nombres premiers et on aura donc par exemple (en supposant que $a < b$) $a \equiv 2 \pmod 3$ et $b \equiv 1$ (on ne pas avoir $a \equiv 0 \pmod 3$ ou $b \equiv 0 \pmod 3$ car $b > a \geq 5$ des nombres premiers). Par conséquent

$$\overline{a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_n b_n}_{(10)} \equiv a_1 + b_1 + \ldots + a_n + b_n \equiv (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n) \equiv a + b \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$$

Donc, l'entier $\overline{a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_n b_n}_{(10)}$ est divisible par 3 et puisqu'il est > 3, il est alors non premier.

3.8.1 Petit théorème de Fermat

En mathématiques, le petit théorème de Fermat est un résultat de l'arithmétique modulaire, qui peut aussi se démontrer avec les outils de l'arithmétique élémentaire.

Il s'énonce comme suit : « si p est un nombre premier et si a est un entier non divisible par p, alors $a^{p-1}-1$ est un multiple de p », autrement dit (sous les mêmes conditions sur a et p), a^{p-1} est congru à 1 modulo p,

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

Un énoncé équivalent est : « si p est un nombre premier et si a est un entier quelconque, alors a $a^p - a$ est un multiple de p »,

$$a^p \equiv a \pmod p$$

Il doit son nom à Pierre de Fermat, qui l'énonce pour la première fois en 1640. Dans ce cours, on énonce (sans démonstration) le petit théorème de Fermat. Pour une démonstration, on renvoie le lecteur vers le chapitre d'algèbre, dans la section concernant la loi de composition interne et la structure de Groupe.

Soit a un entier relatif et p, un nombre premier. Alors

$$a^p \equiv a \pmod p$$

➺ On a déjà vu des cas particuliers de ce théorème. En effet, pour tout entier relatif n, on a $n^2 \equiv n \pmod 2$ et $n^3 \equiv n \pmod 3$.

Montrer que pour tout entier a, on a

$$26 \quad \text{divise} \quad a^{13} - a$$

Solution. Soit a un entier relatif. Le petit théorème de Fermat nous assure (puisque 13 est un nombre premier) que

$$a^{13} \equiv a \pmod{13}$$

De plus, on a

$$a^{13} \equiv a \pmod 2$$

puisque les entiers a et a^{13} possèdent la même parité. On sait que $26 = 2 \times 13$ et que 2 et 13 sont premiers entre eux. Alors

$$a^{13} \equiv a \pmod{26}$$

D'où le résultat.

Montrer que que

$$1998^{1321^{2019}} \equiv 678 \pmod{1321}$$

Solution. Puisque tous les nombres premiers inférieurs ou égals à $\sqrt{1321}$ ne divise pas ce dernier, alors 1321 est un nombre premier, il vient que

$$1998^{1321} \equiv 1998 \equiv 678 \pmod{1321}$$

Donc,
$$1998^{1321^{2019}} \equiv 1998^{1321^{2018}} \equiv \ldots \equiv 1998^{1321^2} \equiv 1998^{1321} \equiv 678 \pmod{1321}$$
D'où, le résultat souhaité.

> Soient a, b et c trois entiers relatifs. Montrer l'équivalence suivante
> $$6 \mid a^{81} + b^{81} + c^{81} \iff 6 \mid a + b + c$$

SOLUTION. On commence par remarquer que les entiers x et x^{81} ont même parité, donc 2 divise leur différence. Par conséquent $x^{81} \equiv x \pmod 2$ pour $x \in \{a, b, c\}$. On montre également que $x^{81} \equiv x \pmod 3$ pour $x \in \{a, b, c\}$. En effet, pour un entier x d'après le théorème de Fermat, on a $x^3 \equiv x \pmod 3$, par conséquent $x^{81} \equiv x^{27} \equiv x^9 \equiv x^3 \equiv x \pmod 3$, d'ou le résultat. Donc $x^{81} \equiv x \pmod 6$ (puisque 2 et 3 sont premiers entre eux) et par conséquent
$$a^{81} + b^{81} + c^{81} \equiv a + b + c \pmod 6$$
Ce qui permet de conclure.

> Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels k tels que
> $$p \quad \text{divise} \quad 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + (p+1)^k$$

SOLUTION. Pour tout $x \in \{1, 2, \ldots, p-1, p+1\}$, on sait d'après le petit théorème de Fermat que $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, donc on on prend les entiers naturels k comme étant les multiples de $p-1$ (qui sont bien évidemment en nombre infini), on trouve $x^k \equiv 1 \pmod p$ pour tout $x \in \{1, 2, \ldots, p-1, p+1\}$, les $x \in \{1, 2, \ldots, p-1, p+1\}$ étant en nombre p, alors leur somme est congru à $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{p} = p$ modulo p. La quantité $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + (p+1)^k$ est alors divisible par p (puisque p divise p^k. Les entiers naturels k étant en nombre infini, on a alors répondu à la question.

> Déterminer tous les polynômes P à coefficients entiers tels que $P(n)$ divise $2^n - 1$ pour tout entier naturel non nul n.

SOLUTION. Rappelons une propriété utile qu'on utilisera par la suite; Soit Q un polynôme à coefficients entiers et a et b deux entiers, alors $a - b$ divise $Q(a) - Q(b)$. En effet, pour $Q(x) = c_d x^d + \ldots + c_0$, regardons les monômes x^k, remarquons que $a - b$ divise $a^k - b^k$, donc par combinaison linéaire $a - b$ divise $Q(a) - Q(b)$. Fixons maintenant un nombre premier q diviseur de $P(n_0)$ pour un entier naturel non nul n_0 (en supposant qu'il existe un tel n_0 tel que $|P(n_0)| \geq 2$), $q = n_0 + q - n_0$ divise $Q(n+q) - Q(n_0)$, mais q divise $P(n_0)$, alors q divise $P(n_0+q)$ qui divise à son tour $2^{n_0+q} - 1$, donc par transitivité q divise $2^{n_0+q} - 1$. Or
$$0 \equiv 2^{n_0+q} - 1 \equiv 2^q \times 2^{n_0} - 1 \equiv 2 \times 2^{n_0} - 1 \equiv 2^{n_0+1} - 1 \pmod q$$
mais $2^{n_0} \equiv 1 \pmod q$ (puisque q divise $2^{n_0} - 1$), donc q divise 1, ce qui est impossible. Donc pour tout entier naturel non nui n, $P(n) \in \{-1, 1\}$, mais le polynôme P va prendre pour une infinité d'entiers naturels, la, soit la valeur -1 ou 1, il va par conséquent être constamment égal à cette valeur. Réciproquement, on vérifie que les polynômes qui sont constamment égaux à -1 et 1 sont solutions du problème.

Montrer que
$$7 \quad \text{divise} \quad 2222^{5555} + 5555^{2222}$$

SOLUTION. On sait que $2222 \equiv 3 \pmod 7$ et $5555 \equiv 4 \pmod 7$, et la division euclidienne par 6 fournit $2222 = 370 \times 6 + 2$ et $5555 = 925 \times 6 + 5$. Le petit théorème de Fermat permet d'écrire alors,
$$2222^{5555} \equiv 3^{5555} \equiv 3^{925\times 6+5} \equiv (3^6)^{925} \times 3^5 \equiv 243 \equiv 5 \pmod 7$$
Et de même, on trouve $5555^{2222} \equiv 2 \pmod 7$, d'où
$$7 \quad \text{divise} \quad 2222^{5555} + 5555^{2222}$$

1. Soient a et b deux entiers et n un entier naturel non nul tels que
$$a \equiv b \pmod n$$
Montrer que
$$a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$$
2. Déterminer les chiffres des unités et des dizaines du nombre $N = 67^{40}$.

SOLUTION.

1. Soient a et b deux entiers et n un entier naturel non nul tels que
$$a \equiv b \pmod n$$
Il s'agit de montrer que n divise $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$, puisque n divise $a - b$, il reste à prouver que n divise aussi $a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}$, or on sait que $a^k \equiv b^k \pmod n$ pour tout entier naturel k, donc
$$a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1} \equiv a^{n-1}+a^{n-2}a+\ldots+a^{n-1} \equiv \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots + a^{n-1}}_{n \quad \text{fois}} \equiv na^{n-1} \equiv 0 \pmod n$$
D'où le résultat.
2. Il s'agit de déterminer le reste de $N = 67^{40}$ modulo 100. Or, on a
$$67^4 \equiv 7^4 \equiv 49^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{10}$$
Donc, en levant à la puissance 10, on retrouve en utilisant la question précédente
$$N = 67^{40} \equiv 1 \pmod{100}$$
Donc, les chiffres des unités de l'entier $N = 67^{40}$ est 1 et le chiffre des dizaines est 0.

3.9 Carrés parfaits

Un entier naturel c est dit carré parfait s'il s'écrit sous la forme d'un carré d'un autre entier naturel. Dans cette section, on va voir de différentes techniques et idées portant sur ce type d'entiers spéciales.

Déterminer tous les entiers naturels n tels que

$$\sqrt{1+5^n+6^n+11^n} \in \mathbb{N}$$

Solution. L'entier $n=0$ est clairement une solution. Montrons que c'est la seule solution. Soit $n \geq 1$ un entier naturel, on regarde les chiffres de l'unité des entiers naturels $1, 5^n, 6^n$ et 11^n. Le chiffre des unités de 5^n est 5, celui de 6^n est 6 et finalement le chiffre des unité de l'entier 11^n est 1. Donc, le chiffres des unités de $1+5^n+6^n+11^n$ est 3. Mais le chiffre des unités d'un carré parfaits ne peut jamais être égal à 3. Ceci permet de conclure.

Montrer que si on a ajoute 1 au produit de quatre entiers naturels consécutifs, on obtient un carré parfait.

Solution. Soit n un entier naturel, on remarque que

$$\begin{aligned} N = n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n+1)(n+2)n(n+3)+1 = (n^2+3n+2)(n^2+3n)+1 \\ &= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 = (n^2+3n+1)^2 \end{aligned}$$

Ceci est est suffisant pour conclure.

Les restes possibles de la division euclidienne d'un carré parfait par 3 sont 0 et 1.

Démonstration. En effet pour un entier x, on a $x \equiv 0, 1, 2 \pmod 3$, donc $x^2 \equiv 0, 1, 4 \equiv 0, 1, 1 \pmod 3$. Finalement, les restes possibles d'un carré parfait modulo 3 sont 0 et 1.

Existe t-il un entier x tel que

$$x^4 = 10^{100} + 7 \quad ?$$

Solution. Le côté de gauche de l'équation est un carré parfait, mais le côté de droite est congru à 2 modulo 3. Ceci est bien sur suffisant pour affirmer que l'équation de base n'admet pas de solution entière.

Soient x et y deux entiers relatifs tels que 3 divise x^2+y^2. Montrer que 3 divise x et 3 divise y.

Solution. On utilise un tableau de congruence,

	0	1
0	0	1
1	1	2

On voit que le seul cas portant sur le couple (x, y) tel que $x^2+y^2 \equiv 0 \pmod 3$ est le cas où $x \equiv 0 \pmod 3$ et $y^2 \equiv 0 \pmod 3$, donc 3 divise x^2 et y^2. Par conséquent, 3 divise x et y puisque 3 est un nombre premier. ➳ Le résultat de l'exemple précédent peut être généralisé comme ce qui suit.

Soit $p \equiv 3 \pmod 4$ un nombre premier divisant la somme de deux carrés x^2 et y^2. Alors p divise x et y.

Démonstration. Il suffit de montrer que p divise x ou y (car si par exemple p divise x, il va diviser $y^2 = x^2 + y^2 - x^2$, par conséquent p va diviser y^2, et par la suite p divisera y. Supposons par l'absurde que x et y ne sont pas divisibles par p. Il vient que x et p sont premiers entre eux, donc le théorème de Bezout nous assure l'existence de deux coefficients entiers u et v tels que $ux = vp + 1$. Un passage modulo p, fournit $ux \equiv 1 \pmod p$, donc $(ux)^2 \equiv 1 \pmod p$ mais on sait que $x^2 \equiv -y^2 \pmod p$, donc

$$(uy)^2 \equiv -1 \pmod p, \qquad (*)$$

D'autre par p ne peut pas diviser uy (sinon p divisera 1), donc uy et p sont premiers entre eux, puisque p est un nombre premier, alors le théorème de Fermat nous assure que $(uy)^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. En comparant avec $(*)$ on trouver (puisque $\frac{p-1}{2}$ est un entier),

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (uy)^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

Donc, $\frac{p-1}{2}$ est pair, par conséquent il existe un entier k tel que $p - 1 = 4k$, c'est à dire $p \equiv 1 \pmod 4$. Ceci contredit clairement la donnée de $p \equiv 3 \pmod 4$.

Trouver tous les couples d'entiers relatifs (x, y) vérifiant l'équation

$$(E), \qquad x^2 + y^2 = 7^{2020}$$

Solution. Soit (x, y) une solution éventuelle du problème. On sait que 7 divise x^2+y^2, donc 7 divise x et y puisque 7 est un nombre premier congru à 3 modulo 4. En posant $(x, y) = (7x', 7y')$, on trouve que le couple (x', y') est solution de l'équation

$$(E'), \qquad x'^2 + y'^2 = 7^{2018}$$

Supposons que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Soit α l'exposant de 7 dans la décomposition en facteurs premiers de x et β l'exposant de 7 dans la décomposition en facteurs premiers de y et $\gamma = \min(\alpha, \beta)$. Donc $x = 7^\gamma x_0$ et $y = 7^\gamma y_0$, en substituant dans l'équation (E), on trouve

$$7^{2\gamma} x_0^2 + 7^{2\gamma} y_0^2 = 7^{2018}, \qquad (*)$$

Bien sur γ est inférieur où égal à 2020, sinon un argument de majoration permet de trouver une absurdité. Donc $(*)$ entraîne

$$x_0^2 + y_0^2 = 7^{2020-2\gamma}$$

Si jamais, on a avait $2\gamma \neq 2020$, alors 7 divisera $x_0^2 + y_0^2$, par conséquent 7 va diviser x_0 et y_0, et ceci n'est pas possible puisque si par exemple $\gamma = \alpha$, on aura $7^{\alpha+1}$ divise x, et ceci contredira la définition de α (7^α la plus grande puissance avec laquelle 7^α divise x). Donc $2\gamma = 2020$, c'est à dire $\gamma = 1010$, mais $\gamma = \min(\alpha, \beta)$ et $2\alpha, 2\beta \leq 2020$, donc $\alpha = \beta = 1010$, il vient que $x_0^2 + y_0^2 = 1$, donc l'un des deux entiers x_0 et y_0 est nul. Par conséquent, l'un des deux entiers x et y est nul et ceci est contraire à l'hypothèse de départ ($x \neq 0$ et $y \neq 0$). Donc, $x = 0$ ou $y = 0$, d'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) (après avoir étudier la réciproque) est

$$S = \{(0, -7^{1010}), (-7^{1010}, 0), (0, 7^{1010}), (7^{1010}, 0)\}$$

Les restes possibles de la division euclidienne d'un carré parfait par 4 sont 0 et 1.

Démonstration. En effet pour un entier x, on a $x \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$, donc $x^2 \equiv 0, 1, 4, 9 \equiv 0, 1, 0, 1 \pmod 3$. Finalement, les restes possibles d'un carré parfait modulo 3 sont 0 et 1.

Existe t-il des entiers a et b tels que

$$a^2 + b^2 = 2019 \quad ?$$

Solution. Un carré parfait est congru à 0 ou 1 modulo 4. Donc, la somme de deux carrés est congru à $0, 1, 2$ modulo 4 mais on voit que 2019 est congru à 3 modulo 4. Par conséquent, il n'existe pas d'entiers a et b tels que $a^2 + b^2 = 2019$.

Les restes possibles de la division euclidienne d'un carré parfait par 8 sont 0 et 1 et 4.

Démonstration. En effet pour un entier x, on a $x \equiv 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7 \pmod 8$, donc

$$x^2 \equiv 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 \equiv 0, 1, 4, 1, 0, 1, 4, 1 \pmod 3$$

Finalement, les restes possibles d'un carré parfait modulo 8 sont 0 et 1 et 4.

Existe t-il des entiers a, b et c tels que

$$9a^2 + 33b^2 + 17c^2 = 2023$$

Solution. Soit (a, b, c) une solution éventuelle du problème. On raisonne modulo 8, en remarquant que

$$9a^2 + 33b^2 + 17c^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 \pmod 8$$

D'autre part, 2023 est congru à 7 modulo 8. Or la somme de 3 carrés parfaits ne peut pas être congrue à 7 modulo 8 (puisque un carré est congru à $0, 1$ ou 4 modulo 8). Donc un tel triplet (a, b, c) n'existe pas.

Montrer que de deux entiers qui s'écrivent sous forme de somme de deux carrés est encore somme de deux carrés.

Solution. Il suffit de remarquer que

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax)^2 + (by)^2 + (ay)^2 + (bx)^2 = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$$

D'où le résultat.

3.10 Introduction aux équations diophantiennes

Une équation diophantienne est une équation à coefficients entiers dont on cherche des solutions entières. Il n'existe pas de méthode générale pour résoudre une équation diophantienne. Cependant, il existe plusieurs techniques et approches pour attaquer de telles équationd. Dans ce cours on va découvrir plusieurs techniques à savoir les méthodes élémentaires de résolution, l'utilisation des congruences, l'utilisation des inégalités et autres méthodes et techniques ...

3.10.1 Factorisations

Dans plusieurs équations diophantiennes, la clé de résolution se base sur des identités, nous allons dans cette section donner les identités remarsuables les plus célèbres et les plus utiles ...

Soient a et b des nombres réels et n un entier naturel non nul,

$$a^{2^n}-b^{2^n} = (a-b)\times(a+b)\times(a^2+b^2)\times(a^4+b^4)\times\ldots\times(a^{2^{n-1}}+b^{2^{n-1}}) = (a-b)\times\prod_{p=1}^{n-1}(a^{2^p}+b^{2^p})$$

Démonstration. On procède par récurrence pour montrer cette identité. Pour $n=1$, c'est trivial. Supposons l'identité vraie pour le rang $n\geq 1$ et montrons qu'elle est vraie pour le rang $n+1$. Soient a et b des nombres réels, on a

$$a^{2^{n+1}}-b^{2^{n+1}} = \left(a^{2^n}\right)^2-\left(b^{2^n}\right)^2 = (a^{2^n}-b^{2^n})\times(a^{2^n}+b^{2^n}) = (a-b)\times\prod_{p=1}^{n-1}(a^{2^p}+b^{2^p})\times(a^{2^n}+b^{2^n}) = (a-b)\times\prod_{p=1}^{n}(a^{2^p}+b^2$$

d'où le résultat est vrai pour le rang $n+1$. Donc l'identité est vrai pour tous réels a et b et pour tout entier naturel non nul n. ➽ La notation $\prod_{k=1}^{n} a_k$ désigne le produit des nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ où $n\geq 1$ un entier naturel. On étudiera les propriétés concernant ce symbole dans la suite de ce cours.

1. Soit n un entier naturel, le n-ème nombre de Fermat est défini par $F_n = 2^{2^n}+1$. Montrer que tous les nombres de Fermat sont premiers entre eux deux à deux.
2. Soit n un entier naturel. Montrer que si l'entier 2^n+1 est premier, alors n est une puissance de 2.

Solution.

1. Soient $n<m$ deux entiers naturels. Il s'agit de montrer que F_n et F_m sont premiers entre eux, on note classiquement Δ leur plus grand diviseurde F_n et F_m commun et montre qu'il vaut 1. L'entier Δ divise F_m-2. En effet,

$$F_m-2 = 2^{2^m}-1 = \prod_{k=1}^{m-1}(2^{2^k}+1) = F_n\times\prod_{k=1,k\neq n}^{m-1}(2^{2^k}+1)$$

   Donc Δ divise 2, i.e. $\Delta\in\{1,2\}$. Or, Δ ne peut pas être égal à 2 puisque 2 ne peut pas divise un nombre de Fermat. Donc $\Delta=1$, ce qui est équivaut à dire que F_n et F_m sont premiers entre eux.

2. On écrit $n=2^p(2q+1)$ où p et q deux entiers naturels. Il s'agit de montrer que $q=0$, supposons que $q\geq 1$. On remarque que

$$2^n+1 = 2^{2^p(2q+1)}+1 = (2^{2^p}+1)K$$

   En utilisant une identité remarquable classique. Donc, 2^n+1 n'est pas premier, ce qui contredit l'hypothèse. Donc, n est une puissance de 2.

(Identité de Sophie Germain). Soient a et b des nombres réels, alors

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$$

Démonstration. Soient a et b des nombres réels, alors

$$a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$$

D'où l'identité.

(Olympiade marocaine 2018). Déterminer tous les couples d'entiers naturels (x, y) tels que,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$$

Solution. Soit (x, y) une solution éventuelle de l'équation ci-dessus. L'équation ci-dessus est équivalente à

$$5x + 5y - xy = 0$$

Ce qui est équivaut à

$$5x - xy + 5y = (5 - y)x + 5y - 25 = -25$$

qui est équivalente à

$$(x - 5)(y - 5) = 25$$

Ceci est équivalent à

$$\left\{ x - 5 = 1y - 5 = 25 \right. \qquad \left\{ x - 5 = 25y - 5 = 1 \right. \qquad \left\{ x - 5 = 5y - 5 = 5 \right.$$

c-à-d

$$\left\{ x = 6y = 30 \right. \qquad \left\{ x = 30y = 6 \right. \qquad \left\{ x = 10y = 10 \right.$$

Donc l'ensemble des solution de l'équation est

$$S = \{(5, 5), (6, 30), (30, 6)\}$$

Trouver tous les entiers naturels x et n tels que

$$2^n + 1 = x^2$$

Solution. On passe le 1 de l'autre côté de l'égalité et on factorise,

$$(x - 1)(x + 1) = 2^n$$

Donc $x - 1$ et $x + 1$ sont des puissances de 2, or les seules puissances de 2 qui différent de 2 sont 2 et 4, il vient que $x = 3$ et par suite $2^n + 1 = 9$, donc $n = 3$. Réciproquement le couple $(3, 3)$ est une solution. Donc l'unique solution du problème est $(3, 3)$.

(Olympiade Indienne 1993) Déterminer les solutions entières positives de l'équation

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$$

Solution. L'équation est équivalente à l'équation

$$(xy-6)^2+13=(x+y)^2$$

c'est à dire

$$[xy-6-(x+y)]\times[xy-6+(x+y)]=-13$$

Ce qui donne les systèmes d'équations

$$\left\{ xy-6-(x+y)=-1xy-6+(x+y)=13 \right. \qquad \left\{ xy-6-(x+y)=-13xy-6+(x+y)=1 \right.$$

Ce qui est équivalent à

$$\left\{ x+y=7xy=12 \right. \qquad \left\{ x+y=7xy=0 \right.$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation proposée est

$$S=\{(3,4),(4,3),(0,7),(7,0)\}$$

3.10.2 Discriminant d'un trinôme à coefficients entiers

Commençons par donner une proposition concernant les trinômes unitaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Soient $a,b\in\mathbb{Z}$, alors l'équation

$$x^2+ax+b=0$$

admet une solution dans $\mathbb{Z}$ si et seulement son discriminant est un carré parfait.

Démonstration. Soient a et b deux entiers relatifs. Supposons que l'équation x^2+ax+b admet une solution dans $\mathbb{Z}$, soit x_0 cette solution et soit x_1 la seconde solution. On sait que $x_0+x_1=-a$, donc $x_1\in\mathbb{Z}$ et on a $x_0x_1=b$. Le discriminant de l'équation $x^2+ax+b=0$ est

$$\Delta=a^2-4b=(x_0+x_1)^2-4x_0x_1=(x_0-x_1)^2$$

qui est évidemment un carré parfait. D'où la condition nécessaire. Réciproquement, supposons que le discriminant Δ de l'équation x^2+ax+b est un carré parfait,c'est à dire $\Delta=a^2-4b=k^2$ et par suite les solutions de l'équation $x^2+ax+b=0$ sont

$$x_0=\frac{-a+k}{2}, \quad x_1=\frac{-a-k}{2}$$

Sachant que $a^2-4b=\alpha^2$, ce qui signifie que $4b=a^2-\alpha^2=(a-\alpha)(a+\alpha)$ donc l'un des deux entiers $a-\alpha$ et $a+\alpha$ est pair, il s'en suit que a et α ont la même parité, et par suite les deux entiers $a-\alpha$ et $a+\alpha$ sont pairs. Par suite les deux solutions x_0 et x_1 sont des entiers, d'où la condition suffisante.

Déterminer tous les entiers naturels n tels que $n+1$ divise n^2-2n+3.

Solution. On peut résoudre ce petit problème en utilisant uniquement des arguments de divisibilité. Mais on va utiliser la technique décrite précédemment. Soit n un entier naturel éventuel vérifiant la condition ci-dessus. Alors il existe k entier naturel tel que $n^2-2n+3=k(n+1)$, ce qui est équivalent à $n^2-(k+2)n+3-k=0$, cette équation admet une solution en vertu de notre hypothèse, donc son discriminant est un carré parfait, c-à-d

$$(2+k)^2-4(3-k)=\alpha^2$$

Ce qui est équivalent à

$$(k+4)^2 - \alpha^2 = (k+4-\alpha)(k+4+\alpha) = 24$$

Les solutions de cette équation sont $(k, \alpha) = (1, 1)$ et $(k, \alpha) = (3, 5)$. Il s'en suit que $n \in \{0, 1, 2, 5\}$, réciproquement il s'agit bien de solutions du problème.

(Olympiade américaine 2002) Déterminer les solutions entières non nuls de l'équation

$$(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3$$

Solution. L'équation diophantienne ci-dessus est équivalente à

$$2y^2 + (x^2 - 3x)y + 3x^2 + x = 0$$

Cette équation admet une solution si et seulement si sont discriminant $x(x+1)^2(x-8)$ est un carré parfait, il s'en suit que $x(x-8)$ est un carré parfait, i.e. $x(x-8) = z^2$ donc $(x-4)^2 - z^2 = 16$. Ceci fournit $x \in \{-1, 8, 9\}$ et alors $(x, y) \in \{(-1, -1), (8, -10), (9, -10), (9, -21)\}$. La réciproque donne

$$S = \{(-1, -1), (8, -10), (9, -10), (9, -21)\}$$

(Olympiade marocaine 2016) Trouver tous les nombres premiers p et q vérifiant

$$p^3 + p = q^2 + q$$

Solution. Soit (p, q) une solution éventuelle de l'équation. Il est clair que les deux nombres premiers p et q sont différents et que $p < q$ et en particulier p et q sont premiers entre eux. D'autre part p divise $q(q+1)$, et par le lemme de Gauss p divise $q+1$. On pose $q+1 = kp$, i.e. $q = kp - 1$ et en substituant dans l'équation de base on trouve

$$p^3 + p = q^2 + q = (kp-1)^2 + (kp-1) = k^2p^2 - 2kp + kp = k^2p^2 - kp$$

Ce qui est équivalent à

$$p^2 - k^2p + kp + 1 = p^2 - (k^2 - k)p + 1 = 0$$

Donc le discriminant de cette équation est un carré parfait, i.e.

$$(k^2 - k)^2 - 4 = \alpha^2$$

où α est un entier naturel. Ceci fournit les systèmes d'équations

$$\left\{ k^2 - k + \alpha = 4k^2 - k - \alpha = 1 \right. \qquad \left\{ k^2 - k + \alpha = 1k^2 - k - \alpha = 4 \right. \qquad \left\{ k^2 - k + \alpha = 2k^2 - k - \alpha = 2 \right.$$

Ce qui implique que

$$2k^2 - 2k - 5 = 0, \quad 2k^2 - 2k - 4 = 0$$

La première équation n'admet pas de solution entière puisque sont discriminant n'est pas un carré parfait. La seconde équation à pour solutions entières -1 et 2, donc $k = 2$ et par suite

$$q + 1 = 2p$$

En substituant dans l'équation de base on trouve

$$p^3 + p = (2p-1)^2 + 2p - 1 = 4p^2 - 2p$$

i.e.

$$p^2 - 4p + 3 = 0$$

Donc $p = 3$, et par suite $q = 5$. Réciproquement le couple $(3, 5)$ s'agit bien d'une solution du problème. Alors

$$S = \{(3, 5)\}$$

3.10.3 Équations diophantiennes et inégalités

L'utilisation des majorations, des minorations peuvent s'avérer utile dans certaines situations, dans cette dernière partie de cette section, on va voir de nombreux exemples dont la résolution se fait en utilisant des inégalités.

(Olympiade marocaine 2018) Trouver tous les entiers naturels x et y tels que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$$

Solution. Soient (x, y) solution éventuelle de l'équation ci-dessus. Les entiers naturels x et y jouent des rôles symétrique, on peut alors supposer que $x \leq y$, il vient

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{2}{x}$$

Par conséquent $x \leq 10$. Sachant que $1/5 \geq 1/x$ d'après l'équation de base, alors $x \geq 5$. En substituant x par les valeurs $5, 6, 7, 8, 9, 10$, on trouve $S = \{(5, 30), (10, 10), (30, 5)\}$.

3.11 Exercices du troisième chapitre

Exercice 1. Soient x et y deux entiers relatifs. Montrer que 17 divise $2x + 3y$ si et seulement si 17 divise $9x + 5y$.

Exercice 2. Montrer que l'entier

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$

est divisible par 9 pour tout entier relatif n.

Exercice 3. Déterminer tous les couples d'entiers naturels (m, n) tels que

$$m^2 - n! = 780$$

Exercice 4. Existe-t-il un polynôme à coefficients entiers P tel que $P(1) = 2$ et $P(3) = 5$?

Exercice 5. Montrer que pour tout $n > 11$, l'entier $n^2 - 19n + 89$ n'est pas un carré parfait.

Exercice 6. Montrer que si n est un cube parfait, l'entier $n^2 + 3n + 3$ ne peut pas être un cube parfait.

Exercice 7. L'entier

$$4^{2019} + 2019^4$$

est-il un nombre premier ?

Exercice 8. Déterminer tous les couples d'entiers naturels (n, m) vérifiant

$$2^{2m} - 3^{2n} = 175$$

Exercice 9. Déterminer tous les couples (p, q) de nombres premiers tel que $p^2 + pq + q^2$ est un carré parfait.

Exercice 10. On considère l'équation

$$(E), \quad x^2 - 2px + p^2 - 5p - 1 = 0$$

où p est un nombre premier. Trouver les valeurs possibles du nombres premier p sachant que l'équation (E) admet deux racines entières.

Exercice 11. Décomposer l'entier

$$1001001001$$

en facteurs premiers.

Exercice 12. Soient p et q deux nombres premiers, et on pose

$$r = \frac{p^2 + q^2}{p + q}$$

Montrer que si r est un entier, alors il est un carré parfait.

Exercice 13. Déterminer les chiffres des unités et des dizaines des entiers,

$$N_1 = 7^{2019}, \qquad N_2 = 2^{999}$$

Exercice 14. Déterminer les entiers naturels n tels que

$$n! + 5$$

un cube parfait.

Exercice 15. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+1$.

Exercice 16. Montrer que

$$2^{11\times 31} \equiv 2 \pmod{11 \times 31}$$

Exercice 17. Déterminer les carrés parfaits dans la suite suivante,

$$1!,\ 1!+2!,\ 1!+2!+3!,\ \ldots, 1!+2!+\ldots+n!, \ldots$$

Exercice 18. Quelle est la valeur minimale positive de $12^m - 5^n$ pour m et n des entiers strictement positifs ?

Exercice 19. Soient $m, n \geq 1$ des entiers. Montrer que $3^m + 3^n + 1$ n'est pas un carré parfait.

Exercice 20. Trouver tous les entiers $x, y \geq 1$ tels que $3^x - 2^y = 7$.

Exercice 21. Trouver tous les entiers $n \geq 1$ tels que $2^n + 12^n + 2014^n$ soit un carré parfait.

Exercice 22. Montrer que tout entier relatif peut s'écrire comme la somme de cinq cubes d'entiers relatifs d'une infinité de manières différentes.

Exercice 23(Saint Petersbourg 1997). Soient x, y et z des entiers strictement positifs tels que $2x^x + y^y = 3z^z$. Montrer que $x = y = z$.

CHAPTER 4

ALGÈBRE

4.1 Radicaux, racines n-èmes

Soit a un nombre réel positif et $n \geq 2$ un entier naturel. Il existe un unique nombre réel positif r et noté $\sqrt[n]{a}$ qui vérifie $r^n = a$. Ce nombre réel est appelé racine n-ème de a. Le nombre réel $\sqrt[n]{a}$ est parfois noté $a^{\frac{1}{n}}$ (en particulier $\sqrt[n]{a}^m = a^{\frac{m}{n}}$ pour $a \in \mathbb{R}^+$ et $n, m \geq 2$ deux entiers naturels). Les règles de calcul sur les racines n-èmes sont similaires à ceux des racines carrées.

Résoudre l'équation suivante dans l'ensemble des nombres réels,

$$\sqrt{5x-1} + \sqrt{x-1} = 2$$

SOLUTION. *Première méthode.* Notons d'abord que le domaine de validité des solutions sont les réels ≥ 1. Soit x une solution éventuelle de l'équation. On a

$$\sqrt{5x-1} = 2 - \sqrt{x-1}$$

En levant au carré, on obtient $5x-1 = 4+x-1-4\sqrt{x-1}$, donc $x-1 = \sqrt{x-1}$, en levant au carré on obtient $x^2-2x+1 = x-1$, donc $x^-3x+2 = 0$, d'où $x \in \{1, 2\}$. Réciproquement, en vérifiant, on obtient que $x = 1$ est l'unique solution de l'équation. *Seconde méthode.* Il est clair que $x = 1$ est une solution de l'équation. Soit x une solution éventuelle > 1. On a alors

$$2 = \sqrt{5x-1} + \sqrt{x-1} > \sqrt{5 \times 1 - 1} + \sqrt{1-1} = 2$$

Et ceci n'est pas possible. Donc $x = 1$ est l'unique solution de l'équation.

Simplifier

$$A = \sqrt{17 \times 18 \times 20 \times 21 + 2.25}$$

SOLUTION. On pose $a = 19$, on trouve

$$A = \sqrt{(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) + 2.25} = \sqrt{(a^2-1)(a^2-4) + 2.25}$$

$$= \sqrt{a^4 - 5a^2 + 6.25} = \sqrt{\left(a^2 - \frac{5}{2}\right)^2} = \left|a^2 - \frac{5}{2}\right| = 19^2 - 2.5 = 358.5$$

Simplifier l'expression

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}$$

SOLUTION. On pose A le nombre réel en question, on multipliant par $\sqrt{2}$, on observe que

$$\sqrt{2}A=\sqrt{8+2\sqrt{7}}+\sqrt{8-2\sqrt{7}}=\sqrt{(\sqrt{7}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{7}-1)^2}=\sqrt{7}+1+\sqrt{7}-1=2\sqrt{7}$$

Donc, notre expression vaut $\sqrt{14}$.

Simplifier l'expression

$$X=\left(52+6\sqrt{43}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(52-6\sqrt{43}\right)^{\frac{3}{2}}$$

SOLUTION. On sait que

$$X=\sqrt{52+6\sqrt{43}}^{3}-\sqrt{52-6\sqrt{43}}^{3}$$

On commence par simplifier $\sqrt{52+6\sqrt{43}}$, on suppose qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que $\sqrt{52+6\sqrt{43}}=a+b\sqrt{43}$. En levant au carré, on obtient $52=a^2+43b^2$ et $ab=3$, une solution qui nous convient est $(a,b)=(3,1)$. Donc, $\sqrt{52+6\sqrt{43}}=3+\sqrt{43}$ et de même on trouve, $\sqrt{52-6\sqrt{43}}=-3+\sqrt{43}$. Donc,

$$X=\sqrt{52+6\sqrt{43}}^{3}-\sqrt{52-6\sqrt{43}}=\left(3+\sqrt{43}\right)^{3}-\left(3-\sqrt{43}\right)^{3}$$

En développant et en simplifiant, on obtient $X=828$.

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation

$$\sqrt[3]{60-x}+\sqrt[3]{x-11}=\sqrt[3]{4}$$

SOLUTION. Notons que le domaine de validité des solutions est $[11,60]$. Soit x une solution éventuelle de l'équation, on pose $\alpha=\sqrt[3]{60-x}$ et $\beta=\sqrt[3]{x-11}$. On sait que

$$\alpha+\beta=\sqrt[3]{4}$$

Et que

$$4=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)=49+3\alpha\beta\sqrt[3]{4}$$

D'où il vient $\alpha\beta=-15/\sqrt[3]{4}$, d'où $\alpha^3\beta^3=\frac{-3375}{4}$, sachant que $\alpha^3+\beta^3=49$. Donc α et β sont les solutions de l'équation

$$t^2-49t-\frac{3375}{4}=0$$

On trouve $(\alpha^3,\beta^3)\in\left\{\left(\frac{125}{2},-\frac{27}{2}\right),\left(-\frac{27}{2},\frac{125}{2}\right)\right\}$, il vient que $x\in\{-5/2,147/2\}$, sachant que le domaine de validité des solutions est $[11,60]$, alors l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble vide.

4.2 Logarithmes

En mathématiques, le logarithme de base b d'un nombre réel strictement positif est la puissance à laquelle il faut élever la base b pour obtenir ce nombre. Par exemple, le logarithme de 1000 en base 10 est 3, car $1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$. Le logarithme de x en base b est noté $\log_b(x)$. Ainsi $\log_{10}(1000) = 3$.

Pour tous nombres réels a et b et pour tout $x \geq 0$, on a

$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$

Notons que pour tout $a > 0$, on a $\log_a(a) = 1$ (puisque $a^1 = a$).

Soit b un nombre réel strictement positif, on a pour tous réels x et y strictement positifs,

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

Démonstration. On sait d'une part (par définition) que $b^{\log_b(xy)} = xy$ et d'autre part, on a

$$b^{\log_b(x)+\log_b(y)} = b^{\log_b(x)} \times b^{\log_b(y)} = xy$$

Donc, $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$.

Montrer que pour tout réel strictement positif b, on a

$$\log_b(1) = 0$$

Solution. On sait que pour tous réels x et y strictement positifs,

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

Donc, en prenant $x = y = 1$ dans cette égalité, on trouve $\log_b(1) = \log_b(1) + \log_b(1)$, d'où $\log_b(1) = 0$.

Montrer que pour tous réels strictement positifs b et a et pour tout entier naturel n, on a

$$\log_b(a^n) = n \log_b(a)$$

Solution. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, on a bien $\log_b(a^0) = \log_b(1) = 0 = 0 \times \log_b(a)$. Supposons sue le résultat est vrai pour le rang n, on a alors

$$\log_b(a^{n+1}) = \log_b(a \times a^n) = \log_b(a) + \log_b(a^n) = \log_b(a) + n \log_b(a) = (n+1) \log_b(a)$$

D'où le résultat par récurrence.

Montrer que pour tous réels strictement positifs b et x, on a

$$\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x)$$

Solution. On sait que

$$0 = \log_b(1) = \log_b\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \log_b(x) + \log_b\left(\frac{1}{x}\right) = \log_b(x) + \log_b\left(\frac{1}{x}\right)$$

Et le résultat découle.

Montrer que pour tous réels x et y strictement positifs, on a

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

Solution. On remarque que

$$\log_b(x) = \log_b\left(y \times \frac{x}{y}\right) = \log_b(y) + \log_b\left(\frac{x}{y}\right)$$

Donc

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

➽ Il est indispensable de retenir les règles de calcul portant sur les logarithmes qui ont été démontré ci-dessus. ➽ Il faut toujours garder en tête la définition de base du logarithme, qu'on peut écrire comme suit; pour tous réels strictement positifs b et x et tout réel a, on a $\log_b(x) = a$ si et seulement si $x = b^a$.

Déterminer

$$\log_4(128)$$

Solution. On note $c = \log_4(128)$, ceci équivaut à dire $4^c = 128$, c'est à dire $2^{2c} = 2^7$. Finalement, $c = 7/2$.

Simplifier la somme suivante,

$$S = \frac{1}{\log_2(100!)} + \frac{1}{\log_3(100!)} + \ldots + \frac{1}{\log_{100}(100!)}$$

Solution. On utilise l'identité

$$\log_x(y) \times \log_y(x) = 1$$

vraie pour tous réels x et y strictement positifs. On écrit

$$S = \log_{100!}(2) + \log_{100!}(3) + \ldots + \log_{100!}(100) = \log_{100!}(1 \times 2 \times \ldots \times 100) = \log_{100!}(100!) = 1$$

Donc $S = 1$.

4.3 Suites numériques

En mathématiques, une suite est une famille d'éléments — appelés ses « termes » — indexée par les entiers naturels. Une suite finie est une famille indexée par les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à un certain entier, ce dernier étant appelé « longueur » de la suite.

Lorsque tous les éléments d'une suite (infinie) appartiennent à un même ensemble E, cette suite peut être assimilée à une application de $\mathbb{N}$ dans E. On note classiquement une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou en abrégé (u_n).

En particulier, on parle de suite « entière », suite « réelle » et suite « complexe », quand E est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, respectivement.

Sans mettre les choses dans un cadre formelle, on va essayer de donner des exercices qui illustrent des techniques autour du thème des suites.

> On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n,
>
> $$u_{n+1} = u_n + 7$$

SOLUTION. La relation $u_{n+1} - u_n = 7$ étant vraie pour tout entier naturel n. On fixe un entier naturel n puis on écrit

$$u_n - u_0 = (u_{n+1} - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \ldots + (u_1 - u_0) = \underbrace{7 + 7 \ldots + 7}_{n\,\text{fois}} = 7n$$

Donc, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 7n + u_0 = 7n + 6$. Réciproquement, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par son terme général $u_n = 7n + 6$ vérifie la relation récursive de base. ➽ Ce type de suites est appelée une suite arithmétique de raison 7. Parfois, pour déterminer le terme général d'une suite récursive, on est ramené à considérer de nouvelles suites. L'exemple suivant illustre cette remarque.

> Déterminer le terme général de la suite définie par $u_1 = 2019$ et pour tout entier naturel non nul n, on a
>
> $$u_{n+1} = u_n + 2^n + 1998$$

SOLUTION. On remarque pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $2^n + 2^n = 2^{n+1}$, il vient

$$u_{n+1} + 2^n = u_n + 2^{n+1} + 1998$$

Si on pose pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n - 2^n$, on obtient pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$v_{n+1} = v_n + 1998$$

Donc, pour tout entier naturel

$$v_n = 1998(n-1) + v_1 = 1998(n-1) + (u_1 - 2^1) = 1998(n-1) + 2017$$

ça veut dire que $u_n - 2^n = 1998(n-1) + 2017$. Finalement, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$u_n = 2^n + 1998n + 19$$

On vérifie que cette suite vérifie les hypothèses de l'exercice. Une suite réelle $(x_n)_{n\geq 0}$ est appelée croissante (resp. décroissante) si pour tout entier naturel n, on a $x_{n+1} \geq x_n$ (resp. $x_{n+1} \leq x_n$).

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle définie par $x_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, on a la relation de récurrence

$$x_{n+1} = \frac{(x_n+1)^2}{2}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$x_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$$

Solution. On remarque que pour tout entier naturel n, on a

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(1+x_n)^2}{2} - x_n = \frac{(1+x_n)^2 - 2x_n}{2} = \frac{1+x_n^2}{2} \geq 0 \qquad (*)$$

Donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est croissante de sorte que $x_n \geq x_{n-1} \geq \ldots \geq x_0 = 2$, donc pour tout entier naturel n, on a $x_n \geq 2$. Revenons, à l'inégalité de $(*)$, on la réécrit

$$2x_{n+1} - 2x_n \geq 1 + x_n^2 \geq 1 + 2^2 = 5$$

D'où pour tout entier naturel n, on a

$$x_{n+1} - x_n \geq \frac{5}{2}$$

Pour un entier naturel n, on a

$$x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_1 - x_0) \geq \underbrace{\frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \ldots + \frac{5}{2}}_{n\text{ fois}}$$

Puisque $x_0 = 2$, on a bien l'inégalité souhaitée.

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite numérique définie par $a_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, la relation de récurrence

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{a_n}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$a_n \geq 2\sqrt{n}$$

Solution. On commence par remarquer que les termes de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ sont positifs (on peut ceci par une récurrence simple). Ensuite, on écrit

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{4}{a_n^2} + 4 \geq a_n^2 + 4$$

Une récurrence simple permet de voir que $a_{n+1}^2 \geq 4n$ pour tout entier naturel n, donc

$$a_n \geq 2\sqrt{n}$$

pour tout entier naturel n. D'où le résultat.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+2u_n^2}}$$

Expliciter le terme général u_n de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ en fonction de n.

Solution. On commence par affirmer que les termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ sont positifs (on montre ceci par une simple récurrence). Puis en élevant au carré, on obtient

$$u_{n+1}^2 = \frac{u_n^2}{1+2u_n^2} = \frac{1}{\frac{1}{u_n^2}+2}$$

pour tout entier naturel n. Donc

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n^2} + 2$$

pour tout entier naturel n. D'où

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} = 2n$$

Finalement, pour tout entier naturel n, on a

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

pour tout entier naturel n. Réciproquement la suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ vérifie les conditions portées sur la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$

$$u_{n+1} + u_n = n$$

Solution. Soit n un entier naturel

$$u_{n+2} = (n+1) - u_{n+1} = (n+1) - (n - u_n) = u_n + 1$$

Donc, en considérant les deux suites $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ de termes généraux respectifs u_{2n} et u_{2n+1}, on obtient

$$v_{n+1} = v_n + 1, \qquad w_{n+1} = w_n + 1$$

pour tout entier naturel, il vient que pour tout entier naturel n, on a (en remarquant que $u_1 = -u_0 = -1$

$$v_n = n + v_0 = n + u_0 = n + 1, \qquad w_n = n + w_0 = n + u_1 = n - 1$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_{2n} = n+1$ et $u_{2n+1} = n-1$ pour tout entier naturel n. On vérifie facilement que cette suite est solution du problème.

(Proposé aux olympiades internationales 2015). Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle vérifiant

$$x_{k+1} \geq \frac{kx_k}{x_k^2 + k - 1}$$

Montrer que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$ pour tout entier naturel $n \geq 2$.

Solution. On sait que pour tout entier naturel $k \geq 1$,

$$\frac{k}{x_{k+1}} \leq x_k + \frac{k-1}{x_k}$$

Donc, pour tout entier naturel k, on a

$$x_k \geq \frac{k}{x_{k+1}} - \frac{k-1}{x_k}$$

En sommant, on obtient pour tout entier naturel $n \geq 2$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq \frac{n}{x_{n+1}} \qquad (*)$$

Montrons l'inégalité souhaitée par une récurrence. Pour $n = 2$, on a $x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} \geq 2$, supposons que le résultat est vrai pour le rang n. Pour le rang $n+1$, si $a_{n+1} \geq 1$, c'est terminé, sinon en utilisant $(*)$, on obtient

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n+1} = (x_1+x_2+\ldots+x_n)+x_{n+1} \geq \frac{n}{x_{n+1}}+x_{n+1} = \frac{n-1}{x_{n+1}}+\frac{1}{x_{n+1}}+x_{n+1} \geq n-1+2 = n+1$$

Et ceci achève la récurrence.

Déterminer en fonction de n, le terme général de la suite réelle $(q_n)_{n\geq 0}$ définie par $q_0 = \frac{1}{3}$ et pour tout entier naturel n,

$$q_{n+1} = 4q_n$$

Solution. On vérifie par une récurrence simple que pour tous les termes de la suite $(q_n)_{n\geq 0}$ sont non nuls, puis on écrit pour tout entier naturel n,

$$\frac{q_n}{q_0} = \frac{q_n}{q_{n-1}} \times \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \times \ldots \times \frac{q_1}{q_0} = \underbrace{4 \times 4 \times \ldots \times 4}_{n\,\text{fois}} = 4^n$$

D'où, pour tout entier naturel n, on a $q_n = 4^n q_0$, c'est à dire

$$q_n = \frac{4^n}{3}$$

pour tout entier naturel n. Réciproquement, cette suite est solution du problème. ➽ Ce type de suite est appelée suite géométrique de raison 4.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle définie par $x_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, on a la relation de récurrence

$$x_{n+1} = \frac{(x_n+1)^2}{2}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$x_n \geq 2^{n+1}$$

Solution. On remarque que pour tout entier naturel n, on a

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(1+x_n)^2}{2} - x_n = \frac{(1+x_n)^2 - 2x_n}{2} = \frac{1+x_n^2}{2} \geq 0$$

Or, on sait que pour tout entier naturel $1 + x_n^2 \geq 2x_n$, donc $x_{n+1} - x_n \geq x_n$, il vient $x_{n+1} \geq 2x_n$. Cette inégalité est vraie pour tout entier naturel n, on a alors $x_n \geq 2^n x_0 = 2^{n+1}$ par positivité de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. D'où le résultat.

> On considère la suite de terme général (q_n) définie par $q_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, on a
> $$q_{n+1} = q_n^7$$
> Expliciter le terme général q_n de la suite $(q_n)_{n\geq 0}$ en fonction de n.

SOLUTION. On vérifie par une récurrence simple que les termes de la suite $(q_n)_{n\geq 0}$ sont strictement positifs. Donc, en composant par $\log_{10}$, on obtient

$$\log_{10}(q_{n+1}) = 7\log_{10}(q_n)$$

Une récurrence simple, montre que $\log_{10}(q_n) = 7^n$, il s'en suit que pour tout entier naturel n, on a

$$q_n = 10^{7^n}$$

Réciproquement, cette suite est solution du problème. ➽ On pourrait montrer le résultat directement par une récurrence simple, mais on a préféré utiliser une méthode plus efficace dans d'autres situations plus compliquées dont la détermination du terme général n'est pas aussi évidente. Une suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite périodique s'il existe un entier $r \geq 0$, tel que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+r} = u_n$.

> Soit $(t_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $t_0 = 2$ et la relation de récurrence suivante
> $$t_{n+1} = \frac{1 - t_n}{1 + t_n}$$
> Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique puis déduire le terme général t_n de la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ en fonction de n.

SOLUTION. La suite $(t_n)_{n\geq 0}$ est bien définie (dans le sens où $t_n \neq -1$ pour tout entier naturel n), de plus on a

$$t_{n+2} = \frac{1 - t_{n+1}}{1 + t_{n+1}} = \frac{1 - \dfrac{1 - t_n}{1 + t_n}}{1 + \dfrac{1 - t_n}{1 + t_n}} = \frac{2t_n}{2} = t_n$$

Donc, pour tout entier naturel n, on a $t_{n+2} = t_n$, autrement dit la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ est 2-périodique. D'où les deux suites de termes généraux respectifs t_{2n} et t_{2n+1} sont constantes de sorte que pour tout entier naturel n, on a $t_{2n} = t_0 = 2$ et $t_{2n+1} = t_1 = -1/3$. Réciproquement la suite définie par ces dernières conditions vérifie bien les conditions du problème.

Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par

$$k_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$$

pour tout entier naturel non nul n. Déterminer la valeur de la somme

$$k_1+k_2+\ldots+k_{9999}$$

SOLUTION. On remarque que pour tout entier naturel non nul n, on a

$$k_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\times\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\times(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

En sommant sur les $n\in\{1,2,\ldots,9999\}$, on trouve

$$k_1+k_2+\ldots+k_n = 1-\frac{1}{\sqrt{9999+1}} = 1-\frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite numérique définie par $x_0=5$ et pour tout entier naturel n,

$$x_{n+1} = x_n+\frac{1}{x_n}$$

Montrer que $x_{1000}>45$.

SOLUTION. Les termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positifs, de plus on a

$$x_{n+1}^2 = x_n^2+\frac{1}{x_n^2}+2 \geq x_n^2+2$$

Donc, pour tout entier naturel n, on a (par récurrence),

$$x_n^2 \geq 2n+u_0^2 \geq 2n+25$$

En particulier, pour $n=1000$, on a $x_{1000}^2 \geq 2025 > 45^2$, puisque $x_n\geq 0$, on obtient finalement

$$x_{1000}>45$$

Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*), \qquad r_{n+1}^2 = r_n+1$$

Prouver que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ contient des termes irrationnels.

SOLUTION. On suppose que tous les termes de la suites $(r_n)_{n\geq 1}$ sont rationnels. On écrit alors pour tout entier $n\geq 1$, $r_n = p_n/q_n$ où p_n deux entiers premiers entre eux.On sait que pour tout entier naturel n,

$$\frac{p_{n+1}^2}{q_{n+1}^2} = r_{n+1} = r_n+1 = \frac{p_n}{q_n}+1 = \frac{p_n+q_n}{q_n}$$

Mais, on a $p_{n+1}^2 \wedge q_{n+1}^2 = (p_n + q_n) \wedge q_n = 1$, donc $p_{n+1}^2 = p_n + q_n$ et $q_{n+1}^2 = q_n$. Cette dernière relation est vraie pour tout entier naturel n, puisque $q_n \in \mathbb{N}^*$, à partir d'un certain rang N, on a aura $q_n = 1$. Si r_N, alors $r_{N+1} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, il résulte que $r_n \geq 2$, mais $r_{n+1}^2 = r_n + 1 < r_n^2$, donc la suite $(r_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, et ceci n'est pas possible avec $r_n \in \mathbb{N}$ à partir d'un certain rang (puisque $q_n = 1$ à partir du rang N).

(UNE SUITE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = 17x_n + 2$ pour tout entier naturel n. Expliciter le terme x_n en fonction de n pour tout entier naturel.

SOLUTION. On remarque qu'en ajoutant 1/8 au deux côtés de la relation de récurrence, on trouve

$$\underbrace{x_{n+1} + \frac{1}{8}}_{y_{n+1}} = 17x_n + \frac{17}{8} = 17\left(\underbrace{x_n + \frac{1}{8}}_{y_n}\right)$$

Donc

$$x_n + \frac{1}{8} = 17^n\left(x_0 + \frac{1}{8}\right) = 17^n\left(1 + \frac{1}{8}\right) = \frac{9}{8} \times 17^n$$

D'où, pour tout entier naturel n, on a

$$x_n = \frac{9 \times 17^n - 1}{8}$$

Réciproquement, cette suite s'agit bien d'une solution du problème. ➽ Le 1/8 est obtenu par la méthode qu'on va décrire par la suite. Pour trouver le terme général de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par $a_0 \in \mathbb{R}$ et $a_{n+1} = qa_n + r$ où $q \neq 0, 1$ et r deux constantes réelles. On cherche le $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant l'équation linéaire du premier degré $\alpha = q\alpha + r$ puis on considère la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ définie par $b_n = a_n - \alpha$; cette suite est géométrique, on explicite sont terme général en fonction de n puis on déduit celui de la suite (a_n).

4.4 Sommes et produits

Les sommes et les produits constituent un outil fondamental dans la résolution des problème de type olympiade. A travers ce cours, nous allons voir les différentes propriétés concernant ces deux thématiques.

Soit $(a_n)_{n\in}$ une suite de nombres réels. La somme $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ est notée

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

L'indice k de la sommation est muet, c'est-à-dire qu'il n'interagit sur la valeur de la somme. En effet, on peut le remplacer par $j, l, p, \ldots$

Simplifier la somme suivante

$$S = 1 + 2 + \ldots + 2^n = \sum_{i=0}^{n} 2^i$$

où $n \geq 0$ un entier naturel.

Solution. On remarque que

$$2S = 2\sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^{i+1} = \sum_{j=1}^{n+1} 2^i$$

On a effectué le changement d'indice $j = i + 1$. En ajoutant 1 et en le retranchant, on obtient

$$2S = 1 + \sum_{j=1}^{n+1} 2^i - 1 = \sum_{j=0}^{n+1} 2^i - 1 = \sum_{j=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} - 1 = S + 2^{n+1} - 1$$

Donc, $S = 2S - S = 2^{n+1} - 1$ pour tout entier naturel n. ➽ Il faut retenir la formule

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

vraie pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier naturel n.

Simplifier la somme suivante pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$G_n = 1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

Solution. On écrit pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} 2G_n = G_n + G_n &= (1 + 2 + \ldots + (n-1) + n) + (n + (n-1) + \ldots + 2 + 1) \\ &= \underbrace{(1+n) + (2+n-1) + \ldots + (2+n-1) + (1+n)}_{n \text{ fois}} = n(n+1) \end{aligned}$$

Finalement, on obtient pour tout entier $n \geq 1$,

$$G_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

➽ Rappeler vous de cette somme, elle est très fréquente.

Simplifier pour tout entier naturel $n \geq 1$, la somme suivante

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ fois}}$$

Solution. On remarque que pour tout entier naturel k,

$$\underbrace{11\ldots1}_{k \text{ fois}} = 10^{k-1} + 10^{k-2} + \ldots + 1 = 1 + 10 + \ldots + 10^{k-1} = \frac{10^k - 1}{10 - 1} = \frac{10^k - 1}{9}$$

Donc,

$$\begin{aligned} T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{10^k - 1}{9} &= \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}(10^k - 1) = \frac{1}{9}\left(\sum_{k=1}^{n} 10^k - \sum_{k=1}^{n} 1\right) \\ &= \frac{1}{9} \times \left(\frac{10^{n+1} - 1}{9} - n\right) \end{aligned}$$

Simplifier la somme suivante

$$A_n = \sum_{p=0}^{2n} (-1)^{p+1} p$$

pour tout entier naturel n.

SOLUTION. On somme par paquets sur les pairs et sur les impairs, plus précisément

$$A_n = \sum_{p=0,\, p\,\text{pair}}^{2n} (-1)^{p+1} p + \sum_{p=0,\, p\,\text{pair}}^{2n} (-1)^{p+1} p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k+1} 2k + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{2k+1+1} (2k+1)$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k+1} k - 2\sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k+1} k - \sum_{k=0}^{n} 1 = -\sum_{k=0}^{n} 1 = -n$$

Donc, pour tout entier naturel n, on a $A_n = -n$.

Simplifier la somme suivante

$$M_n = \sum_{p=0}^{2n} \max(p, n)$$

pour tout entier naturel n.

SOLUTION. On écrit pour tout entier naturel n,

$$M_n = \sum_{p=0}^{n} \max(p,n) + \sum_{p=n+1}^{2n} \max(p,n) = \sum_{p=0}^{n} n + \sum_{p=n+1}^{2n} p = n\sum_{p=0}^{n} 1 + \sum_{p=1}^{n} (p+n) = n(n+1) + n^2 + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2n(2n+1) + n(n+1)}{2} = \frac{n(4n+2+n+1)}{2} = \frac{n(5n+3)}{2}$$

Donc, pour tout entier naturel n, on a

$$M_n = \frac{n(5n+3)}{2}$$

4.4.1 Sommes télescopiques

Une somme télescopique est une somme finie de la forme

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} - a_k = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1})$$

Cette somme se réduit en $a_n - a_0$ où les a_k sont des nombres réels.

Déterminer la valeur numérique de la somme suivante

$$S = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$$

SOLUTION. Commençons par remarquer que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

On en déduit que la somme recherchée est une somme télescopique, d'ou

$$S = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$$

Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Solution. Il s'agit de montrer que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

On commence par remarquer que $k^2 \geq k^2 - k = k(k-1)$ c-à-d. $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(k-1)k}$, d'où

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 1 - \frac{1}{n}$$

(Olympiade syrienne 2010). Pour tout entier naturel $n \geq 1$, simplifier la somme suivante

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1}$$

Solution. Le dénominateur nous fait penser à l'identité de Sophie Germain.

$$4a^4 + b^4 = (2a^2 + 2ab + b^2)(2a^2 - 2ab + b^2)$$

Et en écrivant

$$4k = (2k^2 + 2k + 1) - (2k^2 - 2k + 1)$$

on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k^2 - 2k + 1} - \frac{1}{2k^2 + 2k + 1}$$

On remarque aussi que les deux expressions $2k^2 - 2k + 1$ et $2k^2 + 2k + 1$ sont deux termes successifs de la suite de terme général $u_n = 2n^2 - 2n + 1$. Or un télescopage donne

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1} = 1 - \frac{1}{2n^2 + 2n + 1} = \frac{2n(n+1)}{2n^2 + 2n + 1}$$

Pour tout entier naturel n non nul, simplifier la somme

$$F_n = 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + nn!$$

SOLUTION. On a pour tout entier naturel k,

$$kk! = (k+1-1)k! = (k+1)k! - k! = (k+1)! - k!$$

Alors, pour tout entier naturel n

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - k! = (n+1)! - 1$$

4.4.2 Produits

Soient m et n deux entiers naturels, on a :

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \times a_{m+1} \times \ldots \times a_n \text{ tel que : } m \leq n.$$

On a les propriétés suivantes de calcul des produits,

$$\prod_{k=m}^{n} a_k b_k = \prod_{k=m}^{n} a_k \times \prod_{k=m}^{n} b_k$$

En particulier on a

$$\prod_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n+1} \prod_{k=0}^{n} a_k$$

Simplifier le produit suivant,

$$P = \prod_{k=1}^{1000} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

SOLUTION. C'est un produit télescopique, on a

$$P = \prod_{k=1}^{999} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{999} \left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{999+1}{1} = 1000$$

Simplifier le produit suivant

$$P_n = \prod_{p=1}^{n} \left(\frac{p+2}{p}\right)$$

pour tout entier naturel $n \geq 1$.

SOLUTION. On écrit pour $n \geq 1$ entier naturel,

$$P_n = \prod_{p=1}^{n} \left(\frac{p+2}{p}\right) = \prod_{p=1}^{n} \left(\frac{p+2}{p+1}\right)\left(\frac{p+1}{p}\right) = \prod_{p=1}^{n} \left(\frac{p+2}{p+1}\right) \times \prod_{p=1}^{n} \left(\frac{p+1}{p}\right)$$

$$= \frac{n+2}{2} \times \frac{(n+1)}{1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$P_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Montrer l'inégalité suivante

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \geq \frac{1}{2}$$

Solution. On écrit pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) \times \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

D'où l'inégalité souhaitée.

Soit N un entier naturel non nul. Simplifier le produit suivant

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Solution. On écrit pour un entier naturel $N \geq 1$,

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \prod_{n=1}^{N}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \prod_{n=1}^{N}\frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \prod_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \prod_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} \times \prod_{n=1}^{N}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{(N+1)^{N+1}}{(N+1)!} = \frac{(N+1)^N}{N!}$$

4.5 Inégalités de base

Les inégalités constituent un thème fréquent aux olympiades de mathématiques. Dans cette section, on va voir les différentes inégalités de base.

4.5.1 Inégalité arithmético-géométrique d'ordre 2

Le carré d'un nombre réel est toujours positif. Cette propriété d'ordre sur les nombres réels va nous servir à résoudre des inégalités compliquées. Voyons par la suite des exemples.

Montrer que pour tout nombre réel a, on a

$$a + a^3 - a^4 - a^6 < 1$$

Solution. On écrit pour un nombre réel a,

$$a^6 + a^4 - a^3 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a^3 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0$$

D'où le résultat.

Pour tous nombres réels a et b, on a $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Solution. On regarde le signe de la différence. On écrit

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$$

Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, on a

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Solution. On écrit pour un réel $x > 0$,

$$x + \frac{1}{x} = \sqrt{x}^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 \geq 2 \times \sqrt{x} \times \sqrt{\frac{1}{x}} = 2$$

D'où l'inégalité souhaitée.

Soit a un nombre réel positif strictement tel que

$$a^5 - a^3 + a \geq 3$$

Montrer que

$$a \geq \sqrt[6]{5}$$

Solution. Il s'agit de montrer que $a^6 \geq 5$ (puisque a est positif). En multipliant par a^2 l'inégalité donnée, on trouve

$$a^7 - a^5 + a^5 + a^3 \geq 3a^2$$

En sommant avec l'inégalité donnée, on obtient

$$a^7 + a \geq 3(a^2 + 1)$$

Et en divisant par a, on obtient

$$a^6 + 1 \geq 3\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 6$$

Donc $a^6 \geq 6 - 1 = 5$, d'où la minoration cherchée.

Soient x et y deux nombres réels positifs. On a

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

Démonstration. On écrit pour des réels $x, y \geq 0$,

$$x + y = \sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 \geq 2\sqrt{x}\sqrt{y} = 2\sqrt{xy}$$

Montrer que pour tous réels a et b strictement positifs, on a

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Solution. Il suffit d'écrire

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}} = 2$$

Montrer que pour tous réels a, b et c strictement positifs,

$$(a+b+c)\times\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Solution. On développe le côté de gauche G pour obtenir

$$G = \left(\underbrace{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}_{\geq 2}\right)+\left(\underbrace{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}}_{\geq 2}\right)+\left(\underbrace{\frac{c}{a}+\frac{a}{c}}_{\geq 2}\right)+3 \geq 2+2+2+3 = 9$$

D'où l'inégalité souhaitée.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ des nombres réels avec $n \geq 1$ un entier naturel. Montrer que

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}+\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}}+\ldots+\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_2}{a_1} \geq 2n$$

Solution. On regroupe les termes du côté de gauche G, en écrivant

$$G = \left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\left(\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\right)+\ldots+\left(\frac{a_n}{a_1}+\frac{a_1}{a_n}\right) \geq \underbrace{2+2+\ldots+2}_{n\text{ fois}} = 2n$$

D'où l'inégalité.

(Olympiade russe 1995). Soient x et y deux nombres réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{xy}$$

Solution. On écrit en utilisant l'inégalité arithmético géométrique d'ordre 2,

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{x}{2x^2y}+\frac{y}{2xy^2} = \frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy} = \frac{1}{xy}$$

D'où l'inégalité désirée.

(Olympiade marocaine 2009). Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c$$

Solution. On remarque que

$$\left(b+\frac{a^2}{b}\right)+\left(c+\frac{b^2}{c}\right)+\left(a+\frac{c^2}{a}\right) \geq 2a+2b+2c$$

Donc,

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c$$

> Soient x et y deux nombres réels strictement positifs. Montrer que
>
> $$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{xy}{x^2+y^2}\geq\frac{5}{2}$$

SOLUTION. On pose $X=x/y+y/x$. Il s'agit de prouver que

$$X+\frac{1}{X}\geq\frac{5}{2}$$

c'est à dire

$$2X^2-5X+2\geq 0$$

Et ceci est vrai puisque

$$X=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$$

en étudiant le signe du trinôme $2X^2-5X+2$ sut $\mathbb{R}$.

> Soient $a_1,a_2,\ldots,a_n$ des nombres réels positifs tels que $a_1a_2\ldots a_n=1$. Montrer que
>
> $$\prod_{p=1}^{n}(1+a_p)=(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geq 2^n$$

SOLUTION. Puisque tout est positif, on écrit

$$\prod_{p=1}^{n}(1+a_p)\geq\prod_{p=1}^{n}2\sqrt{a_p}=2^n\sqrt{\prod_{p=1}^{n}a_p}=2^n$$

D'où le résultat.

> Montrer que pour tous nombres réels a,b et c on a
>
> $$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

DÉMONSTRATION. On écrit pour tous nombres réels a,b et c,

$$a^2+b^2+c^2=\frac{(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)}{2}\geq\frac{2ab+2bc+2ca}{2}=ab+bc+ca$$

D'où l'inégalité souhaitée.

> (OLYMPIADE MAROCAINE 2003). Soient x,y et z trois nombres réels strictement positifs. Montrer que
>
> $$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq x+y+z$$

Solution. On utilise la version radicale de l'inégalité établie précédemment. En effet, pour tous a, b c des réels positifs, on a

$$a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$

Donc

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y} \geq \sqrt{\frac{xy}{z} \times \frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{yz}{x} \times \frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{zx}{y} \times \frac{yx}{z}}=y+z+x=x+y+z$$

D'où l'inégalité cherchée.

(Olympiade marocaine 2015). Soient x, y et z trois nombres réels strictement positifs vérifiant $xyz=1$. Montrer que

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{x}\right)^2 \geq 3(x+y+z+1)$$

Solution. Soit G le côté de gauche de l'inégalité et D le côté de droite de l'inégalité. On a

$$G \geq \left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)+\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right)+\left(z+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{y}\right)$$

$$=xy+\frac{x}{z}+1+\frac{1}{yz}+yz+\frac{y}{x}+1+\frac{1}{zx}+zx+\frac{z}{y}+1+\frac{1}{xy}=3+(x+y+z)+\underbrace{\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+xy+yz+zx}_{Q}$$

On écrit

$$Q=\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+xy+yz+zx=x\left(z+\frac{1}{z}\right)+y\left(x+\frac{1}{x}\right)+z\left(y+\frac{1}{y}\right) \geq 2x+2y+2z$$

Finalement,

$$G \geq 3+3x+3y+3z=D$$

Soient a, b et c trois nombres réels. Montrer que

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$$

Solution. Il suffit de développer l'expression $(a+b+c)^2$, on a

$$3(ab+bc+ca) \leq a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \leq 3(a^2+b^2+c^2)$$

D'où le résultat.

4.5.2 Moyennes usuelles

Commençons par donner les inégalités entre les moyennes pour le second ordre.

Pour tous nombres réels positifs a et b, on a

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Démonstration. La preuve de ces inégalités est laissé comme petit exercice pour le lecteur.

(Olympiade marocaine 2015). Soient a et b deux nombres réels positifs, on pose $x=\sqrt{ab}$ et $y=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Comparer $a+b$ et $x+y$.

Solution. On observe la chose suivante,

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{a^2+b^2}{2}+ab}{2}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}} = \frac{a+b}{2}$$

Donc,

$$x+y \leq a+b$$

Soient a,b,c et d quatre nombres réels positifs. On a l'inégalité

$$a+b+c+d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$$

Démonstration. On écrit pour a,b,c et d quatre nombres réels positifs

$$a+b+c+d \geq 2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd} = 2(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}) \geq 4\sqrt{\sqrt{ab}\times\sqrt{cd}} = 4\sqrt[4]{abcd}$$

D'où le résultat.

Soient $a_1,a_2,\ldots,a_n$ des nombres réels positifs vérifiant $a_1a_2\ldots a_n=1$ où $n\geq 1$ un entier naturel. Montrer que

$$\prod_{p=1}^{n}(3+a_p) \geq 4^n$$

Solution. On écrit

$$\prod_{p=1}^{n}(3+a_p) = \prod_{p=1}^{n}(1+1+1+a_p) \geq \prod_{p=1}^{n} 4\sqrt[4]{a_p} = 4^n\sqrt[4]{\prod_{p=1}^{n} a_p} = 4^n$$

Soit $x>0$ un nombre réel. Montrer que

$$x^7+\frac{3}{x} \geq 4x$$

Solution. Pour $x > 0$ un nombre réel, on observe que

$$x^7 + \frac{3}{x} = x^7 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 4\sqrt[4]{x^7 \times \frac{1}{x^3}} = 4x$$

(Inégalité arithmético-géométrique d'ordre 3). Pour tous nombres réels positifs a, b et c, on a

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

Démonstration. *Première méthode.* En posant $a = x^3$, $b = y^3$ et $c = z^3$, il s'agit de montrer que

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

Et ceci est facile à voir en utilisant l'identité

$$u^3 + v^2 + w^3 - 3uvw = (u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu)$$

vraie pour tous nombres réels u, v et w. *Seconde méthode.* On sait que pour tous a, b, c et d on a

$$\left(\frac{a + b + c + d}{4}\right)^4 \geq abcd$$

En prenant dans cette inégalité $d = (a + b + c)/3$, on obtient

$$d^4 \geq abcd$$

puisque $a + b + c = 3d$, donc

$$\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3 = d^3 \geq abc$$

D'où

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$$

Solution. C'est une application directe de l'inégalité arithmético-géométrique d'ordre 3, on a

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{a}} = 3$$

(Inégalité de Nesbitt). Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs. Montrer l'inégalité

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}$$

Solution. On définit S, P et Q par

$$S=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b},\quad P=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b},\quad Q=\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}$$

D'une part, on a

$$S+P=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\geq 3$$

Et d'autre part, on obtient de même que $S+Q\geq 3$, donc

$$S+P+S+Q=2S+\underbrace{P+Q}_{=3}\geq 3+3=6$$

Donc, $S\geq 3/2$ et le résultat découle.

> Soient a,b et c trois nombres réels strictement positifs. Prouver que
>
> $$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 3$$

Solution. On écrit

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}\times\frac{b^2}{ca}\times\frac{c^2}{ab}}=3$$

Terminons cette section par donner (sans démonstration) un théorème concernant les inégalités entre les moyennes usuelles.

> Soient $a_1,a_2,\ldots,a_n$ des nombres réels strictement positifs. On a les inégalités
>
> $$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\leq\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\leq\sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

➻ Toutes les inégalités à part l'inégalité arithmético-géométrique sont faciles à prouver. Pour cette dernière, on invite les lecteurs curieux à chercher une démonstration élémentaire utilisant une récurrence de Cauchy.

> Soient $a_1,a_2,\ldots,a_n$ des nombres réels positifs. On a
>
> $$\sum_{p=1}^{n}a_p\geq n\sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n}a_p}$$

> Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a
>
> $$1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)\leq n^n$$

SOLUTION. On utilise l'inégalité arithmético-géométrique, en écrivant

$$\sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n}(2p-1)} \leq \frac{\sum_{p=1}^{n}(2p-1)}{n} = \frac{n^2}{n} = n$$

Donc

$$1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1) \leq n^n$$

4.5.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

(INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ). Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, n$ des nombres réels, alors

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2$$

c'est à dire

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2$$

DÉMONSTRATION. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, n$ des nombres réels positifs, on considère le trinôme

$$P = \sum_{i=1}^{n}(a_i + Xb_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2a_ib_iX + b_i^2X^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2X\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2X^2$$

La fonction trinômiale $P(x)$ possède toujours un signe positif, donc son discriminant est négatif de sorte que

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0$$

Et l'inégalité désirée découle.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ des nombres réels strictement positifs. Montrer que

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_{100})\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{100}}\right) \geq 10000$$

SOLUTION. On écrit pour les $x_i > 0$,

$$(x_1+x_2+\ldots+x_{100})\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right) \geq (\sqrt{x_1}^2+\sqrt{x_2}^2+\ldots+\sqrt{x_{100}}^2)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}^2}+\frac{1}{\sqrt{x_2}^2}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x_{100}}^2}\right)$$

$$\geq (\underbrace{1+1+\ldots+1}_{100\,\text{fois}})^2 = 100^2 = 10000$$

D'où le résultat.

Il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, une inégalité équivalente qu'on va énoncer par la suite.

(Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels positifs, alors

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i y_i}$$

(Olympiade américaine 1978). Soient a, b, c, d et e des nombres réels positifs vérifiant $a+b+c+d+e=8$ et $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$. Quelle est la valeur maximale de e ?

Solution. On écrit

$$a+b+c+d=8-e \qquad \text{et} \qquad a^2+b^2+c^2+d^2=16-e^2$$

D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$(8-e)^2=(a+b+c+d+e)^2 \leq (a^2+b^2+c^2+d^2)(1+1+1+1)=4(a^2+b^2+c^2+d^2)=4(16-e^2)$$

On tire que $e \leq \dfrac{16}{5}$. La valeur $16/5$ est atteinte pour $a=b=c=d=24/5$. Donc, la valeur maximale que peut prendre e est $16/5$.

Soient x, y et z trois nombres réels non nuls. Montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$\frac{x^{2^n}}{y^{2^n}}+\frac{y^{2^n}}{z^{2^n}}+\frac{z^{2^n}}{x^{2^n}} \geq \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$$

Solution. Si cette inégalité est prouvée pour $x, y, z>0$, alors c'est fini. D'autre part, si on arrive à montrer que pour tout entier $k \geq 1$,

$$\frac{x^{2^k}}{y^{2^k}}+\frac{y^{2^k}}{z^{2^k}}+\frac{z^{2^k}}{x^{2^k}} \geq \frac{x^{2^{k-1}}}{y^{2^{k-1}}}+\frac{y^{2^{k-1}}}{z^{2^{k-1}}}+\frac{z^{2^{k-1}}}{x^{2^{k-1}}}$$

On va obtenir

$$\frac{x^{2^n}}{y^{2^n}}+\frac{y^{2^n}}{z^{2^n}}+\frac{z^{2^n}}{x^{2^n}} \geq \frac{x^{2^{n-1}}}{y^{2^{n-1}}}+\frac{y^{2^{n-1}}}{z^{2^{n-1}}}+\frac{z^{2^{n-1}}}{x^{2^{n-1}}} \geq \ldots \geq \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$$

On pose $u=x^{2^{k-1}}, v=y^{2^{k-1}}$ et $w=z^{2^{k-1}}$. Il s'agit de montrer que

$$\frac{u^2}{v^2}+\frac{v^2}{w^2}+\frac{w^2}{u^2} \geq \frac{u}{v}+\frac{v}{w}+\frac{w}{u}$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a

$$\left(\frac{u}{v}+\frac{v}{w}+\frac{w}{u}\right)^2 \leq (1+1+1)\left(\frac{u^2}{v^2}+\frac{v^2}{w^2}+\frac{w^2}{u^2}\right)$$

Donc

$$\frac{u^2}{v^2}+\frac{v^2}{w^2}+\frac{w^2}{u^2} \geq \frac{\left(\frac{u}{v}+\frac{v}{w}+\frac{w}{u}\right)^2}{3}=\left(\frac{u}{v}+\frac{v}{w}+\frac{w}{u}\right) \times \frac{\left(\frac{u}{v}+\frac{v}{w}+\frac{w}{u}\right)}{3} \geq \left(\frac{u}{v}+\frac{v}{w}+\frac{w}{u}\right)$$

(Inégalité de Nesbitt). Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs. Montrer l'inégalité

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Solution. Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs. On ajoute 3 aux deux côtés de l'inégalité pour obtenir l'inégalité équivalente suivante,

$$1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{2}$$

ce qui équivalent à montrer que

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2}$$

Ce qui équivaut à

$$[(a+b)+(b+c)+(c+a)] \times\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq 9$$

Cette inégalité est bien évidemment vraie. Donc, pour tous a, b et c trois nombres réels strictement positifs, on a

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

4.5.4 Lemme de Titu

L'inégalité qu'on va donner par la suite ne constitue qu'une variante de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'avantage de celle-ci qu'elle est plus facile a être utiliser !

Pour tous nombres réels a et b et pour tous réels strictement positifs x et y, l'inégalité

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

Démonstration. L'inégalité proposée est équivalente à

$$(x+y) \times\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\right)=a^2+b^2+\frac{x}{y} b^2+\frac{y}{x} a^2 \geq a^2+b^2+2 a b$$

c'est à dire

$$\frac{y}{x} a^2+\frac{x}{y} b^2 \geq 2 a b$$

Cette inégalité est facile à prouver, en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique.

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a} \geq a+b$$

Solution. On écrit pour a et b deux nombres réels strictement positifs,

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geq\frac{(a+b)^2}{b+a}=a+b$$

D'où l'inégalité désirée.

> Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a+b=1$. Montrer que
>
> $$\frac{a^2}{b+1}+\frac{b^2}{a+1}\geq\frac{1}{3}$$

Solution. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a+b=1$. On sait que

$$\frac{a^2}{b+1}+\frac{b^2}{a+1}\geq\frac{(a+b)^2}{a+b+2}=\frac{1}{3}$$

> Pour tous nombres réels a, b et c et tous nombres réels strictement positifs x, y et z, on a
>
> $$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Démonstration. On a pour tous nombres réels a, b et c et tous nombres réels strictement positifs x, y et z,

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{a^2}{x}+\frac{(b+c)^2}{y+z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

> (Olympiade marocaine 2015). Soient x, y et z trois nombres réels strictement positifs vérifiant $xyz=1$. Montrer que
>
> $$\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{x}\right)^2\geq 3(x+y+z+1)$$

Solution. On écrit

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{x}\right)^2=\frac{\left(x+\frac{1}{y}\right)^2}{1}+\frac{\left(y+\frac{1}{z}\right)^2}{1}+\frac{\left(z+\frac{1}{x}\right)^2}{1}\geq\frac{\left[x+\frac{1}{y}+y+\frac{1}{z}+z+\frac{1}{x}\right]^2}{3}$$

Or, on a

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}=3$$

Donc,

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{x}\right)^2\geq\frac{(x+y+z+3)^2}{3}$$

Il reste à montrer que $(X+3)^2\geq 9(X+1)$ où $X=x+y+z$, à noter que $X=x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$. Ce qui est équivaut à montrer que $X^2-3X=X(X-3)\geq 0$ et ceci est évident.

Pour tous nombres réels a, x, b, y, c et z strictement positifs, on a

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ax+by+cz}$$

DÉMONSTRATION. On écrit pour des nombres réels a, x, b, y, c et z strictement positifs,

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{a^2}{ax}+\frac{b^2}{by}+\frac{c^2}{cz} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ax+by+cz}$$

(INÉGALITÉ DE NESBITT). Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs. Montrer l'inégalité

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

SOLUTION. On utilise l'inégalité établie précédemment, en écrivant

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}=\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2}$$

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels strictement positifs. On a l'inégalité

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n}$$

DÉMONSTRATION. On montre l'inégalité en utilisant une récurrence simple, pour $n=1$, rien à démontrer. Supposons que l'inégalité est vraie pour le rang n, on a alors pour $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ des nombres réels et $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ des nombres réels strictement positifs,

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{x_n}+\frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}} \geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n}+\frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}} \geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1})^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}}$$

et la récurrence est établie.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ des nombres réels de somme 1. Montrer que

$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2+\ldots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n}$$

SOLUTION. On applique le lemme de Titu deux fois de la façon suivante,

$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2+\ldots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \frac{\left[a_1+\frac{1}{a_1}+a_2+\frac{1}{a_2}+\ldots+a_n+\frac{1}{a_n}\right]^2}{n}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)^2}{n}$$

Mais, on observe que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = n^2$$

D'où l'inégalité désirée.

4.5.5 Valeurs maximales et valeurs minimales

Trouver la valeur minimale de la fonction f sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = |x| + |x+1| + |x+2|$$

Solution. On observe que

$$|x| + |x+2| = |-x| + |x+2| \geq |-x+x+2| = 2$$

Donc pour tout réel x,

$$f(x) = |x| + |x+1| + |x+2| \geq 2 + |x+1| \geq 2$$

La valeur 2 est atteinte pour $x = -1$, donc le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 2.

Soient $a > b > 0$ deux nombres réels. Trouver la valeur minimale de l'expression

$$a + \frac{1}{b(a-b)}$$

Solution. *Première méthode.* On sait que

$$b(a-b) \leq \left(\frac{b+a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

Donc,

$$a + \frac{1}{b(a-b)} \geq a + \frac{4}{a^2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{4}{a^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{4}{a^2}} = 3$$

Donc, la valeur minimale cherchée est 3 puisque celle ci est atteinte pour $a = 2$ et $b = 1$. *Seconde méthode.* On peut directement écrire

$$a + \frac{1}{b(a-b)} = (a-b) + b + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3\sqrt[3]{b \times (a-b) \times \frac{1}{b(a-b)}} = 3$$

Trouver la valeur maximale de la fonction $t(\theta) = 3\cos\theta + 4\sin\theta$ pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, SOLUTION. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$t(\theta)^2 = (3\cos\theta + 4\sin\theta)^2 \leq (3^2+4^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 25$$

Puisque la fonction t prend des valeurs positives $\left(\text{car } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, alors $t(\theta) \leq 5$ pour tout nombre réel $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la valeur 5 est atteinte pour un $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant $\cos\theta = 3/5$ et $\sin\theta = 4/5$. Donc, le minimum de la fonction t sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est 5.

4.6 Polynômes

4.6.1 Généralités

Dans cette section, on va pas distinguer une fonction polynômiale et un polynôme. Tous les polynômes considérés sont à coefficients réels, sauf mention contraire. On définit une fonction polynômiale p qu'elle est une fonction de la forme

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

pour tout nombre réel x avec n un entier naturel et $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ des nombres réels. Le réel $a_n \neq 0$ est appelé le coefficient dominant du polynôme p et $n \in \mathbb{N}$ est appelé le degré de p. Si p est le polynôme nul, son degré est par convention $-\infty$.

Un réel α est dit racine d'un polynôme P si $P(\alpha) = 0$.

Soit α un nombre réel et P un polynôme. Le réel α est racine du polynôme P si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x)$$

pour tout nombre réel x. De plus le degré du polynôme Q est celui de P moins 1.

DÉMONSTRATION. Pour la condition nécessaire, on écrit

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

pour tout nombre réel x avec n un entier naturel et $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ des nombres réels. Puisque $P(\alpha) = 0$, alors

$$P(x) = P(x) - P(\alpha) = \sum_{p=0}^{n}(a_p x^p - a_p\alpha^p) = \sum_{p=0}^{n} a_p(x^p - \alpha^p) = \sum_{p=1}^{n} a_p(x-\alpha)\underbrace{(x^{p-1} + \alpha x^{p-2} + \ldots + \alpha^p)}_{=Q_p(x)}$$

$$= (x-\alpha)\underbrace{(a_1Q_1(x) + a_2Q_2(x) + \ldots + a_pQ_p(x))}_{=Q(x)} = (x-\alpha)Q(x)$$

Donc, si α est une racine du polynôme P, alors il existe un polynôme Q, tel que pour tout réel x, on a $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$. La réciproque est immédiate. Il est facile de voir que le degré du polynôme P, est celui de Q en ajoutant le degré du polynôme $x - \alpha$ qui vaut 1. Il résulte de la proposition précèdente, la proposition suivante.

Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admettant n racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (comptées avec leurs multiplicités). Alors

$$P(x) = K(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)$$

pour tout nombre réel x où K le coefficient dominant du polynôme P.

Factoriser l'expression suivante

$$(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$$

où a, b et c trois nombres réels.

Solution. On regarde l'expression en question comme un polynôme en a, on le note P. Il est facile de voir que P est polynôme du second degré, de plus on remarque que

$$P(-b) = (-b + b + c)^3 + b^3 - b^3 - c^3 = 0$$

De même, on obtient $P(-c) = 0$, donc $-b$ et $-c$ deux racines du polynôme P, de sorte que

$$P(a) = K(a + b)(a + c)$$

pour tout nombre réel a avec K une constante réelle qui le coefficient dominant de P. D'une part, on a $P(0) = (b + c)^3 - b^3 - c^3 = 3bc(b + c)$ et d'autre part, on a $P(0) = Kbc$, donc en comparant, on trouve $K = 3(b + c)$, puisque $3bc(b + c) = Kbc$ pour tous réels b et c. Finalement, on trouver

$$P(a) = 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

D'où le résultat.

Il n'existe pas de polynôme non nul à coefficients réels de degré n et admettant $n + 1$ racines (comptées avec leurs multiplicités).

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'un tel polynôme existe. On note ses racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ et K son coefficient dominant. Alors, d'après la proposition précédente,

$$P(x) = K(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_{n+1})$$

pour tout nombre réel x. Puisque P est polynôme non nul, alors K est non nul également. Dans ce cas, le côté de droite est de degré $n + 1$, donc P est de degré $n + 1$. Ceci bien sur contredit clairement l'hypothèse portée sur le polynôme P.

Soit P un polynôme tel que

$$P(x) = P(x + 1)$$

pour tout réel x. Montrer que P est un polynôme constant.

Solution. On voit que pour tout entier naturel n,

$$P(0) = P(1) = P(2) = \ldots = P(n)$$

Donc, le polynôme $Q(x) = P(x) - P(0)$ admet tous les entiers naturels comme racines. Les entiers naturels étant en nombre infini, le polynôme Q est donc nul, de sorte que pour tout nombre réel x, on a $P(x) = P(0)$ et en posant $P(0) = c$, on obtient pour tout réel x, $P(x) = c$ et la constante c ne dépend pas de x. D'où le résultat.

Soit P un polynôme et (u_n) une suite de nombres réels qui est strictement croissante et

$$P(u_{n+1}) = P(u_n)$$

pour tout entier naturel n, alors P est un polynôme constant.

Démonstration. On utilise le même argument que dans l'exemple précédent. On sait que

$$P(u_0) = P(u_1) = \ldots = P(u_n)$$

pour tout entier naturel n et que $u_0 < u_1 < \ldots < u_n$, donc tous les u_k (pour $k \in \mathbb{N}$) sont des racines du polynôme $P(x) - P(0)$, et les u_k sont différents deux à deux. Donc le polynôme $P(x) - P(0)$ admet une infinité de racines, ce polynôme est alors nul. Par conséquent, $P(x) = P(0)$ pour tout nombre réel x, c'est à dire P est un polynôme constant.

(Olympiade marocaine 2013). Déterminer tous les polynômes P tels que

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1$$

pour tout nombre réel x.

Solution. *Première méthode.* On remarque que pour tout entier naturel k, on a

$$P(k+1) - P(k) = 2k + 1$$

En téloscopant, on obtient pout tout entier naturel n non nul,

$$P(n) - P(0) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

Donc, le polynôme $P(x) - x^2 - c$ (où $c = P(0)$) admet tous les entiers naturels non nuls comme racines. Les entiers naturels non nuls étant en nombre infini, le polynôme $P(x) - x^2 - c$ est nul. Donc, $P(x) = x^2 + c$ pour tout réel x avec c une constante réelles. Réciproquement, on vérifie que tous ces polynômes sont solutions du problème. *Seconde méthode.* On considère le polynôme Q définie par

$$Q(x) = P(x) - x^2$$

pour tout réel x, on remarque que

$$Q(x+1) = P(x+1) - (X+1)^2 = P(x) + 2x + 1 - (x+1)^2 = P(x) - x^2 = Q(x)$$

pour tout réel x, donc le polynôme Q est constant. D'où $P(x) = x^2 + c$ pour tout réel x où c est une constante réelle.

4.6.2 Coefficients et racines

Soient $P = X^3 - aX^2 + bX - c$ un polynôme et α, β et γ les racines de ce polynôme. Alors, on a

$$a = \alpha + \beta + \gamma, \qquad b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \qquad c = \alpha\beta\gamma$$

Démonstration. Le polynôme unitaire P admet α, β et γ comme racines et de plus, donc en développant

$$P = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma) = X^3 - (\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)X - \alpha\beta\gamma$$

En comparant avec l'expression $P = X^3 - aX^2 + bX - c$, on retrouve

$$a = \alpha + \beta + \gamma, \qquad b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \qquad c = \alpha\beta\gamma$$

Soient α, β et γ les racines du polynômes $X^3 - 2X - 1$. Déterminer la valeur de

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

Démonstration. Puisque α est une racine du polynôme $X^3 - 2X - 1$, alors $\alpha^3 = 2\alpha + 1$. La même chose pour β et γ. Donc

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 2\underbrace{(\alpha + \beta + \gamma)}_{=0} + 3 = 3$$

Soient α, β et γ les racines du polynômes $X^3 - X - 1$. Déterminer la valeur de

$$H = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$$

Démonstration. On sait que

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1, \qquad \alpha\beta\gamma = 1$$

Donc en développant $(1-\beta)(1-\gamma) + (1-\gamma)(1-\alpha) + (1-\alpha)(1-\beta)$, on obtient

$$H = \frac{7}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

D'autre part, on remarque que

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = P(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1$$

Donc H vaut -7.

Déterminer la somme des coefficients du polynôme P défini par

$$P = (1 - 3x + 3x^2)^{10}(1 + 3x - 3x^2)^{11}$$

Démonstration. Il est clair que le degré du polynôme de P vaut $2\times 10+2\times 11=42$. On suppose que

$$P = a_{42}X^{42} + a_{41}X^{41} + \ldots + a_1X + a_0$$

Il s'agit de déterminer $a_0 + a_1 + \ldots + a_{42}$. Cette expression vaut $P(1)$. D'autre part en substituant x par 1 dans l'expression de P de base, on obtient $P(1) = 1$. Donc la somme des coefficients du polynôme P vaut 1.

4.7 Parties entières

En mathématiques, la partie entière (si non précisé, par défaut) d'un nombre réel x est l'unique entier relatif n (positif, négatif ou nul) tel que

$$n \leq x < n+1$$

On démontre son existence et son unicité par analyse-synthèse, n est le plus grand entier inférieur ou égal à x (ce que l'on peut prendre comme définition équivalente de la partie entière de x, voir ci-dessous), son existence étant garantie par la propriété d'Archimède.

La différence entre un nombre x et sa partie entière par défaut est appelée partie fractionnaire. La partie entière d'un nombre réel x est souvent notée $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.

Soient x et y deux nombres réels. Montrer que

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \epsilon \qquad \text{avec} \quad \epsilon \in \{0,1\}$$

Solution. Soient x et y deux nombres réels. On sait que $x+y-1 < \lfloor x+y \rfloor \leq x+y$ et que $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ et $y-1\lfloor y \rfloor \leq y$, donc

$$-1 < \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor < 2$$

Donc,

$$0 \leq \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \leq 1$$

Finalement $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor = 0$ ou 1. D'où le résultat.

Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x, on a

$$E(nx) \geq nE(x)$$

Solution. On procède par récurrence en utilisant l'inégalité

$$E(x+y) \geq E(x) + E(y)$$

vraie pour tous nombres réels x et y (d'après le résultat de l'exemple précédent). Montrons l'inégalité souhaitée par récurrence sur n. Pour $n=0$, c'est évident. Supposons que le résultat est vraie pour un rang n. Pour le rang $n+1$, on a

$$E((n+1)x) = E(nx+x) \geq E(nx) + E(x) \geq nE(x) + E(x) = (n+1)E(x)$$

Et la récurrence est établie.

Montrer que la fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$.

Solution. On se donne deux réels x et y tels que $x < y$. Supposons que $y - x \geq 1$, c'est à dire $y - 1 \geq x$, on sait que $E(y) > y - 1$ et que $x \geq E(x)$. Donc, $E(x) > E(y)$. Plaçons nous dans le second cas où $y < x + 1$. Dans ce cas, on aura $x < y < x + 1$ (donc $0 < y - x < 1$) puis $E(y) = E(y - x + x) \geq \underbrace{E(y - x)}_{=0} + E(x) = E(x)$. En conclusion, la fonction partie entière E est croissante. ➽ Attention ! La fonction partie entière n'est pas strictement croissante, cependant elle est constante sur chaque intervalle de la forme $[k, k+1[$ où k un entier relatif.

Soit x un nombre réel, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Solution. Par une simple récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on montre les inégalités

$$n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx$$

Alors

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$$

Donc

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Déterminer en fonction de $n \geq 2$, la valeur du nombre suivant

$$A = \sum_{k=2}^{n} \left\lfloor \frac{k + \sqrt{k}}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{n + \sqrt{n}}{n} \right\rfloor$$

Solution. Soit $k \in \{2, ..., n\}$, on a

$$\left\lfloor \frac{k + \sqrt{k}}{k} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \frac{\sqrt{k}}{k} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{\sqrt{k}}{k} \right\rfloor$$

Puisque $k \geq 2$, alors $0 < \frac{\sqrt{k}}{k} < 1$ et donc $\left\lfloor \frac{\sqrt{k}}{k} \right\rfloor = 0$, par suite $A = \underbrace{1 + ... + 1}_{n-1 \text{ fois}} = n - 1$.

Montrer que pour tout nombre réel x, on a

$$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Solution. On pose $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, l'identité de l'énoncé est équivalente à $\lfloor 2r \rfloor = \left\lfloor r + \frac{1}{2} \right\rfloor$ où $r = \{x\}$. Deux cas se présentent, si $0 \leq r < 1/2$, alors $0 \leq 2r < 1$ et $0 < r + 1/2 < 1$, donc l'identité est vraie dans ce cas. Si $1/2 \leq r < 1$, alors $1 \leq 2r < 2$ et $1 \leq r + 1/2 < 2$, donc l'identité est vraie également dans ce cas.

(Identité de Hermite). Soient x un nombre réel et n un entier naturel non nul. Montrer que

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

Solution. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor$$

Il s'agit de montrer que la fonction f est identiquement nulle. On commence par remarquer que pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{1}{n}\right) &= \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + 1 \right\rfloor - \lfloor nx + 1 \rfloor \\ &= \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor = f(x) \end{aligned}$$

Alors, la fonction f est $1/n$-périodique. Il suffit donc, de montrer que f est nulle sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{n}\right[$, ceci est facile à démontrer. En conclusion, on a

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

pour tout réel x est pour tout entier naturel $n \geq 1$.

4.8 Applications

4.8.1 Généralités

Dans tout ce qui suit, E et F désignent deux ensembles non vides.

Définition. Une application f de E vers F est une relation binaire reliant chaque élément x de E à un unique élément y de F et on écrit $y = f(x)$.

4.8.2 Applications injectives

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que l'application f est injective si chaque élément de F admet au plus un antécédent de E par l'application f. Autrement dit, pour tout x

et y éléments de E, l'égalité $f(x) = f(y)$ entraîne $x = y$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{N}$ par

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}$$

pour tout entier naturel n. Montrer que la fonction f est injective.

SOLUTION. Pour tout entier naturel n, on a

$$f(n+1) - f(n) = \sum_{k=0}^{n+1} \sqrt{k} - \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} = \sqrt{n+1} > 0$$

Donc

$$f(0) < f(1) < f(2) < \dots$$

D'où la fonction f prend des valeurs deux à deux différentes sur $\mathbb{N}$ tout entier. Il vient que la fonction f est injective.

On considère l'application f définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f(x, y) = 4x + 7y \in \mathbb{Z}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Montrer que la fonction f n'est pas injective.

SOLUTION. On remarque que $(0, 0) \neq (-7, 4)$ mais

$$f(0, 0) = f(-7, 4) = 0$$

Donc, f n'est pas injective.

On considère l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$$

pour tout couple d'entiers naturels (x, y). Montrer que l'application f est injective.

SOLUTION. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux couples d'entiers naturels tels que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Il s'agit de montrer que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. On pose $z_1 = x_1 + y_1$ et $z_2 = x_2 + y_2$, il suffit de montrer que $z_1 = z_2$ et $y_1 = y_2$. On sait que

$$z_1^2 + z_1 + 2y_1 = z_2^2 + z_2 + 2y_2$$

Alors

$$(z_1 - z_2)(z_1 + z_2 + 1) = 2(y_2 - y_1) \qquad (*)$$

Si jamais on avait $|z_2 - z_1| \geq 2$, alors

$$z_1 + z_2 + 1 = \frac{2}{|z_1 - z_2|} \times |y_2 - y_1| \leq |y_2 - y_1|$$

Et ceci bien évidemment n'est pas possible puisque $|y_2 - y_1| \leq z_1 = z_2 < z_1 + z_2 + 1$. Donc $|z_1 - z_2| \in \{0, 1\}$. Si par exemple $z_1 - z_2 = 1$, c'est à dire $z_1 = z_2 + 1$, alors $(2z_2 + 2) = 2(y_2 - y_1)$, c'est à dire $z_2 + 1 = y_2 - y_1 \leq y_2$, ceci bien évidemment n'est pas possible. De même, on exclu le cas $z_2 - z_1 = 1$, finalement $z_1 = z_2$ et alors en substituant dans $(*)$, on trouve $y_1 = y_2$. D'où l'injectivité de l'application f.

4.8.3 Applications surjectives

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que l'application f est surjective si tout élément de F est l'image d'un élément de E. Autrement dit, si pour tout $y \in F$, il existe au moins un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

On considère l'application f définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f(x, y) = 4x + 7y \in \mathbb{Z}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Montrer que la fonction f est surjective.

Solution. Soit y un entier relatif. Les deux entiers 4 et 7 étant premiers entre eux; le théorème de Bezout garantit l'existence de deux entiers u et v tels que $4u + 7v = 1$, en multipliant par y, on trouve l'existence d'un couple $(a, b) = (yu, yv)$ tel que

$$f(a, b) = 4a + 7b = y$$

En conclusion, tout élément y de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{Z}$ admet un antécédent (a, b) par l'application f. Ceci permet de conclure.

4.8.4 Bijections

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une application bijective si tout élément de F admet exactement un antécédent par l'application f.

➼ Une application est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

On considère l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ par

$$f(p, q) = 2^p(2q + 1)$$

pour tout couple d'entiers naturels (p, q). Montrer que l'application f est bijective.

Solution. On va montrer que f est injective et surjective. Soient (p_1, q_1) et (p_2, q_2) deux couples d'entiers naturels vérfiant $f(p_1, q_1) = f(p_2, q_2)$. Montrons que $p_1 = p_2$ et que $p_2 = q_2$. Supposons que $p_1 > q_1$. L'égalité $f(p_1, q_1) = f(p_2, q_2)$ entraîne

$$2^{p_1 - p_2}(2q_1 + 1) = (2q_2 + 1)$$

Et puisque $p_1 - p_2 > 0$, alors $2q_2 + 1$ est impair, ce qui est clairement impossible. De même, on écarte le cas $p_1 < p_2$. Finalement $p_1 = p_2$ et puisque $2^{p_1}(2q_1 + 1) = 2^{p_2}(2q_2 + 1)$, alors $q_1 = q_2$. Il résulte que la fonction f est injective. Pour la surjectivité, on se donne $n \in \mathbb{N}^*$, soit p le plus grand entier naturel tel que 2^p divise n. On sait que $n = 2^p K$ où K un entier naturel. L'entier K ne peut pas être pair, sinon on aura 2^{p+1} divise n et ceci contredit le caractère maximal de p. Donc, l'entier K est impair de sorte qu'il existe un entier naturel q tel que $K = 2q+1$. Finalement, il existe un couple d'entiers naturels (p,q) tel que $n = 2^p(2q+1) = f(p,q)$. Donc, l'application f est surjective. D'où le résultat.

> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,
> $$f(f(x)) = 4x - 9$$
> Montrer que f est injective et qu'elle est surjective.

Solution. Montrons que f est injective. On se donne x et y deux nombres réels tels que $f(x) = f(y)$, alors en composant par f, on obtient $f(f(x)) = f(f(y))$. Donc $4x-9 = 4y-9$, il vient que $x = y$. Donc, l'application f est injective. Pour la surjectivité, on remarque que pour tout réel x, on a

$$f\left(f\left(\frac{9+x}{4}\right)\right) = x$$

Donc, pour tout réel x, il existe $a = f\left(\frac{9+x}{4}\right)$ tel que $f(a) = x$. Donc, l'application f est surjective.

4.9 Généralités sur les équations fonctionnelles

Une *fonction* décrit une relation entre un ensemble de départ qu'on notera $\mathbb{A}$ et un ensemble d'arrivée noté $\mathbb{B}$. Elle associe à chaque élément a dans $\mathbb{A}$ un unique élément b dans $\mathbb{B}$ appelé image de a par f. On note alors $b = f(a)$ et on dit que b est l'image de a par la fonction f. On utilise la notation suivante pour définir une fonction:

$$f\left\{\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}a \longmapsto f(a)\right.$$

On peut avoir une forme explicite de la fonction f qui permet de calculer l'image de chaque élément, par exemple $f(x) = 3x^2+1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais dans certains cas ceci est impossible comme le montre l'exemple suivant :

$$p\left\{\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}n \longmapsto p_n\right.$$

avec p_n est le n-ième nombre premier.

Il faut noter aussi que les ensemble $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ utilisés ci haut peuvent avoir une dimension supérieure à 2. Une telle fonction est appelée une fonction multi-variable. Un élément a dans $\mathbb{A}$ s'appelle un n-uplet avec n la dimension de $\mathbb{A}$. L'exemple suivant illustre un cas ou $\mathbb{A}$ est de dimension 2, les éléments qui appartiennent à cet ensemble s'appellent des 2-uplets (ou doublets).

$$f\left\{\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}(x,y) \longmapsto xy+1\right.$$

Pour les fonctions d'une variable réelle, il existe une manière géométrique de les décrire que l'on appelle le graphe de la fonction. Il s'agit de représenter dans un système d'axes tous les points $(x, f(x))$ pour tout x dans l'ensemble de départ. Les propriétés que nous énoncerons plus tard pourront être interprétées et exploitées de manière géométrique (i.e. visuelle).

Passons maintenant au vif sujet, c'est quoi une équation fonctionnelle ? c'est tout simplement une équation dont l'inconnue est une fonction, on s'intéresse alors à déterminer l'ensemble des fonctions qui vérifient une égalité (parfois inégalité) algébrique ou une relation particulière. Par exemple, cherchons à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient la relation suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y)^2 = f(x) + f(y) + 2xy$$

On peut remarquer que la fonction $f(x) = x$ est une solution du problème, mais est ce l'unique solution? Dans la suite, on discutera quelques techniques élémentaires de résolution des problèmes des équations fonctionnelles comme les substitutions, la symétrie, l'injection, surjection ...

4.9.1 Méthodes élémentaires de résolution

Lorsqu'on cherche à résoudre une équation fonctionnelle, il faut commencer par des substitutions de bases et si c'est possible, on essaie de déterminer des valeurs clefs de quelques images, souvent $f(0), f(1), \ldots$. Parfois, une suite de substitutions peut amener à la résolution du problème.

> Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
>
> $$f(x - 2f(y)) = x + y - 3f(y)$$

Solution. Généralement, lorsqu'on affronte une équation fonctionnelle, il faut commencer par des substitutions simples, bien choisies ! On peut par exemple essayer de trouver quelques valeurs comme $f(0), f(1), f(-1), \ldots$, ou essayer de trouver des conditions sur cette fonction. L'exercice ci-dessus aborde une équation fonctionnelle simple dont l'idée très basique, il suffit de se débarrasser de y dans l'expression $f(x - 2f(y))$. Le raisonnement qu'on propose est le suivant; posons $y = 0$, cela donne $f(x - 2f(0)) = x - 3f(0)$. Par la suite, on pose $z = x - 2f(0)$ alors $f(z) = z + 2f(0) - 3f(0) = z - f(0)$. En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve $f(0) = 0$ d'où la seule fonction qui vérifie les conditions de l'exercice est $f(x) = x$ pour tout réel x. Réciproquement la fonction identité vérifie l'équation initiale. ➽ Il faut noter que la vérification est une étape très importante pour chaque problème, on peut perdre des points dans les compétitions olympiques si le candidat l'oublie ! Donc attention !!

> Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a
>
> $$f(xy) = xf(x) + yf(y)$$

Solution. Soit f une solution du problème. La recherche de $f(0)$ semble judicieuse. On commence par substituer $x = 0$ et $y = 0$, on trouve $f(0) = 0$. Ainsi toute solution du problème doit vérifier $f(0) = 0$. Par la suite, en substituant $y = 0$, on obtient $xf(x) = f(0) = 0$, ce qui donne $f(x) = 0$. La dernière étape consiste à vérifier que la fonction nulle vérifie bien l'équation initiale, ce qui est immédiat.

> La fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ vérifie $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ et pour tous $x, y \in [0, 1]$,
>
> $$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$
>
> Déterminer la valeur de $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Solution. Il est facile de trouver la valeur de $f\left(\frac{1}{2}\right)$. En effet, en substituant $x=1$ et $y=0$, on trouve

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1+0}{2}\right)=\frac{f(1)+f(0)}{2}=\frac{1}{2}$$

puis on a

$$\frac{1}{2}=f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{2}\right)=\frac{f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})}{2} \qquad (*)$$

On a besoin donc de calculer $f(\frac{2}{3})$, en substituant $x=y=\frac{1}{3}$, on trouve

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=2\times\frac{f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)}{2}=2f\left(\frac{1}{3}\right)$$

Donc d'après $(*)$ on retrouve $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

> Trouver toutes les fonctions réelles f qui vérifient pour tous $x,y\in\mathbb{R}$,
>
> $$f(x+y)-f(x-y)=4xy$$

Solution. En substituant $x=y=0$, on tombe sur $0=0$ (rien de nouveau). En substituant $x=y$, on trouve $f(2x)-f(0)=4x^2$, en prenant $t=2x$ et en posant $f(0)=c$, avec c une constante, on a $f(t)=t^2+c$. Réciproquement les fonctions $t\mapsto t^2+c$ vérifient l'équation initiale.

> Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}^{+*}$ qui pour tous $x,y\in\mathbb{R}^{+*}$ vérifient
>
> $$xf(xy)=f(y)$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus. Comme la valeur 0 n'est pas autorisée ici, la première substitution à essayer est $x=1$ et/ou $y=1$. On voit que la substitution $x=1$ mène à une trivialité, donc inintéressante. Posons $y=1$ dans l'équation de base. On obtient $xf(x)=f(1)$ pour tout $x>0$, i.e. $f(x)=\frac{f(1)}{x}$. Comme $f(1)$ n'est qu'une constante on pose $f(1)=c$, on obtient par la suite $f(x)=\frac{c}{x}$ pour tout $x>0$. La réciproque est évidente. Donc l'équation de base admet une infinité de solutions de la forme $x\mapsto\frac{c}{x}$ avec c une constante strictement positive.

> Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}^{+*}$ telles que pour tous $x,y\in\mathbb{R}^{+*}$,
>
> $$f(yf(x))\times(x+y)=x^2(f(x)+f(y))$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus. À nouveau, nous travaillons dans $\mathbb{R}^{+*}$, donc nous allons plutôt nous orienter vers la valeur 1 pour les premières substitutions. Essayons de substituer $x=y=1$ dans l'équation de base. Nous obtenons après calculs $f(f(1))=f(1)\,(*)$

Nous ne pouvons donc pas immédiatement trouver la valeur de $f(1)$. Par contre, nous avons établi une propriété intéressante à propos de $f(1)$. Il est bon à présent de ne pas baisser les bras et de poursuivre les substitutions pour obtenir plus d'informations à propos de $f(1)$. Rappelons ici que $f(1)$ n'est rien d'autre qu'une constante, ainsi, il est parfaitement possible (et même souhaitable !) de tenter des substitutions de la forme $(x, y) = (1, f(1)), (x, y) = (f(1), 1)$ ou encore $(x, y) = (f(1), f(1))$ et d'utiliser la propriété $(*)$ pour simplifier le résultat. Dans notre cas, substituer $x = f(1)$ et $y = 1$ donne, en utilisant la propriété $(*)$ pour simplifier les doubles f et en factorisant l'équation résultante, $(f(1)-1)(2f(1)+1) = 0$. Donc $f(1) = 1$ ou $f(1) = -1/2$. Comme le domaine d'arrivée est $\mathbb{R}^{+*}$, on exclut la seconde possibilité. On conclut que $f(1) = 1$. Afin d'utiliser cette information pour f, on substitue $x = 1$. Un simple réarrangement des termes donne $yf(y) = 1$, i.e. $f(y) = 1/y$. Réciproquement, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ vérifie l'équation de base.

> Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
>
> $$f(x + f(f(y))) = y + f(f(x))$$

Solution. Un lecteur attentif remarquera que si on compose les deux termes de l'équation, on trouve

$$f(f(x + f(f(y)))) = f(y + f(f(x))) = x + f(f(y))$$

On fixe y et on pose $t = x + f(f(y))$ avec t un réel quelconque (puisque x parcourt $\mathbb{R}$) , donc $f(f(t)) = t$. En remplaçant dans l'équation de base, on trouve que $f(x + y) = x + y$. On prend $y = 0$. D'où la seule fonction qui vérifie notre equation fonctionnelle est $f(x) = x$ pour tout réel x. N'hésitez pas à composer par f lorsque l'équation vous parait symétrique ! Un autre exemple qui porte sur une inégalité fonctionnelle dans $\mathbb{N}^*$, qui semble un peu difficile mais pas de panique, vous allez voir que c'est simple !

> Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{N}^*$,
>
> $$f(x) + yf(f(x)) \leq x(1 + f(y))$$

Solution. Il est vivement conseillé dans ce cas d'essayer de trouver la valeur de $f(1), f(f(1)), \ldots$ En prenant $x = y = 1$, on trouve $f(f(1)) \leq 1$ et puisque $f(f(1)) \neq 0$ car l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{N}^*$, alors $f(f(1)) = 1$. En prenant $x = 1, y = f(1)$, on trouve $f(1) \leq 1$ donc $f(1) = 1$. Pour $x = 1$, on obtient : $f(y) \geq y$ pour tout entier naturel non nul y. On remarque que $f(x) = x$ est solution, essayons de montrer que $f(x) \leq x$ pour conclure. En effet, pour $y = 1$, $x + f(x) \leq f(x) + f(f(x)) \leq 2x$ alors $f(x) \leq x$ d'après ce qui précède, on a $f(x) = x$ pour tout entier naturel non nul. Réciproquement, cette fonction vérifie les conditions de l'exercice.

4.9.2 Substitutions fonctionnelles

Dans le monde des mathématiques olympiques, les substitutions de base ne sont pas suffisantes pour résoudre une équation fonctionnelle. Cependant, il existe d'autres techniques qui permettent d'avoir des renseignements sur les fonctions recherchées. Les substitutions fonctionnelles sont largement utilisées pour résoudre certaines équations fonctionnelles.

Une substitution fonctionnelle consiste à remplacer une expression algébrique ou une fonction par une forme simple afin de simplifier l'équation fonctionnelle. Dans la suite, nous donnerons plusieurs exemples qui permettent de bien comprendre cette technique.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ qui vérifient pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$

$$y^2 f(x) - x^2 f(y) = y^2 - x^2$$

Solution. Soit f une fonction vérifiant la relation ci-dessus. En divisant les deux membres de l'équation par x^2y^2 (on peut car x et y sont non nuls), on trouve

$$\frac{f(x)}{x^2} - \frac{f(y)}{y^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

c'est-à-dire

$$\frac{f(x)}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{f(y)}{y^2} - \frac{1}{y^2}$$

On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}$, on obtient par la suite $g(x) = g(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$. Donc la fonction g est constante, i.e. $g(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc $f(x) = cx^2 + 1$. On vérifie aisément que toutes les fonctions $x \mapsto cx^2 + 1$ vérifient l'équation de base.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x + 2f(x) + f(f(y) - x) = y$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus. Comme à notre habitude, commençons par quelques substitutions de base. Avec $x = 0$, nous obtenons $f(f(y)) = y - 2f(0)$.

Le terme le plus compliqué de l'équation de base est $f(f(y) - x)$. Il peut donc être judicieux d'essayer de s'en débarrasser. Le moyen le plus facile de fixer ce terme est de substituer $x = f(y)$. On obtient ainsi, après simplification des doubles f,

$$f(y) = -y + 3f(0)$$

Substituons encore $y = 0$ dans cette dernière équation, on obtient $f(0) = 0$. L'équation ci-dessus devient donc $f(y) = -y$. Réciproquement cette fonction vérifie l'équation de base.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + y) \geq f(xy)$$

Solution. Soit f une solution de l'inéquation ci-dessus. Il est toujours bon de commencer un problème d'équation fonctionnelle en identifiant les potentielles solutions. Pour ce faire, passez en revue les fonctions usuelles (les fonctions constantes $x \mapsto c$, les fonctions linéaires $x \mapsto ax + b$, en particulier $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$, $x \mapsto x^2, x \mapsto -x^2$, $x \mapsto c/x$, etc). Dans cet exemple, seules les fonctions constantes dans la liste ci-dessus satisfont l'inéquation. On va donc essayer de montrer que les solutions sont les fonctions constantes. Commençons naturellement par substituer $y = 0$. On obtient $f(x) \geq f(0)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Ainsi, si on arrive à établir l'inégalité inverse, c'est-à-dire $f(x) \leq f(0)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$, alors on pourrait déduire l'égalité $f(x) = f(0)$ et on aura résolu le problème. Essayons donc de faire apparaître un $f(0)$ du côté gauche du signe $\geq$. La substitution naturelle est donc $y = -x$. Elle mène à

$$f(0) \geq f(-x^2)$$

Le problème à présent est que les nombres réels ne peuvent pas tous s'exprimer comme "moins le carré d'un autre". Ainsi, on peut conclure l'égalité $f(t) = f(0)$ à ce stade seulement pour les t qui peuvent s'écrire $t = -x^2$ pour un certain x dans $\mathbb{R}$. Il est facile de voir dans ce cas que si $t \leq 0$, alors $t = -\sqrt{t^2}$ et que cette même expression n'est pas dénie pour $t > 0$. Étant donné $t \leq 0$, on pose $x = \sqrt{-t}$ dans l'équation ci-dessus et on déduit que $f(0) \geq f(t)$. Combiné avec notre premier résultat, on a $f(t) = f(0)$ pour tout $t \leq 0$ dans $\mathbb{R}$. Une autre substitution qu'il est toujours bon d'envisager est le classique $x = y$. Dans ce cas, cela donne $f(2x) \geq f(x^2)$. En posant $x = -\sqrt{t}$, on obtient $f(0) = f(-2\sqrt{t}) \geq f(t)$. De la double inégalité et des résultats précédents, on peut finalement conclure que $f(t) = f(0)$ pour tout t réel. On vérifie aisément que toutes les fonctions constantes $x \mapsto c$ satisfont l'inégalité de départ.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ qui vérifient

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2x+29}{x-2}\right) = 100x + 80$$

pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

Solution. Pour tout $x \neq 2$, on pose $r(x) = \dfrac{2x+29}{x-2}$. On commence par remarquer que $r(x) \neq 2$ pour tout $x \neq 2$ et que $r(r(x)) = x$ on substitue x par $r(x)$ dans l'équation de base. Ainsi on obtient le système d'équations

$$\left\{ 2f(x) + 3f(r(x)) = 100x + 802f(r(x)) + 3f(x) = 100r(x) + 80 \right.$$

En éliminant $f(r(x))$, on obtient $f(x) = 60r(x) - 40x + 16$. Donc

$$f(x) = \frac{40x^2 - 216x - 1708}{2 - x}$$

On vérifie réciproquement que cette fonction vérifie l'équation de base.

4.10 Exercices du quatrième chapitre

EXERCICE. Déterminer les triplets d'entiers naturels (a,b,c) vérifiant

$$(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3})(3\sqrt{a}+\sqrt{b}-2\sqrt{c})=12$$

EXERCICE. Simplifier

$$\sqrt[4]{89+28\sqrt{10}}$$

EXERCICE. Déterminer la partie entière du nombre réel

$$a=\sqrt{23}+\sqrt{39}$$

EXERCICE. Montrer que

$$\sqrt{101}-\sqrt{99}>\frac{1}{10}$$

EXERCICE. Déterminer la valeur de

$$\frac{1}{\log_{10}5}-\frac{2}{\log_4 5}$$

EXERCICE. On définit la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ par son terme général

$$a_n=\frac{1}{\log_n 14}$$

Déterminer la valeur de

$$a_2+a_3+a_4-a_5-a_6-a_7$$

EXERCICE. On dit qu'un triangle de côtés $a\leq b\leq c$ qu'il est logarithmement rectangle si

$$\log_{10}a^2+\log_{10}b^2=\log_{10}c^2$$

Déterminer la plus grande valeur possible de a dans un triangle rectangle et logarithmement rectangle.

EXERCICE. Déterminer la valeur maximale de

$$\log_a\left(\frac{a}{b}\right)+\log_b\left(\frac{b}{a}\right)$$

pour des nombres réels $a\geq b>1$.

EXERCICE. Montrer que pour tout entier $n\geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2=(-1)^n\frac{n(n+1)}{2}$$

EXERCICE. Pour tout nombre réel r, simplifier le produit suivant

$$R_n=\prod_{p=1}^{n}\left(1+r^{2^k}\right)$$

EXERCICE. Montrer que pour tout entier $n\geq 1$,

$$\prod_{p=1}^{n}(2p+1)=\frac{(2n+1)!}{2^n n!},\qquad \prod_{k=1}^{n-1}\frac{n!}{k!}=\prod_{k=1}^{n}k^k$$

EXERCICE. Soit $n\geq 2$ un entier naturel. Simplifier le produit suivant

$$P_n=\prod_{p=1}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$$

EXERCICE. Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 1$, l'inégalité

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\leq 2$$

EXERCICE. Soient n un entier naturel non nul et $x_1,x_2,\ldots,x_n$ des réels appartenant à $[0,1]$. Montrer que

$$\prod_{p=1}^{n}(1-x_p)\geq 1-\sum_{p=1}^{n}x_p$$

Exercice. Montrer que l'application

$$f :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to]0,+\infty[\times]0,+\infty[$$

définie par

$$f(x,y) = \left(xy, \frac{x}{y}\right)$$

pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ est bijective.

Exercice. On considère l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$f(n) = n + (-1)^n$$

pour tout entier naturel n. Montrer que f est une bijection.

Exercice. Soient a, b, c et d des nombres réels non nuls tels que a et b sont les racines du trinôme $x^2 + cx + d$ et c et d sont les racines du trinôme $x^2 + ax + b$. Déterminer la valeur de

$$a + b + c + d$$

Exercice. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$x^3 - 4\sqrt{3}x^2 + 3x + 18\sqrt{3} = 0$$

Exercice. On considère P et Q les deux polynômes définis par

$$P = X^6 - X^5 - X^3 - X^2 - X$$

et

$$Q = X^4 - X^3 - X^2 - 1$$

et z_1, z_2, z_3 et z_4 les racines de Q. Calculer

$$P(z_1) + P(z_2) + P(z_3) + P(z_4)$$

Exercice. Soit p un polynôme à coefficients entiers tel qu'il existe quatre entiers naturels a, b, c et d vérifiant

$$p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = 5$$

Montrer qu'il n'existe pas d'entier k tel que $p(k) = 8$.

Exercice. Soit p un polynôme unitaire de quatrième degré et vérifiant

$$\frac{p(3)}{3} = \frac{p(2)}{2} = \frac{p(1)}{1} = 10$$

Déterminer la valeur de $p(12) + p(-8)$.

Exercice. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant

$$a_{i+j} = 4^{ij} a_i a_j$$

Expliciter le terme a_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice. Déterminer tous les polynômes vérifiant

$$(x+3)p(x) = xp(x+1)$$

Exercice. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y, on a

$$f(x) + f(x+y) + f(x+2y) = 6(x+y)$$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout réel $x \neq 0$, on a

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$$

Trouver le nombre de solutions non nulles de l'équation $f(-x) = f(x)$.

Exercice. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction vérifiant $f(1) = 1$ et pour tous entiers naturels a et b,

$$f(a+b) = f(a) + f(b) - 2f(ab)$$

Déterminer la valeur de $f(2019)$.

Exercice. Soit p/q une fraction irréductible avec $q > 0$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{q-1} \left\lfloor k\frac{p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

Exercice. Soit a un nombre réel. Que dire de la parité de l'entier

$$\left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor a - \frac{1}{2} \right\rfloor \quad ?$$

CHAPTER 5

COMBINATOIRE (À COMPLÉTER)

5.1 Principe de la moyenne, principe des tiroirs de Dirichlet

5.2 Principe de l'extremum

5.3 Invariants, mono-variants

5.4 Pavage, coloriage

5.5 Jeux, stratégies gagnantes

5.6 Principe de l'inclusion-exclusion

5.7 Un peu de géométrie combinatoire

5.8 Arithmétique combinatoire

5.9 Principes basiques de comptage

5.10 Dénombrement des ensembles finis

5.11 Exercices du cinquième chapitre

CHAPTER 6

PROBLÉMES DES TESTS DE SÉLÉCTION 2018/2019

6.1 Test de sélection national de Novembre 2018

الفرض الأول باللغتين العربية والفرنسية

المستوى الدراسي : الجذع المشترك — الشعبة : العلمية

تاريخ التمرير : الجمعة 16 نونبر 2018 — مدة الإنجاز : ساعتان

ملحوظة هامة: يكتب بخط واضح على ورقة التحرير:
- اسم ونسب المترشح(ة) (بالحروف العربية واللاتينية) وتاريخ الميلاد،
- اسم المؤسسة والبلدة والمديرية الإقليمية.

Exercice 1 : Déterminer tous les triplets (x, y, z) de nombres réels vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} x+y-z &= -1 \\ x^2-y^2+z^2 &= 1 \\ -x^3+y^3+z^3 &= -1 \end{cases}$$

التمرين 1 : حدّد جميع المثلوثات (x, y, z) من أعداد حقيقية التي تحقق النظمة التالية :

$$\begin{cases} x+y-z &= -1 \\ x^2-y^2+z^2 &= 1 \\ -x^3+y^3+z^3 &= -1 \end{cases}$$

Exercice 2 : On considère un segment $[AB]$ et soient D_0, D_1, …, et D_{2018} des points appartenant à $[AB]$ tels que $D_0 = A$, $D_{2018} = B$ et

$$D_0D_1 = D_1D_2 = \cdots = D_{2017}D_{2018}.$$

Si C est un point du plan tel que $[\widehat{BCA}] = 90°$, prouver que :

$$CD_0^2 + CD_1^2 + \cdots + CD_{2018}^2 = AD_1^2 + AD_2^2 + \cdots + AD_{2018}^2.$$

التمرين 2 : نعتبر قطعة $[AB]$ ولتكن D_0 و D_1 و … و D_{2018} نقطاً تنتمي إلى $[AB]$ بحيث $D_0 = A$ و $D_{2018} = B$

و $D_0D_1 = D_1D_2 = \cdots = D_{2017}D_{2018}$.

إذا كانت C نقطة من المستوى حيث $[\widehat{BCA}] = 90°$، أثبت أن :

$$CD_0^2 + CD_1^2 + \cdots + CD_{2018}^2 = AD_1^2 + AD_2^2 + \cdots + AD_{2018}^2 .$$

Exercice 3 : Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que a^2b divise $b^2 + 3a$.

1. Vérifier que $\dfrac{b^2}{a} \in \mathbb{N}$ et $\dfrac{3a}{b} \in \mathbb{N}$, puis prouver que $\dfrac{9a}{b^2} \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls, tels que a^2b divise $b^2 + 3a$.

التمرين 3 : ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث a^2b يقسم $b^2 + 3a$.

1. تحقق أن $\dfrac{b^2}{a} \in \mathbb{N}$ و $\dfrac{3a}{b} \in \mathbb{N}$، ثُم أثبت أن $\dfrac{9a}{b^2} \in \mathbb{N}$.
2. حدّد جميع الأزواج (a, b) من أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة، بحيث a^2b يقسم $b^2 + 3a$.

6.2 Test de sélection national de Décembre 2018

الفرض الثاني باللغتين العربية والفرنسية

المستوى الدراسي : الجذع المشترك — الشعبة : العلمية

تاريخ التمرير : الجمعة 14 دجنبر 2018 — مدة الإنجاز : ساعتان

ملحوظة هامة: يكتب بخط واضح على ورقة التحرير:
- اسم ونسب المترشح(ة) (بالحروف العربية واللاتينية) وتاريخ الميلاد،
- اسم المؤسسة والبلدة والمديرية الإقليمية.

Exercice 1 : Soient x et y deux nombres réels non nuls vérifiant : $$x^3+y^3+3x^2y^2=x^3y^3.$$ Déterminer toutes les valeurs possibles du nombre $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.	**التمرين** 1 : ليكن x و y عددين حقيقيين غير منعدمين يحققان : $$x^3+y^3+3x^2y^2=x^3y^3 .$$ حدّد جميع القيم الممكنة للعدد $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.
Exercice 2 : Soit $ABCD$ un parallélogramme. I et J sont, respectivement, deux points des segments $[AD]$ et $[AB]$ tels que $ID=JB$. Montrer que $\widehat{BCP}=\widehat{PCD}$, où P est le point d'intersection des droites (JD) et (BI).	**التمرين** 2 : ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع. I و J هما على التوالي، نقطتين من القطعتين $[AD]$ و $[AB]$ بحيث $ID=JB$. بيّن أن $\widehat{BCP}=\widehat{PCD}$، حيث P هي نقطة تقاطع المستقيمين (JD) و (BI).
Exercice 3 : Un jardinier a un terrain rectangulaire de dimensions $120m$ et $100m$. Sur ce terrain, il y a 9 jardins circulaires de même diamètre $5m$. Prouver que quelle que soit la position des jardins, ce jardinier peut toujours construire un jardin rectangulaire de dimensions $25m$ et $35m$.	**التمرين** 3 : لِبستاني قطعة أرضية مستطيلة بعداها 120م و100م. على هذه القطعة الأرضية ، توجد 9 حدائق دائرية لها نفس القطر 5م. أثبت أنه، بغض النظر عن موقع الحدائق، لا يزال بإمكان هذا البستاني تشييد حديقة مستطيلة بعداها 25م و35م.

6.3 Test de sélection national I de Février 2019

الفرض الثالث باللغتين العربية والفرنسية

المستوى الدراسي : الجذع المشترك — الشعبة : العلمية

تاريخ التمرير : الجمعة 8 فبراير 2019 — مدة الإنجاز : ساعتان ونصف

ملحوظة هامة: يكتب بخط واضح على ورقة التحرير:
- اسم ونسب المترشح(ة) (بالحروف العربية واللاتينية) وتاريخ الميلاد،
- اسم المؤسسة والبلدة والمديرية الإقليمية.

Exercice 1 : Soient a, b, c et d des nombres réels strictement positifs tels que : $$a = c + \frac{1}{d} \text{ et } b = d + \frac{1}{c}.$$ 1. Prouver que $ab \geq 4$. 2. Trouver la valeur minimale du nombre $ab + cd$.	**التمرين** 1 : لتكن a و b و c و d أعداداً حقيقية موجبة قطعاً بحيث : $$a = c + \frac{1}{d} \text{ و } b = d + \frac{1}{c}.$$ 1. أثبت أن $ab \geq 4$. 2. أوجد القيمة الدنيا لِلعدد $ab + cd$.
Exercice 2 : Soit ABC un triangle et $(\mathcal{C})$ son cercle circonscrit. La hauteur issue du sommet A coupe le cercle $(\mathcal{C})$ en un point D et coupe le segment $[BC]$ en un point E. Soit J le milieu du segment $[CD]$. Montrer que les droites (EJ) et (AB) sont perpendiculaires.	**التمرين** 2 : ليكن ABC مثلثاً و $(\mathcal{C})$ دائرته المحيطة. الارتفاع المار من الرأس A يقطع الدائرة $(\mathcal{C})$ في نقطة D ويقطع القطعة $[BC]$ في نقطة E. لتكن J منتصف القطعة $[CD]$. بين أن المستقيمين (EJ) و (AB) متعامدين.
Exercice 3 : On dit qu'un nombre premier p est charmant, s'il s'écrit sous la forme $p = m^3 - n^3$ pour $m, n \in \mathbb{N}^\star$. 1. Donner trois exemples de nombres premiers charmants ayant les chiffres des unités deux-à-deux distincts. 2. Trouver toutes les valeurs possibles du chiffre des unités d'un nombre premier charmant.	**التمرين** 3 : نقول عن عدد أولي موجب p إنه جميل، إذا كان يكتب على شكل $p = m^3 - n^3$ من أجل $m, n \in \mathbb{N}^\star$. 1. أعط ثلاثة أمثلة لأعداد أولية جميلة أرقام وحداتها مختلفة مثنى مثنى. 2. أوجد جميع القيم الممكنة لِرقم وحدات عدد أولي جميل.

6.4 Test de sélection national II de Février 2019

الفرض الرابع باللغتين العربية والفرنسية

المستوى الدراسي : الجذع المشترك — الشعبة : العلمية

تاريخ التمرير : الجمعة 22 فبراير 2019 — مدة الإنجاز : ساعتان ونصف

ملحوظة هامة: يكتب بخط واضح على ورقة التحرير:
- اسم ونسب المترشح(ة) (بالحروف العربية واللاتينية) وتاريخ الميلاد،
- اسم المؤسسة والبلدة والمديرية الإقليمية.

Exercice 1 : Soit $f(x)$ un polynôme de degré 5 tel que : $f(1)=0$, $f(3)=1$, $f(9)=2$, $f(27)=3$, $f(81)=4$ et $f(243)=5$. Trouver le coefficient de x du polynôme $f(x)$.	**التمرين** 1 : لتكن $f(x)$ حدودية درجتها 5 بحيث : $f(1)=0$ و $f(3)=1$ و $f(9)=2$ و $f(27)=3$ و $f(81)=4$ و $f(243)=5$. أوجد معامل x للحدودية $f(x)$.
Exercice 2 : Soit (EA) une tangente à un cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ au point A $(E \notin (\mathcal{C}))$. On considère une droite passant par E et coupe le cercle $(\mathcal{C})$ aux points C et D telle que $C \in [ED]$. La droite (EO), où O est le centre de $(\mathcal{C})$, coupe $[BC]$ et $[BD]$, respectivement, aux points F et G. Montrer que O est le milieu de $[FG]$.	**التمرين** 2 : ليكن (EA) مماس لدائرة $(\mathcal{C})$ قطرها $[AB]$ في النقطة A $(E \notin (\mathcal{C}))$. نعتبر مستقيماً يمر من E ويقطع الدائرة $(\mathcal{C})$ في النقطتين C و D حيث $C \in [ED]$. المستقيم (EO)، حيث O مركز الدائرة $(\mathcal{C})$، يقطع $[BC]$ و $[BD]$ على التوالي في النقطتين F و G. بيّن أن O منتصف $[FG]$.
Exercice 3 : Un professeur de mathématiques a choisi cinq nombres deux-à-deux distincts de l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Le professeur a communiqué le produit de ces cinq nombres à un élève, et il lui a demandé si la somme de ces cinq nombres est paire ou impaire. Après un moment de réflexion, l'élève a répondu qu'il ne peut pas déterminer avec certitude la parité de la somme de ces cinq nombres. Sachant que la réponse de l'élève est correcte, Quel est le produit des cinq nombres qu'a calculé le professeur ?	**التمرين** 3 : اختار أستاذ للرياضيات خمسة أعداد مختلفة مثنى مثنى من المجموعة $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. أخبر الأستاذ تلميذاً بقيمة جداء هذه الأعداد الخمس ، وسأله ما إذا كان مجموع هذه الأعداد الخمس زوجي أو فردي. بعد لحظة من التفكير، أجاب التلميذ أنه لا يستطيع تحديد زوجية مجموع هذه الأعداد الخمس بالتأكيد. علماً أن إجابة التلميذ صحيحة، ما هو جداء الأعداد الخمس الذي حسبه الأستاذ ؟

6.5 Test de sélection national de Mars 2019

الفرض الخامس باللغتين العربية والفرنسية

المستوى الدراسي : الجذع المشترك **الشعبة : العلمية**

تاريخ التمرير : الجمعة 22 **مارس** 2019 **مدة الإنجاز : ثلاث ساعات**

ملحوظة هامة: يكتب بخط واضح على ورقة التحرير:
- اسم ونسب المترشح(ة) (بالحروف العربية واللاتينية) وتاريخ الميلاد،
- اسم المؤسسة والبلدة والمديرية الإقليمية.

Exercice 1 : On considère un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O. Soient (AB) et (AC) deux droites tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ aux points B et C. Le point E appartient au diamètre $[BD]$ tel que $(CE)\perp(BD)$.

1. Montrer que : $BE.BO = AB.CE$.
2. Montrer que : $\dfrac{AB}{\sqrt{BE}} = \dfrac{BO}{\sqrt{ED}}$.

التمرين 1 : نعتبر دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها O. ليكن (AB) و (AC) مستقيمين مماسين للدائرة $(\mathcal{C})$ عند النقطتين B و C. النقطة E تنتمي للقطر $[BD]$ بحيث $(CE)\perp(BD)$.

1. بين أن : $BE.BO = AB.CE$.
2. بيّن أن : $\dfrac{AB}{\sqrt{BE}} = \dfrac{BO}{\sqrt{ED}}$.

Exercice 2 : Trouver le plus petit nombre réel m, pour lequel il existe deux nombres réels a et b tels que l'inégalité

$$| x^2 + ax + b | \leq m(x^2 + 1)$$

soit vérifiée pour tout x de l'intervalle $[-1; 1]$.

التمرين 2 : أوجد أصغر عدد حقيقي m، الذي من أجله يوجد عددان حقيقيان a و b حيث تكون المتفاوتة

$$| x^2 + ax + b | \leq m(x^2 + 1)$$

مُحققة لِكل x من المجال $[-1; 1]$.

Exercice 3 : Soit p un nombre premier. Supposons qu'il existe deux entiers naturels distincts m et n tels que

$$p^2 = \frac{m^2 + n^2}{2}.$$

Montrer qu'il existe a de $\mathbb{N}$ tel que :

$$2p - n - m = a^2 \text{ ou } 2p - n - m = 2a^2.$$

التمرين 3 : لِيكن p عدداً أولياً. نفترض أنه يوجد عددان صحيحان طبيعيان مختلفان m و n بحيث

$$p^2 = \frac{m^2 + n^2}{2} .$$

بيّن أنه يوجد a من $\mathbb{N}$ حيث :

$$2p - n - m = a^2 \text{ أو } 2p - n - m = 2a^2 .$$

6.6 Test de sélection national de Avril 2019

الفرض السادس باللغتين العربية والفرنسية

المستوى الدراسي : الجذع المشترك **الشعبة : العلمية**

تاريخ التمرير : الجمعة 26 ابريل 2019 **مدة الإنجاز : ثلاث ساعات**

ملحوظة هامة: يكتب بخط واضح على ورقة التحرير:
- اسم ونسب المترشح(ة) (بالحروف العربية واللاتينية) وتاريخ الميلاد،
- اسم المؤسسة والبلدة والمديرية الإقليمية.

Exercice 1 : On considère les nombres réels strictement positifs a, b et c tels que : $$(a+c)(b^2+ac)=4a.$$ Trouver la valeur maximale possible du nombre $b+c$ et déterminer tous les triplets (a,b,c), pour lesquels cette valeur maximale est atteinte.	**التمرين** 1 : نعتبر الأعداد الحقيقية الموجبة قطعاً a و b و c بحيث : $$(a+c)(b^2+ac)=4a.$$ أوجد القيمة القصوى الممكنة للعدد $b+c$ وحدّد جميع المثلوثات (a,b,c)، التي من أجلها تتحقق هذه القيمة القصوى.
Exercice 2 : Soient $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ deux cercles tangents au point T. Les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont les tangentes communes à $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ respectivement aux points E et F. La droite (ET) coupe $(\mathcal{C}_2)$ une deuxième fois, au point G. Sachant que A est le point d'intersection de (Δ_1) et (Δ_2), montrer que $(AT)\parallel(GF)$.	**التمرين** 2 : لتكن $(\mathcal{C}_1)$ و$(\mathcal{C}_2)$ دائرتين متماستين خارجياً في النقطة T. المستقيمان (Δ_1) و(Δ_2) مماسان مشتركان لـ $(\mathcal{C}_1)$ و$(\mathcal{C}_2)$ على التوالي في النقطتين E وF. المستقيم (ET) يقطع $(\mathcal{C}_2)$ مرةً ثانيةً في النقطة G. علماً أن A هي نقطة تقاطع (Δ_1) و(Δ_2)، بيّن أن $(AT)\parallel(GF)$.
Exercice 3 : Sur une période de 100 jours, chacun des six amis a nagé exactement 75 jours et pendant n jours $(n\leq 100)$, au moins cinq de ces amis ont nagé. Déterminer la plus grande et la plus petite valeur du nombre n.	**التمرين** 3 : على مدى 100 يوم سبِح كل واحد من ستة أصدقاء مدة 75 يوماً بالضبط وخلال n يوماً $(n\leq 100)$، سبِح على الأقل خمسة من هؤلاء الأصدقاء. حدّد أكبر وأصغر قيمة للعدد n.

6.7 Test de sélection I du stage de Juillet (Jour 1)

Test du premier Jour

Durée : 4 heures et 30 minutes

Problème 1. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. On considère les points suivants, A' la projection orthogonale de A sur (BD), B' la projection orthogonale de B sur (AC), C' la projection orthogonale de C sur (BD) et D' la projection orthogonale de D sur (AC).
Montrer que les points A', B', C' et D' sont cocycliques.

Problème 2. Soit $a > 1$ un nombre réel. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité

$$\frac{a^n - 1}{n} \geq \sqrt{a}^{n+1} - \sqrt{a}^{n-1}$$

a lieu.

Problème 3. Trouver tous les couples (x, y) d'entiers naturels vérifiant l'équation

$$7^x + x^4 + 47 = y^2$$

6.8 Test de sélection II du stage de Juillet (Jour 2)

Test du deuxième Jour

Durée : 4 heures et 30 minutes

Problème 1. Soit p un nombre premier. Déterminer tous les entiers naturels n tels que $p+n$ divise pn.

Problème 2. Soit n un entier naturel pair et non nul. On remplit toutes les cases d'un tableau $n \times n$ par des $+$ et des $-$ avec autant de $+$ que des $-$.
Montrer qu'il existe deux lignes contenant le même nombre de $+$ ou deux colonnes contenant le même nombre de $+$.

Problème 3. Soit ABC un triangle. La tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC coupe la droite (BC) en X. ON note A' le symétrique du point A par rapport à X et C' le symétrique de C par rapport à la droite (AX).
Montrer que les points A, C', A' et B sont cocycliques.