RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITÉ MOHAMED MANTOURI DE CONSTANTINE

THESE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'Université Mohamed Mantouri de Constantine

Mention : MATHÉMATIQUES

Présentée et soutenue par

Esseyed Hani El Yafi BENHASSINE

MÉTHODES DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE AVEC CONDITIONS DE TRANSMISSION DE ROBIN POUR LE SYSTÈME DE STOKES

soutenue le 03 / 07 / 2011, devant le jury composé des membres :

Président	Soraya BOUGHABA	(M.C)	Université de Constantine
Directeur de thèse :	Abderrahmane BENDALI	(Prof)	INSA de Toulouse
	Nasereddine BENKAFADAR	(Prof)	Université de Constantine
Examinateurs :	Keddour LEMRABET	(Prof)	Université de Bab-Ezzouar
	Abdelhafid MOKRANE	(Prof)	ENS de Kouba

Remerciements

Je remercie toutes les personnes qui m'ont aidé, durant ces années, à préparer cette thèse dans les meilleures conditions.

Soraya BOUGHABA m'a fait l'honneur d'accepter de présider mon jury de thèse. Je la remercie vivement pour l'intérêt qu'elle a porté à mon travail et aussi de m'avoir initié à l'analyse numérique durant ma formation de graduation. Mes remerciements les plus vifs à Keddour LEMRABET et Abdelhafid MOKRANE qui ont accepté la lourde tâche de lire mon manuscrit de thèse et de faire partie de mon jury.

Je tiens à exprimer ici toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Abderrahmane BENDALI. Sans lui ce travail n'aurait pas eu lieu. Par sa rigueur scientifique, sa disponibilité, son exigence et sa patience il a su me faire comprendre l'essence même de l'encadrement. Il a été pour moi une source intarissable de savoir et d'une aide très précieuse dans les moments de doute. Je le remercie aussi d'avoir faciliter toutes les démarches pour mon accueil dans le cadre du programme boursier PROFAS.

Je tiens aussi à remercier Nasereddine Mohamed BENKAFADAR d'avoir accepté l'aventure de m'encadrer. Il a été durant ma formation de graduation un grand exemple de compétence, de gentillesse et de bonhomie.

Cette thèse a été réalisée dans le cadre du programme boursier PROFAS. Je remercie le personnel du CROUS et les autorités franco-algériennes qui ont permis que ce travail aboutisse dans les meilleures conditions.

Cette thèse a été préparée essentiellement au sein du département de Génie Mathématique et de Modélisation (GMM) de l'INSA de Toulouse. Que toutes les personnes de ce département que j'ai croisé durant ces années soient remerciées pour leur accueil amical et pour leurs aides multiples. Je remercie en particulier, Thomas Monfort, Jeremy Laskary et Elie Chahine qui n'ont pas hésité à sacrifier de leur temps de travail pour me familiariser avec GetFEM++. Je remercie enfin mon ami Kader BENCHOUIEB d'avoir relu mon manuscrit.

Résumé

Cette étude est dédiée à la construction de méthodes de décomposition de domaine (MDD) sans-recouvrement où le cadre d'application est la simulation d'écoulements de fluides incompressibles dont la modélisation est effectuée à l'aide d'une formulation vitesse-pression, résolue numériquement par une méthode d'éléments finis. L'approximation de la pression par une fonction globalement continue renforce considérablement la stabilité du schéma numérique par éléments finis. Nous nous intéressons, dans ce travail, au développement d'une MDD mixte assurant à convergence cette propriété de continuité globale de la pression.

Sur le même principe qu'une méthode FETI-DP (Finite Element Tearing and Interconneting - Dual Primal), la caractéristique principale de la MDD proposée est de maintenir un raccord aux point-multiples pour la vitesse et la pression, c'est à dire aux points communs à plus de deux sous-domaines. Une élimination des variables internes aux sous-domaines, permet de réduire le système de Stokes à un problème de type point-selle posé sur les interfaces. Un solveur itératif de Krylov de type GMRES a été retenu pour résoudre le problème implicite ainsi condensé.

Nous établirons de façon rigoureuse des propriétés de stabilité des approximations par éléments finis mixtes du système de Stokes aussi bien au niveau des problèmes locaux qu'au niveau du problème relatif aux inconnues rattachées aux point-multiples. Des estimations assurant que chaque itération peut être exécutée de façon stable, ainsi qu'une démonstration de la convergence du procédé itératif, fournissent une base théorique à l'application du procédé. Enfin, nous proposerons également des stratégies d'accélération du processus itératif.

Différents tests numériques ont permis de mettre en évidence l'efficacité de la MDD mixte que nous développons et son extensibilité numérique en comparaison avec celle d'une méthode FETI-DP standard appliquée au système de Stokes.

Mots-clefs : Méthode de décomposition de domaine sans recouvrement, système de Stokes, solveur itératif de Krylov, FETI-DP, point-multiples.

Abstract

This study is mainly dedicated to the construction of non-overlapping domain décomposition methods (DDM) where the application framework is the simulation of incompressible fluid flows whose modelling, resulting from the finite element method, reveals unknowns in displacement and pressure. For many problems, the pressure representing a fundamental characteristic of the phenomenon must necessarily be continuous at interfaces. To this end, we are interested in developing a mixed DDM fitting the physical phenomena, dedicated to the discrete Stokes system resulting from a discretisation by continuous-pressure finite element method.

Based on the FETI-DP method, the main feature of the proposed DDM is to maintain a primal connection at cross-points, that is points common to more than two subdomains, for both displacement and pressure. Condensation of subdomains internal variables, leads to a reduced saddle-point system related to the interfaces which will be solved by using a Krylov iterative solver of the GMRES type.

Good stability properties of mixed finite element approximations of the Stokes system are rigorously established, for both local problems and the problem related to cross-points. Estimates ensuring that each iteration can be performed in a stable way, as well as a demonstration of the convergence of the iterative procedure, provide a theoretical background for applying the method. We also propose different strategies for accelerating the iterative process.

Finally different numerical tests have been carried out to demonstrate the effectiveness of the developed DDM mixed and its scalability in comparison with an adaptation of a standard FETI-DP method applied to the Stokes system.

Keywords : Non-overlapping domain decomposition methods, Stokes equations, FETI-DP methods, iterative Krylov solver, cross-points.

Table des matières

Introduction **11**

0.1 Objectifs, état de l'art et motivation 12

0.2 Plan du manuscrit de la thèse 17

1 Modèle physique **21**

1.1 Equations de Navier-Stokes 21

1.2 Equations de Stokes 24

2 Formulation variationnelle mixte du système de Stokes **27**

2.1 Quelques rappels 27

2.2 Formulation mixte du système de Stokes 31

2.3 Un résultat abstrait pour les problèmes mixtes 33

2.4 Condition inf-sup pour le système de Stokes 34

3 Éléments finis mixtes pour le système de Stokes **37**

3.1 Condition inf-sup discrète du système de Stokes 37

3.2 Paires d'éléments finis stables pour le système de Stokes 38

3.2.1 Schémas à pression discontinue 39

3.2.2 Schémas à pression continue 42

3.3 Comportement numérique des MEF pour le système de Stokes 44

3.4 Conclusion 49

4 Méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement pour un problème elliptique standard **53**

4.1 Introduction aux MDD sans recouvrement 54

4.2 Méthode de complément de Schur primale 55

4.2.1 Interprétation au niveau continu . . . 55
4.2.2 Interprétation matricielle . . . 57
4.3 Méthode de complément de Schur duale . . . 58
4.3.1 Interprétation au niveau continu . . . 58
4.3.2 Interprétation matricielle . . . 60
4.3.3 Présence de sous-domaines flottants . . . 60
4.4 Méthode de décomposition de domaine mixte . . . 63
4.4.1 Interprétation au niveau continu . . . 63
4.4.2 Interprétation matricielle . . . 65
4.5 Problème lié à la présence de point-multiples dans l'approche duale et mixte 66
4.5.1 Au niveau continu . . . 66
4.5.2 Au niveau discret . . . 67
4.6 Méthode FETI-DP . . . 68
4.6.1 Interprétation de la formulation discrète . . . 68
4.6.2 Interprétation au niveau discret . . . 70
4.7 Application numérique . . . 72

5 MDD mixte pour le système de Stokes 75
5.1 Notations utiles de la MDD . . . 76
5.2 Écriture équivalente du système discret de Stokes . . . 79
5.3 Écriture matricielle et algorithme de la méthode . . . 82
5.4 Stabilité de la MDD mixte du système de Stokes . . . 83
5.4.1 Stabilité des problèmes locaux . . . 84
5.4.2 Stabilité du problème lié aux point-multiples . . . 88
5.5 Etude de la convergence de l'algorithme associé à la MDD . . . 93
5.6 Résolution par des méthodes de type Krylov . . . 96

6 Validation numérique 99
6.1 Résolution directe . . . 100
6.2 Validation de la MDD mixte . . . 100
6.3 Comparaison de la MDD mixte avec une méthode FETI-DP standard . . . 105

7 Préconditionnement des MDD pour un problème elliptique 109
7.1 Préconditionneur de Neumann-Neumann pour les méthodes primales . . . 111

7.2 Préconditionneur de Dirichlet pour les méthodes duales 113
7.3 Préconditionnement des méthodes mixtes 116
7.4 Tests numériques des différents préconditionneurs 119
7.4.1 Tests pour une partition en bandes 119
7.4.2 Tests pour des partitions quadrillées 122

8 Stratégies de préconditionnement pour le système de Stokes 127
8.1 Stratégie de préconditionnement pour la MDD mixte 127
8.2 Strip-preconditioner : Préconditionneur allégé des MDD mixtes 130
8.3 Validation numérique du préconditionneur complet et allégé de la MDD mixte 131
8.4 Comparaison avec une méthode FETI-DP préconditionnée 132

Conclusion 137

Table des figures

1 Différentes façons de partitionner Ω en 5 sous-domaines, plus la longueur de l'interface globale et la distance maximale entre sous-domaines non-voisins sont petites plus la MDD est performante. 13

2 Avantage de l'utilisation d'un partitionnement du domaine géométrique comportant des point-multiples sur celui dit en bandes, pour une méthode FETI sans préconditionnement appliquée à un problème elliptique pour un maillage identique dans les deux partitions. 15

3.1 Schématisation des degrés de liberté de l'élément $\mathbb{P}_1(h/2) - \mathbb{P}_0(h)$ à pression discontinue. 39

3.2 Schématisation des degrés de liberté de l'élément $\mathbb{P}_2^+ - \mathbb{P}_1$ à pression discontinue. 40

3.3 Schématisation des degrés de liberté de l'élément de Scott-Vogelius $\mathbb{P}_4 - \mathbb{P}_3$. 41

3.4 Jonctions d'arêtes formant les demi-diagonales d'un parallélogramme. . . . 41

3.5 Schématisation des degrés de liberté de l'élément de Crouzeix-Raviart non-conforme. 42

3.6 Schématisation des degrés de liberté de l'élément $\mathbb{P}_1(h/2) - \mathbb{P}_1(h)$ à pression continue. 43

3.7 Schématisation des degrés de liberté de l'élément de Taylor-Hood. 43

3.8 Schématisation des degrés de liberté du mini-élément. 44

3.9 Solution exacte du cas-test de Bercovier-Engelman. 46

3.10 Tracés des lignes isobares de la pression du système de Stokes obtenue par les quatre MEF pour le cas-test de Bercovier-Engelman. 47

3.11 Solution exacte du second cas-test. 48

3.12 Tracés des lignes isobares de la pression du système de Stokes obtenue par les quatre MEF pour le deuxième cas-test. 49
3.13 Solution exacte du troisième cas-test. 50
3.14 Tracés des lignes isobares de la pression du système quasi-Stokes obtenue par les quatre MEF pour le troisième cas-test. 51
3.15 Exemple de maillage générant une instabilité pour le schéma de Scott-Vogelius. 52

4.1 Décomposition du domaine géométrique Ω en trois sous-domaines. 54
4.2 Décomposition de Ω comportant 3 sous-domaines flottants. 61
4.3 Difficulté de raccords au niveau des point-multiples. 67
4.4 Redondance au niveau des point-multiples. 67
4.5 Schématisation des opérateurs "non-redondant" et "orthonormal" pour supprimer les redondances au niveau des point-multiples. 68
4.6 Maintien de la continuité aux niveau des point-multiples. 69
4.7 Comparatif du nombre d'itérations nécessaire à la convergence des 3 MDD (primale, duale et mixte) pour résoudre un problème elliptique avec une partition en bandes de Ω et sans préconditionnement du solveur itératif. . . 73

5.1 Extension de $q_i \in M_i^h$ par zéro sur Ω_j. 85

6.1 Partitionnement du domaine Ω en 9 sous-domaines. 100
6.2 Diminution des résidus relatifs des trois solveurs : relaxation, GMRES(15) et GMRES(50). 102
6.3 Les erreurs relatives obtenues pour la vitesse et la pression avec ou sans utilisation de la MDD mixte, pour le schéma d'EF de Taylor-Hood. 103
6.4 Lignes isobares de la pression obtenue à différentes itérations du solveur GMRES(50) de la MDD mixte. 104
6.5 Tracé des valeurs de la pression obtenues à différentes itérations du solveur GMRES(50) de la MDD mixte au niveau de la ligne interface $y = 1/3$. . . 105
6.6 Corrélation entre le pas du maillage et le nombre d'itérations nécessaire à la convergence de la MDD mixte et de la FETI-DP non-préconditionnées. . 107

7.1 Description de la bande (strip) autour de l'interface où se trouvent les ddl intérieurs à prendre en compte lors du calcul des compléments de Schur locaux, dans le cas d'un partitionnement en 2 sous-domaines pour un maillage en quadrilatères. 118
7.2 Exemple de Partition "en bandes" de Ω en 5 sous-domaines. 119
7.3 Nombre d'itérations nécessaire au GMRES(50) pour solutionner le système d'interface dans les trois MDD appliquées à un problème elliptique avec et sans préconditionnement pour une partition en bandes et une précision de 10^{-6}. 120
7.4 Diminution des résidus relatifs du GMRES(50) du problème d'interface des 3 MDD (primale, duale et mixte) avec et sans préconditionnement appliquées à un problème elliptique pour une partition "en bandes" de Ω en 5 sous-domaines. 121
7.5 Exemple de Partition "quadrillée" de Ω en 25 sous-domaines. 122
7.6 Nombre d'itérations nécessaire pour la résolution du système linéaire par les trois MDD d'un problème elliptique avec préconditionnement pour une partition "quadrilée" en 16 sous-domaines et une précision de 10^{-6}. 124
7.7 Diminution des résidus relatifs du GMRES(50) du problème d'interface des 3 MDD (primale, duale et mixte) préconditionnées appliquées à un problème elliptique pour une partition "quadrillée" de Ω en 16 sous-domaines. 125

8.1 Comparatif de la diminution des résidus relatifs de la MDD mixte appliquée au problème de Stokes sans préconditionnment, avec un préconditionneur complet et avec un préconditionneur allégé pour une largeur de bande de longueur $3 \times h$, avec un pas de maillage $h = 1/60$. 133
8.2 Comparatif de la diminution des résidus relatifs du GMRES(50) du problème d'interface entre la MDD mixte et la méthode FETI-DP préconditionnées pour une partition "quadrillée" de Ω en 16 sous-domaines pour différents pas de maillage. 135

Liste des tableaux

3.1 Différents choix de maillages utilisés pour chaque MEF. 45
3.2 Erreurs relatives pour le cast-test de Bercovier-Engelman. 46
3.3 Erreurs relatives pour le deuxième cas-test. 48
3.4 Erreurs relatives pour le troisième cas-test. 50

6.1 Erreurs relatives de la vitesse et de la pression obtenues avec le schéma EF $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$ sans utilisation de MDD pour le cas-test de Bercovier-Engelman. . 101
6.2 Plus petite, plus grande valeur propre et nombre de conditionnement de la matrice d'itération de la méthode de relaxation. 103
6.3 Avantage de la MDD mixte sur la méthode FETI-DP, non-préconditionnées, appliquées au système de Stokes pour un partitionnement de Ω en 9 sous-domaines avec le solveur itératif GMRES(50). L'approximation par EF est de type $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$. 108

8.1 Nombre de ddl pour différents pas de maillage. 132
8.2 Nombre de ddl associés à différentes largeurs de bande à prendre en considération lors du calcul des préconditionneurs allégés pour différents pas de maillage. 132
8.3 Nombre de ddl résultant d'une approximation par le schéma d'EF de Taylor-Hood (2) pour le système de Stokes pour différents pas de maillage. 133
8.4 Réduction spectaculaire du nombre d'itérations de la méthode FETI-DP avec préconditionneur de Dirichlet. 134
8.5 Convergence de la méthode FETI-DP et de la MDD mixte avec et sans préconditionnement pour différents pas de maillage. 134

Introduction

La simulation numérique permet d'aborder de plus en plus de problèmes mais elle est souvent bridée par des contraintes d'ordre informatique, qui ne permettent pas de répondre correctement aux exigences des ingénieurs, qui sont principalement une bonne qualité numérique des résultats et un temps de résidence faible (occupation de la machine). En effet, l'ingénierie fait de plus en plus appel à la simulation de phénomènes physiques (écoulement, calcul de structure, ...) où de nombreuses études sont nécessaires avant de figer le projet final. L'ingénieur doit pourvoir effectuer de nombreux tests dans des délais réduits. Le coût de calcul devient un facteur prépondérant.

Numériquement, la **méthode des éléments finis** (MEF) permet d'envisager l'analyse des problèmes résultant d'équations aux dérivées partielles complexes modélisant ces phénomènes physiques, mais elle engendre des systèmes d'équations à plusieurs milliers (voire centaines de milliers) d'inconnues difficilement résolubles sur une machine séquentielle (station de travail). Cependant, le développement ces dernières décennies des méthodes de calcul et l'évolution de leur supports a permis de gérer de façon efficace les contraintes liées au stockage de ces systèmes linéaires et au temps de calcul relatif à leur résolution. En effet, l'avènement des architectures parallèles pour les calculateurs scientifiques et industriels a donné naissance à de nouvelles méthodes et à la notion de **calcul parallèle**.

L'idée est de générer un code de calcul permettant de répartir le stockage des matrices de rigidité et les calculs inhérents à leur résolution sur plusieurs processeurs avec si possible un faible échange de données entre ces processeurs. La **méthode de décomposition de domaine** (MDD) sans recouvrement rentre parfaitement dans le cadre de cette logique. Elle consiste à partitioner le domaine géométrique Ω en plusieurs sous-domaines et à réduire le problème global à une résolution par un solveur itératif de Krylov d'un problème posé

sur l'interface entre sous-domaines voisins. Sur chaque sous-domaine un solveur direct est utilisé et les calculs doivent pouvoir être réalisés en parallèle avec bien sûr un échange des données entre processeurs de la taille du problème posé sur l'interface.

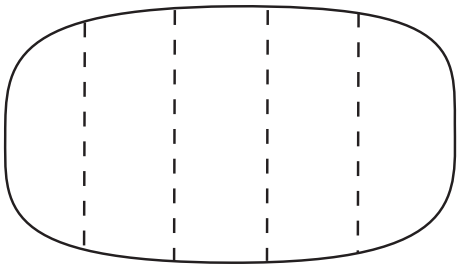
Cependant, les MDD proposées devront répondre à un double impératif, qui est l'**extensibilité** (" scalability" en anglais) numérique et parallèle. En d'autres termes, celles-ci doivent conserver les mêmes propriétés (convergence,...), quelque soit la taille du problème traité et le nombre de processeurs utilisés (i.e. le nombre de sous-domaines considérés). Les performances doivent s'améliorer au moins linéairement en fonction du nombre de sous-domaines. De ce fait, des méthodes de préconditionnement pour le problème condensé à l'interface seront nécessaires pour répondre à cette contrainte d'extensibilité. Le préconditionneur devra être calculé lui aussi, de façon parfaitement parrallèlisable.

0.1 Objectifs, état de l'art et motivation

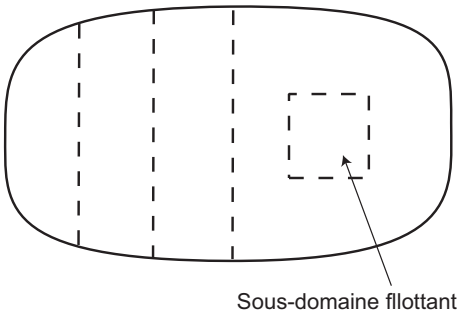
L'objectif de ce mémoire est de construire une méthode de décomposition de domaine (MDD) sans-recouvrement pour résoudre le système d'écoulement de Stokes résultant d'une discrétisation par une méthode d'éléments finis mixtes. L'approche préconisée est semblable à celle initiée par Després dans [19] et adaptée à ce contexte dans [2, 3, 7, 8].

De nombreux travaux ont été consacrés à la MDD pour les problèmes de point-selle en général et pour le problème de Stokes en particulier. Ils sont basés soit sur des partitions avec recouvrement [35, 55] soit sur des méthodes sans-recouvrement. Pour ces dernières on citera par exemples les travaux de Otto et al. [49, 50, 42], ceux de Chacon-Rebollo & Chacon-Vera [14, 15] et de Quarteroni [48, 20] où le problème de Stokes a été traité par une MDD **mixte**. Pour une approche **primale** de la MDD appliquée au problème de Stokes on citera les travaux de Le Tallec & Patra [39] et ceux de Ainsworth & Sherwin [1]. Enfin pour une MDD **duale** on référera par exemple aux travaux de [12]. Toutefois, dans toutes ces références, aucune attention particulière n'a été accordée à un partitionnement du domaine géométrique Ω comportant des **point-multiples** (i.e. les "coins" partagés par plusieurs sous-domaines, voir figure 0.1).

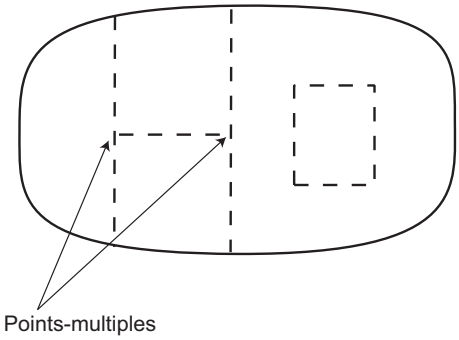
En effet, souvent l'utilisation d'une partition de plus de 2 sous-domaines conduit (sauf



(a) Décomposition en bandes.



(b) Décomposition ne comportant pas de
point-multiple avec un sous-domaine flottant.



(c) Décomposition comportant des point-multiples
et un sous-domaine flottant.

FIGURE 1 – Différentes façons de partitionner Ω en 5 sous-domaines, plus la longueur de l'interface globale et la distance maximale entre sous-domaines non-voisins sont petites plus la MDD est performante.

par exemple dans le cas d'une décomposition dite en "bandes") à l'apparition de point-multiples. En optant pour un choix d'une partition par bandes de Ω, afin d'éviter la présence de point-multiples dans cette partition, on influe négativement sur les performances des méthodes de décomposition de domaine et cela pour deux raisons :

- étant donné la nature des opérateurs d'interface (assemblage de contributions locales), l'information transite d'un sous-domaine à son voisin. Or la vitesse à laquelle l'influence d'un effort appliqué en un point d'un sous-domaine peut se propager dans tout le domaine est fortement liée au **nombre minimal d'interfaces à franchir** pour passer d'un sous-domaine à un autre. Plus le nombre d'interfaces à franchir est minimal meilleure est la propagation de l'information dans tout le domaine.
- étant donné que l'on résout un problème posé sur l'interface, le gain est d'autant plus important que l'interface est petite devant la taille des sous-domaines. Aussi, sachant que le problème condensé est résolu par un solveur itératif, il faut autant que possible que la décomposition confère de bonnes propriétés spectrales au problème. Dans [29], il est montré que les sous-structures élancées conduisent à des opérateurs locaux mal-conditionnés ce qui se traduit par une mauvaise contribution à l'opérateur condensé. Un bon "décomposeur" s'attache donc à conserver aux sous-structures des allures massives (bon aspect ratio).

Pour illustrer l'inconvénient d'une partition par bandes, dans la figure 2, on présente un comparatif du nombre d'itérations nécessaire au solveur itératif de Krylov pour résoudre le problème condensé à l'interface. On utilisera une MDD de type FETI [21] appliquée à un problème elliptique dans un premier temp, pour une partition dite par bandes et dans un deuxième temp, pour une partition comportant des point-multiples. Un nombre de sous-domaines et un maillage identiques seront utilisés dans les deux cas. La figure 2 montre que le nombre d'itérations nécessaire à la convergence de la méthode croît de manière significative pour une partition de Ω en bandes lorsque l'on augmente le nombre de sous-domaines. Par contre, pour une partition quadrillée le nombre d'itérations nécessaire à la convergence du solveur est nettement en dessous de celui résultant d'une partition en bandes et, de plus, reste peu sensible à l'augmentation du nombre de sous-domaines.

Plus récemment, des MDD appliquées au système de Stokes pour des décompositions

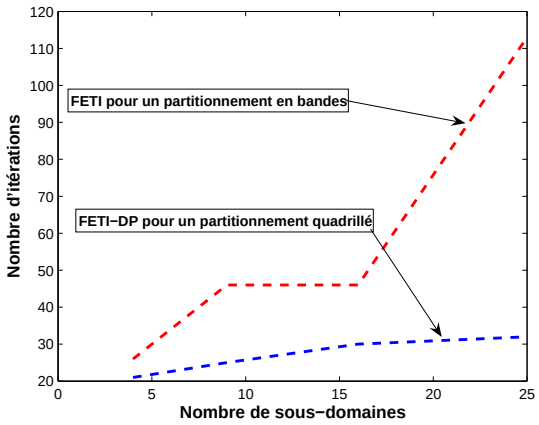


FIGURE 2 – Avantage de l'utilisation d'un partitionnement du domaine géométrique comportant des point-multiples sur celui dit en bandes, pour une méthode FETI sans préconditionnement appliquée à un problème elliptique pour un maillage identique dans les deux partitions.

du domaine comportant des point- multiples ont été développées. On citera dans ce sens les travaux de Vereecke, Bavestrello & Dureisseix (pour les problèmes quasi-incompressible et incompressible) [66], Li [40] et Kim & Lee [33, 34] où une approche de type FETI-DP [23] a été utilisée. Aussi, dans [51] où l'approche primale a été privilégiée, une MDD pour des décompositions présentant des point-multiples a été développée pour le système de Stokes. Cependant, à notre connaissance, dans tous ces travaux, seules des **approximations par éléments finis discontinues de la pression** ont été considérées ou bien, comme dans Calgaro [12], l'approximation de la pression est supposée être discontinue à travers les interfaces des sous-domaines.

Nous montrerons numériquement dans le chapitre 3 de ce mémoire, l'efficacité des Schémas d'approximation d'éléments finis continus pour la pression de type Taylor-Hood [26] pour les systèmes de Stokes et leur avantage certain par rapport aux schémas discontinus de la pression. Cela justifie l'intérêt de développer des MDD pour ce type d'approximation pour le problème de Stokes et qui étonnamment n'existaient pas dans la littérature auparavant.

Partant des constatations faites précédemment, notre objectif dans ce mémoire sera

double : développer une méthode de décomposition de domaine sans-recouvrement pour résoudre le système de Stokes discret résultant d'une approximation par un **méthode d'éléments finis continue pour la pression** et qui soit en même temps applicable a une décomposition géométrique quelconque même celle **comportant des point-multiples** et **possédant des sous-domaines dits "flottants"** (i.e. sous-domaines dont la frontière est strictement contenue à l'intérieur du domaine Ω).

Une grande attention sera accordée à la propriété de stabilité de la méthode. Notamment, un contrôle strict sera effectué au niveau de la résolution des problèmes locaux et celle du problème associé aux degrés de liberté attachés aux point-multiples. En particulier, une majoration des résultats en termes des données sera soigneusement vérifiée en utilisant des normes appropriées. Ceci comble à notre avis une carence des méthodes FETI-DP appliquées au système de Stokes [66, 40, 33, 34], où l'existence et l'unicité de la solution aux problèmes locaux sont assurées à partir d'un argument purement algébrique.

Aussi, dans la méthode de décomposition de domaine mixte développée dans ce mémoire, les conditions de raccord des traces de la solution et de la dérivée normale du tenseur des contraintes sont exprimées en termes de deux conditions de raccord à l'aide d'un nouveau multiplicateur noté Φ dans la suite. Ceci a pour avantage d'assurer, de façon naturelle, que les problèmes locaux relatifs aux sous-domaines flottants ne soient pas singuliers et cela sans avoir à imposer comme dans les méthodes FETI-DP la contrainte locale de moyenne nulle de la pression. La continuité de la pression discrète au niveau des interfaces se fera à l'aide d'un multiplicateur que l'on notera ψ. Enfin, il est généralement difficile de faire face à l'inconnue et à l'équation supplémentaires résultant de la contrainte globale de moyenne nulle relative à la pression (voir par exemple [32]). Dans la MDD développée dans ce mémoire, l'inconnue supplémentaire et l'équation seront traitées comme celles correspondantes correspondant à un point-multiple. De cette façon, cette contrainte peut être manipulée de manière simple et naturelle.

0.2 Plan du manuscrit de la thèse

La suite de ce texte est organisée en trois parties. Dans la première, comprenant trois chapitres, on présentera la formulation physique (**chapitre 1**) et mathématique (**chapitre 2**) du système d'écoulement de Stokes stationnaire et on passera en revue (**chapitre 3**) les différents schémas de discrétisation inhérentes par des méthodes d'éléments finis à pression continue ou discontinue. La mise en oeuvre numériques de ces schémas d'éléments finis sera testée sur trois cas-tests du problème de Stokes, où on fera ressortir l'efficacité, en termes d'erreurs relatives et à nombre d'inconnues identique, du schèma de Taylor-Hood [26] pour une approximation continue de la pression et celui de Scoot-Vogelius [31] pour une approximation discontinue de la pression par rapport aux autres méthodes d'éléments finis. On montrera cependant l'instabilité du schéma de Scott-Vogelius en présence de "points singuliers" définis au sens de [31] dans le maillage. Ceci justifie l'intérêt de cette étude à savoir développer une méthode de décomposition de domaine appliquée au système discret de Stokes résultant de l'utilisation du schéma d'éléments finis de Taylor-Hood.

Dans la deuxième partie, le **chapitre 4** sera consacré à la présentation des méthodes de décomposition de domaines sans recouvrement appliquées à un problème elliptique dans leurs aspects continu et discret. On classera dans notre exposé ces méthodes en trois catégories : méthodes de **complément de Schur primales**, méthodes de **complément de Schur duales (FETI)** et méthodes **mixtes**. Ces méthodes décomposent le domaine d'étude en plusieurs sous-domaines réduisant par un procédé de condensation la résolution à l'interface des sous-domaines où l'inconnue à déterminer sera respectivement la valeur du champ de déplacement, du vecteur contrainte ou une combinaison des deux. Cette inconnue auxiliaire est "ajustée" alors itérativement de manière à obtenir respectivement la continuité du vecteur contrainte, du champ de déplacement ou des deux, le long de l'interface. Dès lors, la résolution du problème initial posé sur le domaine se ramène à :

- des problèmes indépendants sur chaque sous-domaine,
- un problème d'interface.

Sur les sous-domaines les problèmes sont de tailles réduites par rapport au problème initial, donc moins coûteux à résoudre par un méthode directe et leur résolution se fera de manière parfaitement parallèle. Dû au fait que la matrice de rigidité résultant du problème d'interface sera pleine (car il y a une forte interactivité des degrés de liberté (ddl)

d'interface avec les ddl intérieurs des sous-domaines), la résolution se fera à l'aide d'un solveur itératif de type Krylov où le seul impératif à connaître est le produit matrice-vecteur.

Toujours au chapitre 4, on abordera la question de présence de point-multiples dans la décomposition du domaine et la difficulté d'écriture des conditions de raccords au niveau de ces points dans le cas continu et les redondances qu'elle engendre dans la cas discret. On présentera, comme solution à ce problème, la méthode FETI-DP initiée par [23], qui est une méthode de décomposition de domaine duale à la base où le raccord des déplacements est maintenu au niveau des points-multiples et où les inconnues rattachées à ces points seront éliminées du problème posé sur l'interface par un deuxième procédé de condensation. Enfin, quelques test numériques seront présentés pour illustrer l'efficacité des quatre MDD.

Le **chapitre 5** sera dédié à la construction d'une méthode de décomposition mixte appliquée au système de Stokes discret pour une partition du domaine géométrique comportant des point-multiples. L'idée, comme dans les méthodes FETI-DP, est de maintenir un raccord discret fort au niveau des point-multiples. Bien que dans la présentation on considère un schéma général d'éléments finis à pression continue, tous les résultats de stabilité et de convergence démontrés restent valables pour un schéma d'éléments finis à pression discontinue. Cette partie de la thèse a fait l'objet d'une publication [4].

Au cours du **chapitre 6**, différents tests permettront d'évaluer le comportement de la MDD mixte développée pour une discrétisation par une méthode d'éléments finis de type Taylor-Hood. Sur le cas-tests de Bercovier-Engelman [5], on évaluera l'influence de différents paramètres, tels le pas de discrétisation et le nombre de sous-domaines sur le solveur utilisé pour résoudre le problème condensé à l'interface. En outre, un comparatif avec une méthode FETI-DP adaptée au problème de Stokes est dressé.

Dans la dernière partie de ce mémoire, on présentera dans le **Chapitre 7** les différentes techniques de préconditionnement des MDD présentées au chapitre 4 pour un problème elliptique. La façon de calculer les préconditionneurs de Neumann-Neumann et celui de Dirichlet relatifs respectivement à la méthode primale et duale, qui devra être parallélisale. On donnera aussi la manière de calculer le préconditionneur des MDD mixtes et on soulignera le fait qu'il n'est pas parallèlisable. Dans la perspective de rendre le

calcul du préconditionneur parralélisable on présentera le "**strip-preconditioner**" [52]. Différents tests montrerons l'efficacité de ces préconditionneurs. Toutefois, l'extensibilité numérique de ces méthodes n'est pas assurée. En effet, les performances se dégradent lorsque le nombre de sous-domaines augmente et on constate une inflation du nombre des itérations. Pour empêcher cela, il faut introduire un moyen de propager l'information à l'ensemble des sous-domaines. Ceci se fera en maintenant un raccord fort au niveau des point-multiples. On constatera alors, une quasi-indépendance du nombre d'itérations pour résoudre le problème d'interface par rapport au nombre de sous-domaines utilisé.

Enfin au **chapitre 8**, on présentera une adaptation au système de Stokes des techniques de préconditionnement développées pour un problème elliptique que l'on validera par différents tests numériques.

Chapitre 1

Modèle physique

1.1 Equations de Navier-Stokes

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n\,(n \leq 3)$ un domaine représentant une région de l'espace. Le domaine sera toujours supposé borné et régulier. La dynamique d'un fluide newtonien comme l'eau, l'huile, l'air, etc dans Ω peut être décrite par les équations de Navier-Stokes où les inconnues sont la vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, la densité $\rho(\mathbf{x},t)$ et la pression $p(\mathbf{x},t)$ du fluide au point $\mathbf{x} = (x_1,\cdots,x_n)$ et à l'instant t. La vitesse est une fonction vectorielle $\mathbf{u} = (u_1,\cdots,u_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $u_i = u_i(x_1,\cdots,x_n,t)$ et la pression p est une fonction scalaire. Les équations de Navier-Stokes sont :

$$\begin{aligned} \rho\partial_t\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} + \rho\,(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \partial_t\rho + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

où $\mu > 0$ désigne la **viscosité dynamique** du fluide et $\mathbf{f} = (f_1,\cdots,f_n)$ représente une densité massique de forces extérieures (la gravité par exemple).
Les différents opérateurs différentiels intervenant dans les équations de Navier-Stokes : gradient, divergence et laplacien, notés respectivement ∇, $\nabla\cdot$ et Δ, sont définis de la façon suivante :

$$\nabla p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad , \quad \nabla\cdot\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad , \quad \Delta\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x_i^2} \tag{1.2}$$

respectivement et où la notation $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u}$ est donnée par :

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} = \begin{bmatrix} (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \tag{1.3}$$

Aux équations de Navier-Stokes (1.1), on ajoute une condition aux limites et une condition initiale émanants de données physiques typiques au problème traité. Souvent, une condition aux limites de type Dirichlet sur le bord est utilisée, c'est-à-dire :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \forall x \in \partial\Omega, \forall t > 0. \tag{1.4}$$

Dans la plupart des cas, apparait la condition de non-glissement $\mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega$. La condition initiale est de la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \forall x \in \Omega. \tag{1.5}$$

La première équation dans (1.1) est connue comme étant l'équation des moments et la deuxième comme étant l'équation de continuité ou bien de conservation des masses qui traduit la contrainte d'**incompressibilité** du fluide. Le terme $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u}$ représente le terme de transport, nommé aussi terme de **convection** ; quand à $\mu\Delta\mathbf{u}$ c'est le terme relatif à la **diffusion**. Ce dernier étant dû à l'existence des interactions au niveau moléculaire entre les particules et se traduisant par une dissipation d'énergie.

Dans la plupart des cas, la viscosité dynamique μ est constante. Sa valeur influe grandement sur le comportement de l'écoulement ainsi que sur la difficulté d'obtenir des solutions approchées modélisant cet écoulement. Des fluides assez gras, comme le miel par exemple, ont de grandes valeurs de μ. Et l'écoulement dans ce cas est simple et ordonné. Pour des fluides à faible viscosité par contre, les écoulements respectifs sont alors sujets à des turbulences.

Une simplification des équations de Navier-Stokes se produit lorsque l'on suppose que l'écoulement du problème considéré est **stationnaire**. Par exemple, pour l'écoulement d'un robinet dans un bidon rempli, l'eau s'écoule en dehors aussi rapidement qu'à l'intérieur du seau : la forme de l'écoulement est la même indépendamment du temps. Dans ces cas là, on assumera que les quantités $\mathbf{u}$, ρ et p sont indépendantes du temps et cela nous donnera les

équations de Navier-Stokes stationnaires suivantes :

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\mathbf{u} + \rho\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Tout fluide possède des variations dans sa densité. Cependant, dans beaucoup de cas ces variations sont si petites et si négligeables que l'on peut considérer la densité $\rho > 0$ comme étant constante et on écrit alors souvent les équations de Navier-Stokes à l'aide de la **viscosité cinématique**, donnée par :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \tag{1.7}$$

Elle permet de caractériser le fluide étudié, par exemple, on a $\nu = 0.15 \times 10^{-4} m/s$ pour l'air et $\nu = 10^{-6} m/s$ pour l'eau.

Lorsque l'on travaille dans une portion d'espace allongée, on peut utiliser un modèle bi-dimensionnel posé sur la section. L'écriture scalaire des équations de Navier-Stokes stationnaires incompressibles devient alors :

$$\begin{aligned} -\nu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right) + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} &= \frac{1}{\rho}f_1, \\ -\nu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) + u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2} &= \frac{1}{\rho}f_2, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Notons enfin, que la réponse du fluide aux forces extérieures dépend de deux phénomènes de nature différente :

- l'effet d'entraînement du fluide par son propre mouvement, c'est l'effet d'inertie,
- la friction entre les éléments de fluide voisins qui se déplacent à des vitesses différentes.

Deux facteurs importants sont à l'origine de ces deux phénomènes. Le premier est la viscosité cinématique ν dont dépend le fait que le fluide suit un mouvement régulier, dit aussi **laminaire**, à diffusion dominante (pour de grandes valeurs de ν) ou bien qu'il suit un mouvement **turbulent** à moments dominants (pour de petites valeurs de ν).
Le deuxième facteur est la vitesse de déplacement du fluide, en effet pour des valeurs fixes de ν, des turbulences peuvent apparaître dans l'écoulement du fluide si on impose par exemple de grandes valeurs à la vitesses sur les frontières du domaine étudié, l'équation

du moment va faire en sorte que ces grandes vitesses vont essayer de se propager à l'intérieur du domaine et elle seront contrées par la viscosité du fluide. Cela engendrera alors des turbulences dans l'écoulement.

L'importance relative de ces deux facteurs nous amène à définir un paramètre de contrôle appelé **nombre de Reynolds**, que l'on définit dans le cas adimensionnel, pour une longueur caractéristique L et une vitesse caractéristique U dans le domaine d'écoulement, par :

$$Re = \frac{UL}{\nu}. \tag{1.9}$$

Les équations de Navier-Stokes stationnaires (1.6) s'écriront alors :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{Re}\Delta\tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\,\tilde{\mathbf{u}} + \nabla\tilde{p} &= \tilde{\mathbf{f}}, \\ \nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}} &= 0, \end{aligned} \tag{1.10}$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}},t) = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{U}, \quad \tilde{p}(\tilde{\mathbf{x}},t) = \frac{p(\mathbf{x},t)}{\rho U^2}. \tag{1.11}$$

Les (nouveaux) opérateurs différentiels ∇ et Δ ci-dessus sont relatifs à la (nouvelle) variable $\tilde{\mathbf{x}}$ et $\tilde{\mathbf{f}} = \dfrac{L}{\rho U^2}\mathbf{f}$.

Le nombre de Reynolds caractérise le type d'écoulement étudié. Mathématiquement, il prend en compte le terme de viscosité du laplacien de la vitesse. Physiquement, le nombre de Reynolds Re permet de donner une idée sur le comportement de l'écoulement d'un fluide indépendamment de la dimension du problème. L'on notera alors, que plus Re croît, plus le fluide se trouve dans un état où il s'écoule rapidement et où la viscosité n'est pas suffisamment importante pour éliminer ou même diminuer les variations spatiales de la vitesse. On dit dans ce cas que le fluide est dans un régime turbulent.
Par contre, si Re décroît les effets de viscosité dominent et le fluide tend rapidement vers un mouvement très régulier. Là on aura un régime laminaire.
Dans l'expérimentation, un écoulement avec Re de l'ordre de 1 à 1000 est généralement régulier ; il sera turbulent pour des valeurs de Re supérieures à 100 000.

1.2 Equations de Stokes

Les équations de Navier-Stokes se réduisent aux équations de Stokes ou d'Euler selon que le nombre de Reynolds Re est petit ou grand. Ainsi pour :

Pour $\underline{Re << 1}$, les effets dus à la viscosité sont dominants par rapport aux effets d'inerties d'écoulement du fluide. Le terme de convection non-linéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u}$ devenant négligeable, les équations de Navier-Stokes (1.6) se réduisent aux équations de Stokes stationnaires :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{Re}\Delta\tilde{\mathbf{u}} + \nabla\tilde{p} &= \tilde{\mathbf{f}}, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Pour $\underline{Re >> 1}$, le terme de convection non-linéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u}$ est dominant et c'est le terme de diffusion qui est négligé donnant lieu aux équations d'Euler suivantes :

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\,\tilde{\mathbf{u}} + \nabla\tilde{p} &= \tilde{\mathbf{f}}, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= 0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Les principales difficultés pour étudier et résoudre les équations de Navier-Stokes (1.6) sont d'une part le couplage vitesse/pression et d'autre part la présence du terme de convection non-linéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u}$. D'un point de vue numérique, la résolution des équations de Navier-Stokes utilisera dans de nombreuses méthodes la résolution intermédiaire de problèmes de Stokes. Le problème de Stokes reste un problème couplé vitesse/pression mais a l'avantage d'être **linéaire**. Dans les chapitres suivants, on va étudier le problème de Stokes avec des conditions aux limites de type Dirichlet suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{Re}\Delta\tilde{\mathbf{u}} + \nabla\tilde{p} &= \tilde{\mathbf{f}}, \quad \text{sur } \Omega, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= 0, \quad \text{sur } \Omega, \\ \tilde{\mathbf{u}} &= 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \right. \tag{1.14}$$

plus communément écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \quad \text{sur } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \quad \text{sur } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \right. \tag{1.15}$$

Chapitre 2

Formulation variationnelle mixte du système de Stokes

Dans ce chapitre, on rappellera brièvement la formulation variationnelle du système de Stokes (1.15) et la condition inf-sup continue, dite aussi condition de Babuska-Brezzi, nécessaire pour assurer l'existance et l'unicité de la solution pour ce type de problème dit problème de point-selle. Le contenu de chapitre a été traité de manière beaucoup plus détaillée dans plusieurs ouvrages auparavant [26, 11].

2.1 Quelques rappels

Soit Ω un ouvert borné à frontière lipschitizienne de $\mathbb{R}^n, (n \leq 3)$. L'espace $L^2(\Omega)$ représente l'ensemble des fonctions à valeurs réelles mesurables u pour lesquelles :

$$\|u\|_{0,\Omega} = \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty. \tag{2.1}$$

On note $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω. Pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ donné, avec $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, on définit la dérivée d'ordre α de la fonction u par :

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}. \tag{2.2}$$

L'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, i.e. l'espace des formes linéaires $\mathcal{D}(\Omega)$ qui sont continues par rapport à la pseudo-topologie définie sur cet espace.

On peut associer à toute fonction $u \in L^2(\Omega)$ une distribution, que l'on note aussi u, définie par :

$$\langle u, \phi \rangle = \int_\Omega u\phi \, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{2.3}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le crochet de dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$.
Pour un multi-indice α et une distribution u, on définit sa dérivée $D^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par :

$$\langle D^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.4}$$

On dira alors que la dérivée d'ordre α d'une distribution u appartient à $L^2(\Omega)$, s'il existe une fonction $u_\alpha \in L^2(\Omega)$ telle que :

$$\langle D^\alpha u, \phi \rangle = \int_\Omega u_\alpha \phi \, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.5}$$

L'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ sera alors défini, pour tout entier $k \geq 1$, par :

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \quad D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad \forall |\alpha| \leq k\}. \tag{2.6}$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé à la norme :

$$\|u\|^2_{1,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx. \tag{2.7}$$

On définit une semi-norme sur cet espace par :

$$|u|^2_{1,\Omega} = \sum_{|\alpha| = k} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx. \tag{2.8}$$

Pour $k = 1$, on peut écrire :

$$\|u\|^2_{1,\Omega} = \|u\|^2_{0,\Omega} + |u|^2_{1,\Omega} = \|u\|^2_{0,\Omega} + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \tag{2.9}$$

On rappellera que l'espace $H^1_0(\Omega)$ désigne les sous-espace de $H^1(\Omega)$ des fonctions qui s'annulent sur la frontière $\partial\Omega$.

On désigne par la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction $u \in H^1(\Omega)$ la valeur de sa restriction sur $\partial\Omega$. L'ensemble de ses restrictions est noté $H^{1/2}(\partial\Omega)$. De la même manière on définit de manière générale $H^{1/2}(\Gamma)$ l'espace des traces sur une partie $\Gamma \subset \partial\Omega$; la norme et la semi-norme correspondantes sont donnés par :

$$|u|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} = \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^n} dx dy, \tag{2.10}$$

et :

$$\|u\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} = |u|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|u\|^2_{0,\Gamma}. \tag{2.11}$$

L'extension par zéro d'une fonction $u \in H^{1/2}(\Gamma)$ sur $\partial\Omega$, notée $\tilde{u}$, n'appartenant pas forcément à $H^{1/2}(\partial\Omega)$; on a la définition du sous espace $H^{1/2}_{00}(\Gamma)$ suivante :

$$H^{1/2}_{00}(\Gamma) = \left\{ u \in H^{1/2}(\Gamma) / \quad \tilde{u} \in H^{1/2}(\partial\Omega) \right\}, \tag{2.12}$$

dont la norme est définie par :

$$\|u\|^2_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)} = |u|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \int_\Gamma \frac{u^2(x)}{d(x,\partial\Gamma)} dx, \tag{2.13}$$

où $d(x,\partial\Gamma)$ est la distance entre x et la frontière $\partial\Gamma$.

On rappelle aussi le lemme utile de Friedrichs-Poincaré :

Lemme 2.1.1 (Inégalité de Friedrichs-Poincaré)**.** *Soit $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ de mesure non nulle. Alors, il existe des constantes qui ne dépendent que de Γ et Ω, telles que pour $u \in H^1(\Omega)$ on a :*

$$\|u\|^2_{0,\Omega} \leq C_1 \, |u|^2_{1,\Omega} + C_2 \, \|u\|^2_{0,\Gamma}. \tag{2.14}$$

En particulier, pour u nulle sur Γ, on a $\|u\|^2_{0,\Omega} \leq C_1 \, |u|^2_{1,\Omega}$, et par la suite

$$|u|^2_{1,\Omega} \leq \|u\|^2_{1,\Omega} \leq (C_1 + 1) \, |u|^2_{1,\Omega}. \tag{2.15}$$

On définit par la suite l'espace $H(div;\Omega)$:

$$H(div;\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in \left(L^2(\Omega)\right)^n / \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \right\},$$

espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{div;\Omega} = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{u} \, \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx.$$

On notera que pour un vecteur $\mathbf{u} \in H(div;\Omega)$, il est possible, comme le montre le lemme suivant, de définir sa composante normale $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ sur la frontière $\partial\Omega$.

Lemme 2.1.2. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n, n = 2,3$ à frontière lipschitizienne. Alors, il existe un opérateur continu $\gamma_n : H(div;\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$ tel que :*

$$\gamma_n \boldsymbol{u} = \text{ la restriction de } \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \text{ sur } \partial\Omega, \; \forall \boldsymbol{u} \in \left(H(div;\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})\right)^n.$$

De plus, il existe un opérateur $\mathcal{R}_n : H^{-1/2}(\partial\Omega) \to H(div;\Omega)$*, tel que :*

$$\gamma_n\left(\mathcal{R}_n\phi\right) = \phi,\ \phi \in H^{-1/2}(\partial\Omega) \tag{2.16}$$

Enfin, pour $\boldsymbol{u} \in H(div;\Omega)$ *et* $v \in H^1(\Omega)$ *la formule de Green est donnée par :*

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\nabla v\,dx + \int_\Omega v\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}\,dx = \langle \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,, v\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega),H^{1/2}(\partial\Omega)}. \tag{2.17}$$

En définissant le sous-espace fermé de $V \subset \left(H_0^1(\Omega)\right)^n$:

$$V = \left\{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n;\quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0\right\}, \tag{2.18}$$

on a la décomposition :

$$H_0^1(\Omega)^n = V \oplus V^\perp, \tag{2.19}$$

où $V^\perp$ est l'orthogonal de V dans $H_0^1(\Omega)^n$, pour le produit scalaire associé à la semi-norme $|\cdot|_{1,\Omega}$. On alors la propriété importante suivante (voir, par exemple, [26]) :

Proposition 2.1.1. *Soit* $\boldsymbol{f} \in H^{-1}(\Omega)$ *tel que :* $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle = 0,\ \forall \boldsymbol{v} \in V$*. Alors il existe* $p \in L^2(\Omega)$ *tel que :*

$$\boldsymbol{f} = \nabla p. \tag{2.20}$$

Pour Ω *connexe,* p *est unique à une constante additive près.*

En remarquant que :

$$\int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{v}\,dx = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n, \tag{2.21}$$

on déduit que l'image de l'espace $\left(H_0^1(\Omega)\right)^n$ par l'opérateur div est le sous espace, noté $L_0^2(\Omega)$, des fonctions de $L^2(\Omega)$ à moyenne nulle, i.e.

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega)/\int_\Omega q(x)dx = 0 \right\}. \tag{2.22}$$

Aussi en notant que :

$$\|q\|_{0,\Omega} = \inf_{c\in\mathbb{R}} \|q - c\|_{0,\Omega} = \|\dot{q}\|_{L_0^2(\Omega)/\mathbb{R}},\quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \tag{2.23}$$

on peut identifier $L_0^2(\Omega)$ isométriquement à $L_0^2(\Omega)/\mathbb{R}$. Le corollaire suivant permet alors d'assurer que l'image de l'opérateur div est exactement $L_0^2(\Omega)$.

Corollaire 2.1.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ connexe à frontière lipschitzienne. Alors*

1. *L'opérateur ∇ est un isomorphisme de $L^2_0(\Omega)$ vers V^0,*
2. *L'opérateur div est un isomorphisme de $V^\perp$ vers $L^2_0(\Omega)$.*

où les sous espaces V^0 et $V^\perp$ sont définis par les relations :

$$V^0 = \{\phi \in H^{-1}(\Omega)/\langle \phi, v\rangle = 0, \forall v \in V\}, \tag{2.24}$$

$$V^\perp = \{(-\Delta)^{-1}\nabla q/q \in L^2(\Omega)\}, \tag{2.25}$$

où : $(-\Delta)^{-1} \in \mathcal{L}\left(H^{-1}(\Omega)^n, H^1_0(\Omega)^n\right)$ représente l'opérateur de Green relatif au problème de Dirichlet de $-\Delta$ (voir [26]).

2.2 Formulation mixte du système de Stokes

On va établir une formulation variationnelle mixte du système de Stokes (1.15). Pour cela, on multiplie la première équation de (1.15) par une fonction test **v** qui s'annule sur le bord du domaine $\partial\Omega$ et on intègre sur Ω :

$$-\nu \int_\Omega \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\, dx + \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v}\, dx = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx. \tag{2.26}$$

En utilisant la formule de Green et en intégrant par parties le terme de pression on obtient :

$$\nu \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}\, dx - \int_\Omega p \nabla \cdot \mathbf{v}\, dx = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} - p\mathbf{n}\right) \cdot \mathbf{v} d\sigma, \tag{2.27}$$

où **n** désigne le vecteur normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur.
En tenant compte du fait que la fonction test **v** s'annule sur le bord du domaine, on obtient :

$$\nu \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}\, dx + \int_\Omega p \nabla \cdot \mathbf{v}\, dx = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx. \tag{2.28}$$

On introduit alors les formes bilinéaires suivantes :

$$\begin{gathered} a : \left(H^1_0(\Omega)\right)^n \times \left(H^1_0(\Omega)\right)^n \to \mathbb{R} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}\, dx = \nu \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx, \end{gathered} \tag{2.29}$$

$$\begin{gathered} b : \left(H^1_0(\Omega)\right)^n \times L^2_0(\Omega) \to \mathbb{R} \\ b(\mathbf{v}, q) = \int_\Omega q \nabla \cdot \mathbf{v} dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega q \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\, dx, \end{gathered} \tag{2.30}$$

En utilisant l'espace de fonctions de $L^2(\Omega)$ à moyenne nulle introduit précédemment, la formulation variationnelle mixte du système de Stokes s'écrit :

Trouver $(\mathbf{u}, p) \in (H_0^1(\Omega))^n \times L_0^2(\Omega)$ tels que :

$$\begin{aligned} \nu \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \,:\, \nabla \mathbf{v}\, dx + \int_\Omega p \nabla \cdot \mathbf{v}\, dx &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx,\ \forall \mathbf{v} \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n, \\ \int_\Omega q \nabla \cdot \mathbf{u} dx &= 0,\ \forall q \in L_0^2(\Omega), \end{aligned} \tag{2.31}$$

que l'on peut écrire aussi en utilisant les notations (2.29) et (2.30) sous la forme :

Trouver $(\mathbf{u}, p) \in (H_0^1(\Omega))^n \times L_0^2(\Omega)$ tels que :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(p, \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}),\ \forall \mathbf{v} \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n, \\ b(q, \mathbf{u}) &= 0,\ \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Remarque 2.2.1.

- *Dans la deuxième équation de* (2.32)*, il est équivalent de prendre des fonctions test dans $L^2(\Omega)$ (c'est-à-dire non nécessairement à moyenne nulle). En effet, supposons que cette équation soit satisfaite. Pour $q \in L^2(\Omega)$, on note $\bar{q}$ sa valeur moyenne, i.e. $\bar{q} = \dfrac{1}{\Omega} \displaystyle\int_\Omega q dx$, on a alors :*

$$\int_\Omega q \nabla \cdot \boldsymbol{u} dx = \int_\Omega (q - \bar{q}) \nabla \cdot \boldsymbol{u} dx + \bar{q} \int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{u} dx \tag{2.33}$$

$$= \int_\Omega (q - \bar{q}) \nabla \cdot \boldsymbol{u} dx + \bar{q} \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} dx. \tag{2.34}$$

Or, $q - \bar{q} \in L_0^2(\Omega)$ et par conséquent pour $\boldsymbol{u} \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n$ on obtient :

$$\int_\Omega q \nabla \cdot \boldsymbol{u} dx = 0. \tag{2.35}$$

- *Il est important de chercher la pression p à moyenne nulle. En effet, si p vérifie la première équation du système de Stokes* (2.32)*, alors il en est de même pour $p + C$ où C est une constante quelconque. L'espace $L_0^2(\Omega)$ des fonctions à moyenne nulle, comme on le verra, assure l'unicité de la pression.*
- *Le terme "mixte" fait référence à la formulation vitesse/pression. Un autre cadre fonctionnel est possible. Soit $V = \{\boldsymbol{u} \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n / \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0,\ \text{sur } \Omega\}$. Une autre façon équivalente de déterminer la vitesse $\boldsymbol{u}$ dans le système* (2.32) *est de résoudre le problème suivant :*

  Trouver $\boldsymbol{u} \in V$ tel que :

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}), \forall \boldsymbol{v} \in V. \tag{2.36}$$

  Le lemme de Lax-Milgram, premet de conclure que le problème (2.36) *admet une unique solution (la forme $a(\cdot, \cdot)$ est coercive et continue sur V).*

2.3 Un résultat abstrait pour les problèmes mixtes

Soit X un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_X$ et de la norme $\|\cdot\|_X$. On considère une forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ continue sur $X \times X$, i.e. :

$$|a(u,\, v)| \leq \|a\|\|u\|_X\|v\|_X. \tag{2.37}$$

Cette forme bilinéaire définit un opérateur linéaire continu $A : X \to X'$ donné par

$$\langle Au, v\rangle_{X'\times X} = a(u,v), \quad \forall v \in X, \forall u \in X. \tag{2.38}$$

Soit M un autre espace de Hilbert, muni de la norme $\|\cdot\|_M$ et du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_M$. Et soit $b(v,q)$ une forme bilinéaire continue sur $X \times M$, i.e.

$$|b(v,\, q)| \leq \|b\|\|v\|_X\|q\|_M, \tag{2.39}$$

à laquelle on associe un opérateur linéaire continu $B : X \to M'$ et son transposé B^t : $M \to X'$, définis par :

$$\langle Bv, q\rangle_{M'\times M} = \left\langle v, B^t q\right\rangle_{M\times M'} = b(v,q), \quad \forall v \in X, \forall q \in M. \tag{2.40}$$

Considérons alors le problème mixte suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u,p) \in X \times M \text{ tels que} & \\ a(u,v) + b(v,p) = \langle f, v\rangle, & \forall v \in X, \\ b(u,q) = \langle g, q\rangle, & \forall q \in M. \end{cases} \tag{2.41}$$

pour tout $f \in X'$ et $g \in X'$ donnés.
Pour ce type de problème on a le résultat d'existence, d'unicité et de stabilité suivant (voir, par exemple, proposition 1.3 dans [11]) :

Théorème 2.3.1. *Sous les hypothèses suivantes :*

1. *la forme $a(\cdot,\cdot)$ est coercive sur le noyau de B i.e. :*
   il existe $\gamma_0 > 0$ tel que :

$$a(v,v) \geq \gamma_0\|v\|_X^2, \quad \forall v \in KerB, \tag{2.42}$$

2. *la forme $b(\cdot,\cdot)$ satisfait à la condition inf-sup, i.e. :*
   il existe $\beta_0 > 0$ tel que :

$$\sup_{v\in X} \frac{b(v,q)}{\|v\|_X} \geq \beta_0\|q\|_M, \quad \forall q \in M \tag{2.43}$$

le problème (2.41) *admet une unique solution* (u,p) *pour tout* $f \in X'$ *et pour* $g \in ImB$. *De plus on a les majorations suivantes :*

$$\|v\|_X \leq \frac{1}{\gamma_0}\|f\|_{X'} + \frac{1}{\beta_0}\left(1+\frac{\|a\|}{\gamma_0}\right)\|g\|_{Q'}, \tag{2.44}$$

$$\|p\|_M \leq \frac{1}{\beta_0}\left(1+\frac{\|a\|}{\gamma_0}\right)\|f\|_{X'} + \frac{\|a\|}{\beta_0^2}\left(1+\frac{\|a\|}{\gamma_0}\right)\|g\|_{M'}. \tag{2.45}$$

Remarque 2.3.1. *La deuxième hypothèse du théorème précédent implique :*

$$\inf_{\|q\|_M}\sup_{v\in X}\frac{b(v,q)}{\|v\|_X} \geq \beta_0. \tag{2.46}$$

2.4 Condition inf-sup pour le système de Stokes

On souhaite vérifier à présent les hypothèses du théorème 2.3.1 pour le problème de Stokes avec $X = \left(H_0^1(\Omega)\right)^n$, $M = L_0^2(\Omega)$ et les formes a et b définies par (2.29) et (2.30). La coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ étant vérifiée sur l'espace $\left(H_0^1(\Omega)\right)^n$ tout entier, elle l'est en particulier sur le noyau de l'opérateur divergence $\nabla\cdot$. Reste alors à établir que la forme b du problème Stokes vérifie la condition inf-sup. D'après le corollaire 2.1.1, $\forall q \in L_0^2(\Omega)$ il existe une unique fonction $\mathbf{v} \in V^\perp$ telle que :

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = q, \quad |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \leq C\|q\|_{0,\Omega},$$

et par suite :

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \frac{(q,\nabla\cdot\mathbf{v})_\Omega}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}} = \frac{\|q\|_{0,\Omega}^2}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}} \geq \frac{1}{C}\|q\|_{0,\Omega}.$$

Ceci établit la condition inf-sup pour le problème de Stokes. Le théorème de (2.3.1) permet d'énoncer le résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème de Stokes suivant :

Théorème 2.4.1. *Soit* Ω *un domaine borné connexe de* $\mathbb{R}^n, (n \leq 3)$ *à frontière lipschitiziennne* $\partial\Omega$. *Pour* $\boldsymbol{f} \in (H^{-1}(\Omega))^n$ *et* $\boldsymbol{g} \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^n$ *tels que :*

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{g}\,.\,\boldsymbol{n}\; d\sigma = 0, \tag{2.47}$$

il existe une paire unique $(\boldsymbol{u},p) \in (H^1(\Omega))^n \times L_0^2(\Omega)$ *solution du problème :*

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\,\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p & = & \boldsymbol{f} & \textit{sur } \Omega, \\ \nabla.\,\boldsymbol{u} & = & 0 & \textit{sur } \Omega, \\ \boldsymbol{u} & = & \boldsymbol{g} & \textit{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.48}$$

Démonstration. Elle est basé sur l'application du théorème 2.3.1 des problèmes mixtes. La formulation variationnelle du problème (2.48) s'écrit :

$$\begin{cases} (\mathbf{u}, p) \in \left(H^1\Omega)\right)^n \times L^2_0(\Omega) & \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega & \forall \mathbf{v} \in (H^1\Omega))^n, \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 & \forall q \in L^2_0(\Omega), \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}, & \end{cases} \tag{2.49}$$

L'opérateur div étant un isomorphisme de $V^\perp$ vers $L^2_0(\Omega)$, la condition (2.47) induit qu'il existe une fonction $\mathbf{u}_0 \in \left(H^1(\Omega)\right)^n$ telle que :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \text{ sur } \Omega, \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{g} \text{ sur } \partial\Omega,$$

où ici V représente le noyau de l'opérateur divergence.
En posant $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \in \left(H^1_0(\Omega)\right)^n$, on obtient la formulation variationnelle équivalente

$$\begin{cases} (\mathbf{w}, p) \in \left(H^1_0(\Omega)\right)^n \times L^2_0(\Omega) & \\ a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{w}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega & \forall \mathbf{v} \in \left(H^1_0(\Omega)\right)^n, \\ b(\mathbf{w}, q) = 0 & \forall q \in L^2_0(\Omega). \end{cases} \tag{2.50}$$

On conclut par l'application du théorème 2.3.1. □

Chapitre 3

Éléments finis mixtes pour le système de Stokes

3.1 Condition inf-sup discrète du système de Stokes

La résolution du problème de Stokes (2.50) par un procédé d'approximation de Galerkin basé sur la méthode d'éléments finis, nous conduit à l'écriture du problème approché suivant :

$$\begin{cases} (\mathbf{u}^h, p^h) \in \left(X^h \times M^h\right) & \\ a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) + b(\mathbf{v}^h, p^h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h)_\Omega & \forall \mathbf{v}^h \in X^h, \\ b(\mathbf{u}^h, q^h) = 0 & \forall q^h \in M^h, \end{cases} \tag{3.1}$$

où les espaces d'éléments finis X^h et M^h sont des sous-espaces de dimension finie de $\left(H_0^1(\Omega)\right)^n$ et $L_0^2(\Omega)$ respectivement avec h un paramètre de discrétisation destiné à tendre vers zéro. On a alors le résultat d'approximation (voir, par exemple, Théorème 1.1, chapitre II [26]) suivant :

Théorème 3.1.1. *Sous les deux hypothèses suivantes :*

– *il existe* $\gamma > 0$ *tel que :*

$$a(v^h, v^h) \geq \gamma \|v^h\|_X^2, \quad \forall v^h \in KerB^h, \tag{3.2}$$

– *il existe* $\beta > 0$ *tel que :*

$$\sup_{v^h \in X^h} \frac{b(v^h, q^h)}{\|v^h\|_X} \geq \beta \|q^h\|_M, \quad \forall q^h \in M^h, \tag{3.3}$$

le problème (3.1) *admet une unique solution* $(u^h, p^h) \in X^h \times M^h$*. De plus, il existe une constante* C *dépendant uniquement de* γ*,* β*,* $\|a\|$ *et* $\|b\|$ *telle que :*

$$\|u - u^h\|_X + \|p - p^h\|_M \leq C \left(\inf_{v^h \in X^h} \|u - v^h\|_X + \inf_{q^h \in M^h} \|p - q^h\|_M \right). \tag{3.4}$$

Et on a les estimations de stabilité suivantes :

$$\|u^h\|_X \leq \frac{1}{\gamma}\|f\|_{X'} + \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\|a\|}{\gamma}\right)\|g\|_{Q'}, \tag{3.5}$$

$$\|p^h\|_M \leq \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\|a\|}{\gamma}\right)\|f\|_{X'} + \frac{\|a\|}{\beta^2}\left(1 + \frac{\|a\|}{\gamma}\right)\|g\|_{M'}. \tag{3.6}$$

La continuité des formes bilinéaires $a(\cdot,\cdot)$ et $b(\cdot,\cdot)$ ainsi que la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$ sont garanties par le choix de l'approximation conforme de la méthode d'éléments finis ; restera à vérifier pour un couple d'espaces d'éléments finis $X^h \times M^h$ choisi, que la condition inf-sup discrète (3.3) soit vérifiée, la constante $\beta > 0$ devant être indépendante du pas de maillage h. Cette dernière condition appelée aussi condition de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (appellation due à sa présence dans la théorie des méthodes d'éléments finis mixtes développée par Brezzi et Babuska) peut s'écrire d'une manière équivalente sous la forme : Étant donné $q^h \in M^h$, il existe $v^h \in X^h$ non nul, tel que :

$$b(v^h, q^h) \geq \beta \|v^h\|_X \|q^h\|_M. \tag{3.7}$$

3.2 Paires d'éléments finis stables pour le système de Stokes

On donnera ci-après une liste non-exhaustive des espaces d'éléments finis pour la vitesse et la pression, définis pour un maillage régulier $\mathcal{T}^h$ de Ω en triangles ou rectangles (tétraèdres et cubes en dimension 3), qui ont été rigoureusement démontrés stables, i.e. qui vérifient la condition inf-sup discrète (3.3). Pour une esquisse des différentes techniques de démonstration (méthode de Fortin, méthode de Boland-Nicolaides, méthode de Stenberg) utilisées pour prouver la condition (3.3), on renverra le lecteur au chapitre 2, §4 de l'ouvrage de Gunzburger [31].

3.2.1 Schémas à pression discontinue

$\mathbb{P}_1(h/2) - \mathbb{P}_0(h)$

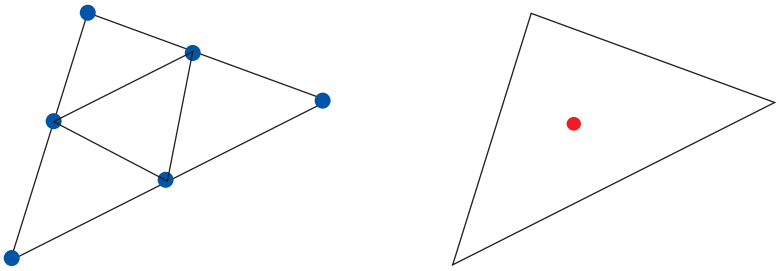
Les espaces d'approximations de la vitesse et de la pression par une MEF sont définis par :

$$X^h = \{\mathbf{v}^h \in \left(C^0(\Omega)\right)^n ; \mathbf{v}^h|_K \in \mathbb{P}_1(K), K \in \mathcal{T}^{h/2}\} \cap \left(H_0^1(\Omega)\right)^n , \quad (3.8)$$

$$M^h = \{q^h \in L^2(\Omega); \mathbf{v}^h|_K \in \mathbb{P}_0(K), K \in \mathcal{T}^h \text{ et } \int_\Omega q^h dx = 0\}, \quad (3.9)$$

où $\mathcal{T}^{h/2}$ est un maillage raffiné de $\mathcal{T}^h$, obtenu en subdivisant chaque triangle ou chaque carré en quatre en joignant les points milieux des cotés.

Sous l'hypothèse de régularité de la solution $(\mathbf{u}, p) \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^n \times$



Degrés de liberté des vitesses. Degrés de liberté de la pression.

FIGURE 3.1 – Schématisation des degrés de liberté de l'élément $\mathbb{P}_1(h/2) - \mathbb{P}_0(h)$ à pression discontinue.

$\left(H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)\right)$ on a pour ces espaces d'approximation les estimations d'erreurs uniformes en h suivantes :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{0,\Omega} = o(h^2), \ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega} = o(h), \|p - p^h\|_{0,\Omega} = o(h), \quad (3.10)$$

$\mathbb{P}_l^+ - \mathbb{P}_{l-1}$ **: Crouzeix-Raviart conforme**

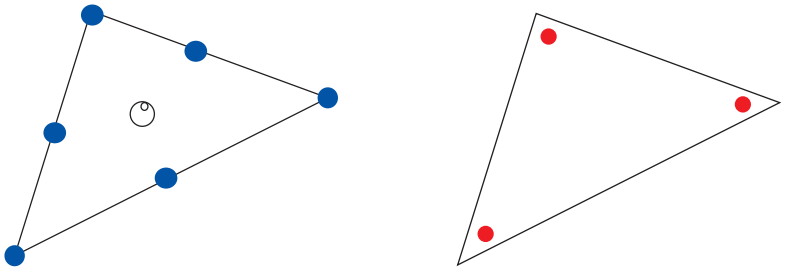
Pour Ω un ouvert borné polygonal et pour $l \geq 2$, les espaces d'approximations vitesse et pression sont donnés par :

$$X^h = \{\mathbf{v}^h \in \left(C^0(\Omega)\right)^n ; \mathbf{v}^h|_K \in \mathbb{P}_l(K) \oplus \mathbb{B}_l(K), K \in \mathcal{T}^h\} \cap \left(H_0^1(\Omega)\right)^n , \quad (3.11)$$

$$M^h = \{q^h \in L^2(\Omega); q^h|_K \in \mathbb{P}_{l-1}(K), K \in \mathcal{T}^h \text{ et } \int_\Omega q^h dx = 0\}, \quad (3.12)$$

où l'espace des fonctions bulles $\mathbb{B}_l(K)$ est défini par :

$$\mathbb{B}_l(K) = \{\mathbf{v}^h \in \mathbb{P}_{l+1}(K); \mathbf{v}^h = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\mathbf{u}^h \text{ avec } \mathbf{u}^h \in \mathbb{P}_{l-1}(K)\}. \quad (3.13)$$



Degrés de liberté des vitesses. Degrés de liberté de la pression.

FIGURE 3.2 – Schématisation des degrés de liberté de l'élément $\mathbb{P}_2^+ - \mathbb{P}_1$ à pression discontinue.

avec $\lambda_i(\mathbf{x}), i = 1,2,3$ représentant les coordonnées barycentriques du point $\mathbf{x} \in K$ par rapport aux sommets de K. Sous l'hypothèse de régularité de la solution $(\mathbf{u}, p) \in \left(H^l(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^n \times \left(H^{l-1}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)\right)$ on a alors les estimations d'erreurs suivantes :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega} + \|p - p^h\|_{1,\Omega} = o(h^l). \tag{3.14}$$

De plus si Ω est convexe on a :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{0,\Omega} = o(h^{l+1}), \tag{3.15}$$

$\mathbb{P}_l - \mathbb{P}_{l-1}$ **: Eléments de Scott-Vogelius**

Dans l'élément de Scott-Vogelius pour le problème de Stokes, les espaces d'approximation sont définis pour $l \geq 4$ de la manière suivante :

$$X^h = \{\mathbf{v}^h \in \left(C^0(\Omega)\right)^n ; \mathbf{v}^h|_K \in \mathbb{P}_l(K), K \in \mathcal{T}^h\} \cap \left(H_0^1(\Omega)\right)^n, \tag{3.16}$$

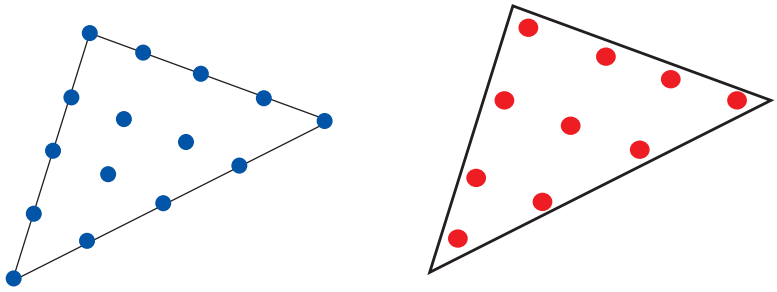
$$M^h = \{q^h \in L^2(\Omega); q^h|_K \in \mathbb{P}_{l-1}(K), K \in \mathcal{T}^h \text{ et } \int_\Omega q^h dx = 0\}. \tag{3.17}$$

$$\tag{3.18}$$

Le schéma de Scott-Vogelius reste très sensible à des particularités du maillage. En effet, il a été démontré dans [31], comme nous allons le voir plus loin, que ce schéma d'éléments finis était instable pour des maillages comportant des "points singuliers" (i.e. des points supportés par des arêtes formant des demi-diagonales d'un parallélogramme, comme indiqué dans figure 3.2.1). Sous la condition d'absence de ces points singuliers dans la maillage cette paire d'éléments finis est démontrée stable avec les estimations d'erreurs suivantes :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{0,\Omega} = o(h^{l+1}), \ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega} = o(h^l), \|p - p^h\|_{0,\Omega} = o(h^l), \tag{3.19}$$

sous l'hypothèses de régularité $(\mathbf{u}, p) \in \left(H^{l+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^n \times \left(H^l(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)\right)$. Cependant, comme $l \geq 4$, cette dernière condition n'est pas susceptible de se produire dans la pratique.



Degrés de liberté des vitesses. Degrés de liberté de la pression.

FIGURE 3.3 – Schématisation des degrés de liberté de l'élément de Scott-Vogelius $\mathbb{P}_4 - \mathbb{P}_3$.

Eléments de Crouzeix-Raviart non-conformes

En notant par $[\mathbf{v}_h]$ le saut de la fonction $\mathbf{v}_h$ entre les éléments du maillage, les espaces d'approximations des vitesses et de la pression sont données par :

$$X^h = \{\mathbf{v}^h \in \left(L^2(\Omega)\right)^n ; \mathbf{v}^h|_K \in \mathbb{P}_1(K), K \in \mathcal{T}^h \text{ avec } \int_F [\mathbf{v}_h] d\sigma = 0\} \cap \left(H_0^1(\Omega)\right)^n \quad (3.20)$$

$$M^h = \{q^h \in L^2(\Omega); q^h|_K \in \mathbb{P}_0(K), K \in \mathcal{T}^h \text{ et } \int_\Omega q^h dx = 0\}. \quad (3.21)$$

Ce qui équivaut à dire que chaque élément de l'espace X^h est continu au point milieu de chaque arête ($n = 2$) ou au barycentre de chaque face ($n = 3$) des éléments de $\mathcal{T}^h$.

Remarque 3.2.1. *On notera le fait que les éléments de X^h de Crouzeix-Raviart non-conformes n'appartiennent pas à l'espace $H^s(\Omega)$, $s \geq 1/2$ (et donc on ne peut pas appliquer le théorème de trace usuel mais sont néanmoins localement conservatifs). Cependant,*

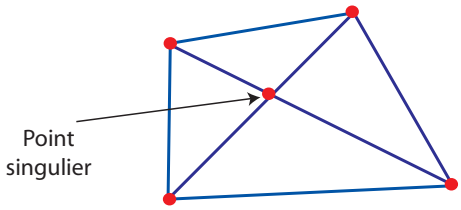
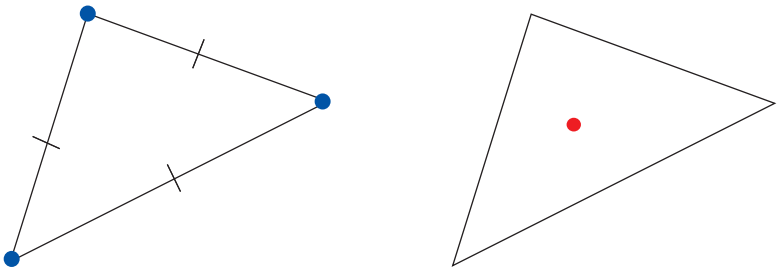


FIGURE 3.4 – Jonctions d'arêtes formant les demi-diagonales d'un parallélogramme.



Degrés de liberté des vitesses. Degrés de liberté de la pression.

FIGURE 3.5 – Schématisation des degrés de liberté de l'élément de Crouzeix-Raviart non-conforme.

dans [6] un résultat de trace plus faible est démontré en utilisant des arguments de dualité, aussi une majoration d'erreur en est déduite.

3.2.2 Schémas à pression continue

$\mathbb{P}_1(h/2) - \mathbb{P}_1(h)$ Les espaces d'approximation pour ce schéma d'éléments finis sont donnés par :

$$X^h = \{\mathbf{v}^h \in \left(C^0(\bar{\Omega})\right)^n ; \mathbf{v}^h|_K \in \mathbb{P}_1(K), K \in \mathcal{T}^{h/2}\} \cap \left(H_0^1(\Omega)\right)^n, \quad (3.22)$$

$$M^h = \{q^h \in C^0(\bar{\Omega}); q^h|_K \in \mathbb{P}_1(K), K \in \mathcal{T}^h \text{ et } \int_\Omega q^h dx = 0\}, \quad (3.23)$$

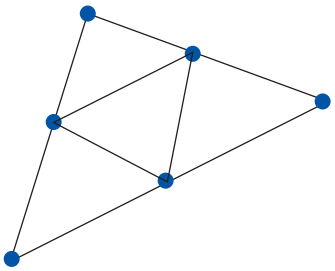
Sous l'hypothèse de régularité de la solution $(\mathbf{u}, p) \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^n \times \left(H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)\right)$ on a les estimations d'erreurs uniformément en h suivantes :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{0,\Omega} = o(h^2), \ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega} = o(h), \|p - p^h\|_{0,\Omega} = o(h), \quad (3.24)$$

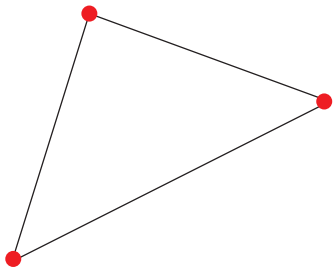
$\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$ **: Element de Taylor-Hood** C'est le schéma appliqué au système de Stokes qui a le plus de popularité dans la pratique. On verra plus loin que numériquement c'est l'un des schémas d'éléments finis qui marche le mieux pour les équations de Stokes. Les espaces d'approximation de la vitesse et de la pression relatifs sont définis par :

$$X^h = \{\mathbf{v}^h \in \left(C^0(\bar{\Omega})\right)^n ; \mathbf{v}^h|_K \in \mathbb{P}_2(K), K \in \mathcal{T}^{h/2}\} \cap \left(H_0^1(\Omega)\right)^n, \quad (3.25)$$

$$M^h = \{q^h \in C^0(\bar{\Omega}); q^h|_K \in \mathbb{P}_1(K), K \in \mathcal{T}^h \text{ et } \int_\Omega q^h dx = 0\}, \quad (3.26)$$



Degrés de liberté des vitesses.

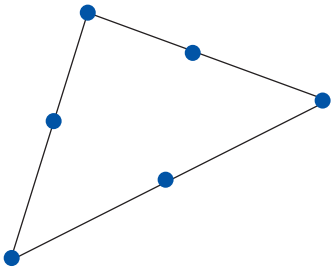


Degrés de liberté de la pression.

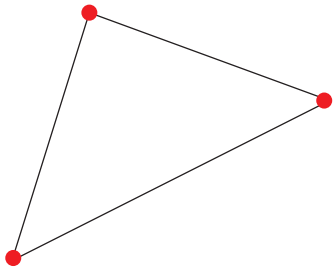
FIGURE 3.6 – Schématisation des degrés de liberté de l'élément $\mathbb{P}_1(h/2) - \mathbb{P}_1(h)$ à pression continue.

Sous l'hypothèse de régularité de la solution $(\mathbf{u}, p) \in \left(H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^n \times \left(H^{m-1}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)\right)$ avec $m = 2, 3$ on a les estimations d'erreurs relatives suivantes :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{0,\Omega} = o(h^m), \ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega} = o(h^{m-1}), \|p - p^h\|_{0,\Omega} = o(h^{m-1}), \tag{3.27}$$



Degrés de liberté des vitesses.



Degrés de liberté de la pression.

FIGURE 3.7 – Schématisation des degrés de liberté de l'élément de Taylor-Hood.

Remarque 3.2.2. *On notera que :*

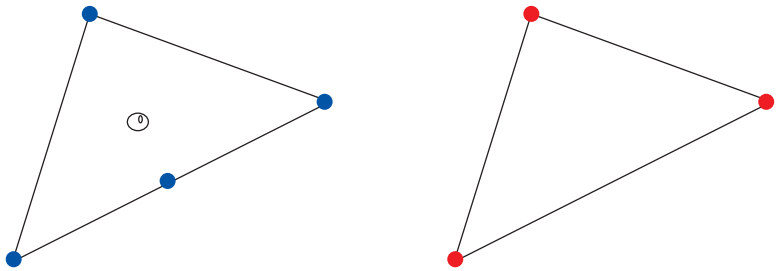
- *Le schéma d'éléments finis de Taylor-Hood comparé au schéma linéaire* $\mathbb{P}_1(h/2) - \mathbb{P}_1(h)$ *donne une meilleure précision pour un coût de calcul similaire.*
- *D'autres variantes de l'élément de Taylor-Hood sont possibles pour des approximations d'ordre plus élevé, par exemples :* $\mathbb{P}_l - \mathbb{P}_{l-1}$ *et* $\mathbb{Q}_l - \mathbb{Q}_{l-1}$*, avec* $l \geq 2$*.*

$\mathbb{P}_1^+ - \mathbb{P}_1$: Le mini-élément

$$X^h = \{\mathbf{v}^h \in \left(C^0(\bar{\Omega})\right)^n ; \mathbf{v}^h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \oplus \mathbb{B}_1(K), K \in \mathcal{T}^h\} \cap \left(H_0^1(\Omega)\right)^n, \tag{3.28}$$

$$M^h = \{q^h \in C^0(\bar{\Omega}); q^h|_K \in \mathbb{P}_1(K), K \in \mathcal{T}^h \text{ et } \int_\Omega q^h dx = 0\}, \tag{3.29}$$

Cette paire d'élément est stable et si $(\mathbf{u}, p) \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^n \times \left(H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)\right)$ alors : $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{0,\Omega} + \|p - p^h\|_{0,\Omega} = o(h)$ et si Ω est convexe $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{0,\Omega} = o(h^2)$.



Degrés de liberté des vitesses. Degrés de liberté de la pression.

FIGURE 3.8 – Schématisation des degrés de liberté du mini-élément.

Remarque 3.2.3. *Dans la pratique, dans tous les schémas d'éléments finis décrits plus haut, la contrainte de moyenne nulle de la pression est ignorée dans un premier temps quand on effectue les calculs de la pression discrète ; on la pose à posteriori en soustrayant à la pression calculée sa moyenne.*

3.3 Comportement numérique des MEF pour le système de Stokes

Dans ce paragraphe on va dresser un comparatif entre 4 des schémas d'éléments finis pour le système de Stokes vus précédemment. Deux d'entre eux avec une approximation continue de la pression : Schéma de Taylor-hood d'ordre 2 pour la vitesse $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$ et celui du mini-élément $\mathbb{P}_1^+ - \mathbb{P}_1$; et les deux autres avec une approximation discontinue de la pression : Schéma de Scott-Vogelius d'ordre 4 pour la vitesse $\mathbb{P}_4 - \mathbb{P}_3$ et celui de Crouzeix-Raviart conforme d'ordre 2 pour la vitesse $\mathbb{P}_2^+ - \mathbb{P}_1$. Les codes de calculs ont été réalisé en utilisant le logiciel GetFem++ (une bibliothèque C++ d'éléments finis interfacée scilab-python-matlab) développé par Y. Renard & J. Pommier [53] à l'INSA de Toulouse.

Afin de pouvoir comparer l'efficacité de ces différents schémas d'approximation par éléments finis du problème de Stokes, vu qu'elles sont d'ordre d'approximation polynômiale différent, on considérera pour chacun d'eux un maillage différent avec comme motivation principale de garantir approximativement un nombre total de degrés de liberté

MEF	Nbre de triangles	Nbre de dll de la vitesse	Nbre de dll de la pression	Nbre total de dll
Taylor-Hood $(P_2 - P_1)$	1372	5650	727	6377
Scott-Vogelius $(P_4 - P_3)$	244	4050	2440	6490
Crouzeix-Raviart $(P_2^+ - P_1)$	702	4334	2106	6440
Mini-élément $(P_1^+ - P_1)$	1784	5446	939	6385

TABLE 3.1 – Différents choix de maillages utilisés pour chaque MEF.

(ddl) identique pour les 4 méthodes (dans nos tests on l'a choisi égal approximativement à 6400 ddl). Le tableau (3.1), résume les choix que nous avons adoptés dans nos tests pour les quatre méthodes d'éléments finis considérées. Aussi, par souci de rigueur, on testera ces méthodes sur trois cas-tests relatifs au problème de Stokes en dimension 2, tous définis sur le carré unité $\Omega =]0,1[\times]0,1[$.

Cas-test de Bercovier-Engelman

Le premier test considéré est celui de Bercovier-Engelman [5], dont la solution analytique est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x,y) = [w(x,y), -w(y,x)]^t, \\ w(x,y) = x^2(x-1)^2 y(y-1)(2y-1), \\ p(x,y) = (x-1/2)(y-1/2). \end{cases}$$

où le champ de la vitesse et les lignes isobares de la pression sont tracés dans la Figure 3.9, est polynômiale d'ordre 7 et 2 pour la vitesse et la pression respectivement.

Le tableau 3.2 dresse un comparatif des différentes erreurs relatives obtenues, en norme $H^1(\Omega)$ pour la vitesse et en norme $L^2(\Omega)$ pour la pression, en utilisant les méthodes d'éléments finis mixtes de type Taylor-Hood, Scott-Vogelius, Crouzeix-Raviart conforme et le mini-élément. Il est clair que les schémas de Taylor-Hood et Scott-Vogelius sont de loin les plus performants. Les tracés des lignes isobares de la pression obtenue représentés dans la Figure 3.10 montrent que même si les méthodes de Crouzeix-Raviart et du mini-élément

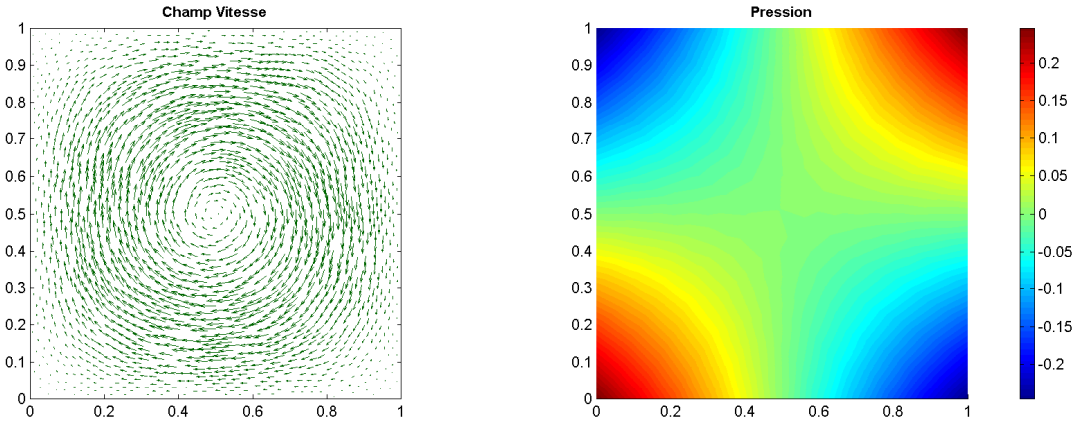


FIGURE 3.9 – Solution exacte du cas-test de Bercovier-Engelman.

	Err Rel **u**	Err Rel p
Taylor-Hood	5.50×10^{-4}	2.73×10^{-2}
Scott-Vogelius	8.90×10^{-5}	2.38×10^{-2}
Crouzeix-Raviart	7.55×10^{-3}	7.90×10^{-2}
Mini-element	8.28×10^{-2}	2.69

TABLE 3.2 – Erreurs relatives pour le cast-test de Bercovier-Engelman.

sont stables, les résultats obtenus sont loins d'être satisfaisants.

Deuxième exemple test

Dans ce deuxième exemple test, on a choisi une solution analytique sous la forme trigonométrique pour la vitesse et sous une forme polynômiale d'ordre 2 pour la pression définie par :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x,y) = [w(x,y), -w(y,x)]^t, \\ w(x,y) = \sin^3(\pi x)\sin^2(\pi y)cos(\pi y), \\ p(x,y) = x^2 - y^2, \end{cases}$$

dont la représentation graphique du champ de la vitesse et des lignes isobares de la pression est donnée dans la Figure 3.11.

Les erreurs relatives résultantes données dans le tableau 3.3 montrent toujours la supériorité des approximations de Taylor-Hood et de Scott-Vogelius en terme de précision de la solution obtenue, même si on remarque que dans ce cas-test les solutions obtenues par les schémas

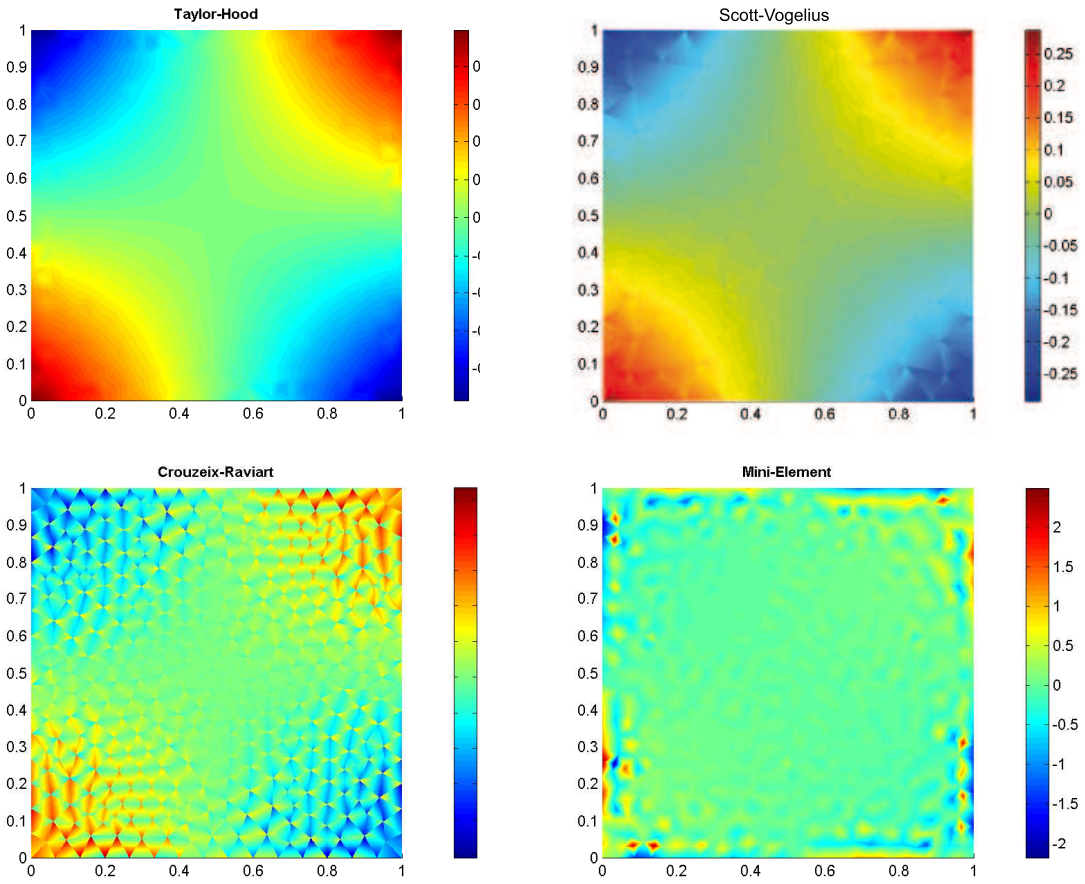


FIGURE 3.10 – Tracés des lignes isobares de la pression du système de Stokes obtenue par les quatre MEF pour le cas-test de Bercovier-Engelman.

de Crouzeix-Raviart et du mini-élément sont plus représentatives de la solution exacte que celles du cast-test de Bercovier-Engelman. La Figure 3.12 des tracés des pressions obtenues confirme le bon comportement des 4 schémas d'éléments finis pour ce cas-test.

Troisième cas-test

Dans ce dernier test, on considérera un problème quasi-Stokes défini par :

$$\begin{cases} -\nu\,\Delta\mathbf{u} + \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{sur } \Omega, \\ \nabla.\,\mathbf{u} &= 0 \quad \text{sur } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

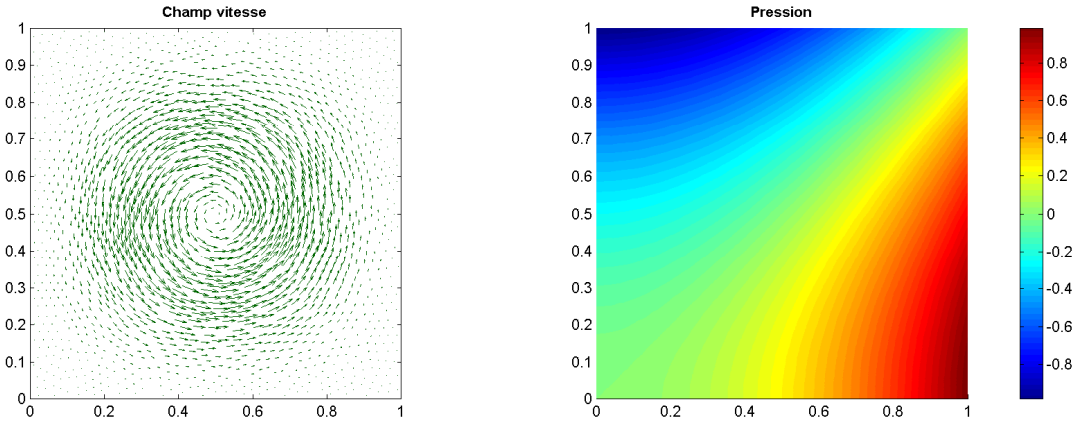


FIGURE 3.11 – Solution exacte du second cas-test.

	Err Rel **u**	Err Rel p
Taylor-Hood	9.65×10^{-4}	1.08×10^{-3}
Scott-Vogelius	3.35×10^{-4}	3.90×10^{-2}
Crouzeix-Raviart	1.25×10^{-2}	5.29×10^{-2}
Mini-élément	9.36×10^{-2}	$4,44 \times 10^{-2}$

TABLE 3.3 – Erreurs relatives pour le deuxième cas-test.

dont la solution analytique, donnée sous une forme trigonométrique aussi bien pour la vitesse que pour la pression est définie par :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x,y) = [w(x,y), -w(y,x)]^t, \\ w(x,y) = -\cos(2\pi x)\sin(2\pi y) + \sin(2\pi y), \\ p(x,y) = 2\pi(\cos(2\pi y) - \cos(2\pi x)), \end{cases}$$

et dont le tracé est donné dans la figure 3.13. Les erreurs relatives résultantes, données dans le tableau 3.4, montrent que les 4 schémas d'éléments finis choisis marchent bien sur ce cas-test avec toujours une meilleure précision pour les schémas de Taylor-Hood et de Scott-Vogelius. Les tracés des lignes isobares de la pression obtenue dans la Figure 3.14 illustrent parfaitement l'efficacité des 4 méthodes d'éléments finis pour approcher les solutions exactes du système de Stokes dans ce cas-test.

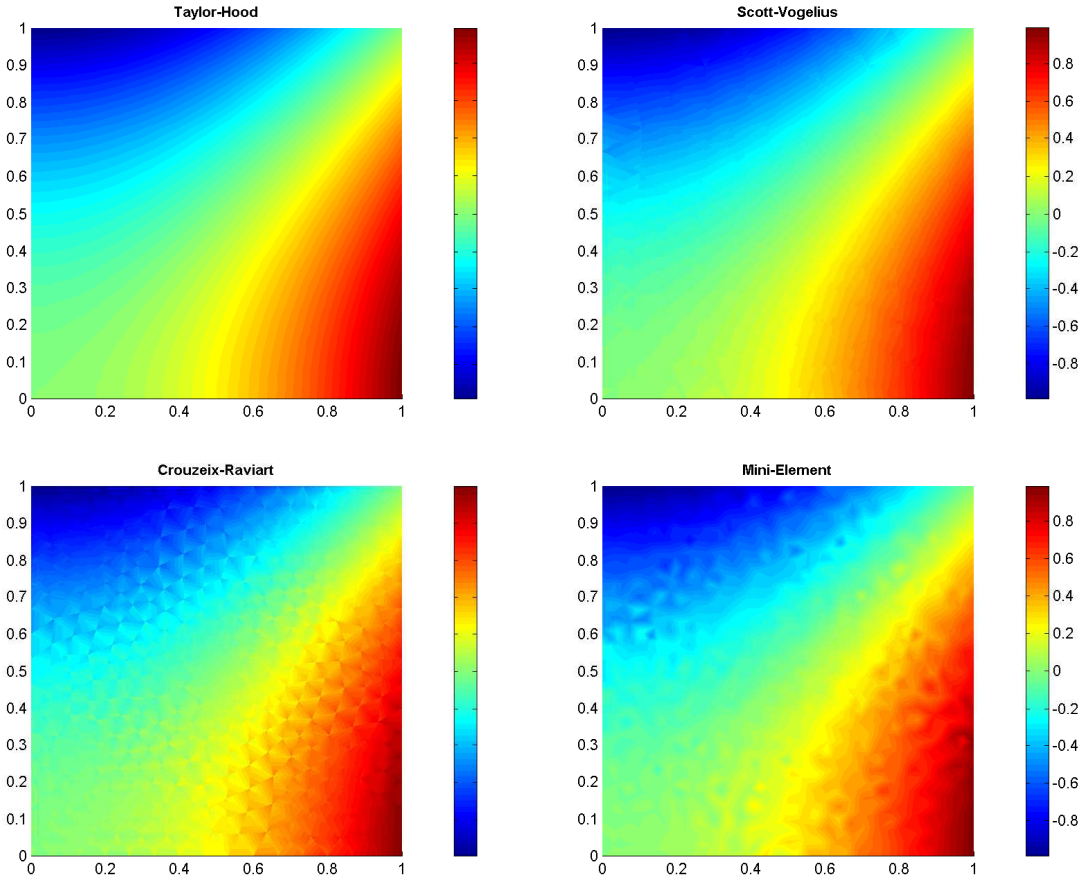


FIGURE 3.12 – Tracés des lignes isobares de la pression du système de Stokes obtenue par les quatre MEF pour le deuxième cas-test.

3.4 Conclusion

Il apparaît des différents tests numériques réalisés que les schémas d'approximation à pression continue de Taylor-Hood et celui à pression discontinue de Scott-Vogelius sont nettement plus performants indépendamment des exemples de problèmes de Stokes traités surtout si la solution recherchée est de degré élevé (comme vu par exemple dans le cas-test de Bercovier-Engelman).

Néanmoins, la stabilité du schéma de Scott-Vogelius reste dépendante de l'absence de points singuliers dans le maillage comme mentionné dans [31]. En effet, durant les différents tests numériques réalisés on a constaté pour une approximation par une MEF de type Scott-Vogelius $\mathbb{P}_4 - \mathbb{P}_3$ appliquée sur un maillage comportant **un seul point singulier** comme le

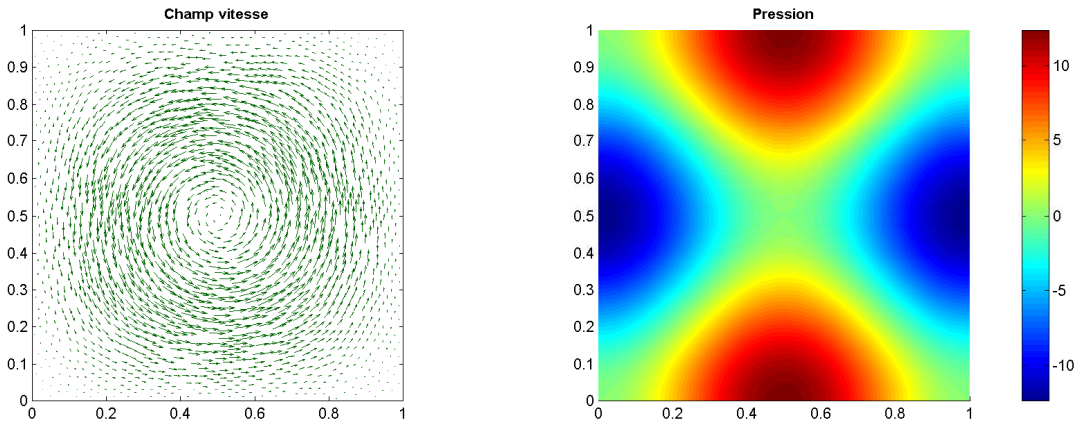


FIGURE 3.13 – Solution exacte du troisième cas-test.

	Err Rel **u**	Err Rel p
Taylor-Hood	8.05×10^{-4}	4.88×10^{-3}
Scott-Vogelius	8.84×10^{-5}	3.26×10^{-4}
Crouzeix-Raviart	7.30×10^{-3}	1.56×10^{-2}
Mini-element	7.25×10^{-2}	2.07×10^{-2}

TABLE 3.4 – Erreurs relatives pour le troisième cas-test.

montre la figure 3.15, que la matrice de rigidité résultante présentait un nombre de conditionnement $\kappa = 8.05 \times 10^{+21}$ et que par suite le système était hautement instable.

Cette étude numérique montre l'intérêt de développer des méthodes de décomposition de domaines pour le système de Stokes discret résultant d'une approximation par une méthode d'éléments finis de type Taylor-Hood. A notre connaissance, dans la littérature existante relative aux MDD appliquées au système de Stokes, uniquement le cas d'une approximation discontinue de la pression a été considéré [66, 40, 33, 34, 49, 50, 42, 14, 15, 48, 20, 39, 1] ou bien, lorsqu'une approximation continue de la pression est considérée [12], celle-ci est supposée discontinue au niveau des interfaces des sous-domaines. Ceci constitue à notre avis une motivation et une contribution intéressante pour l'étude développée dans cette thèse.

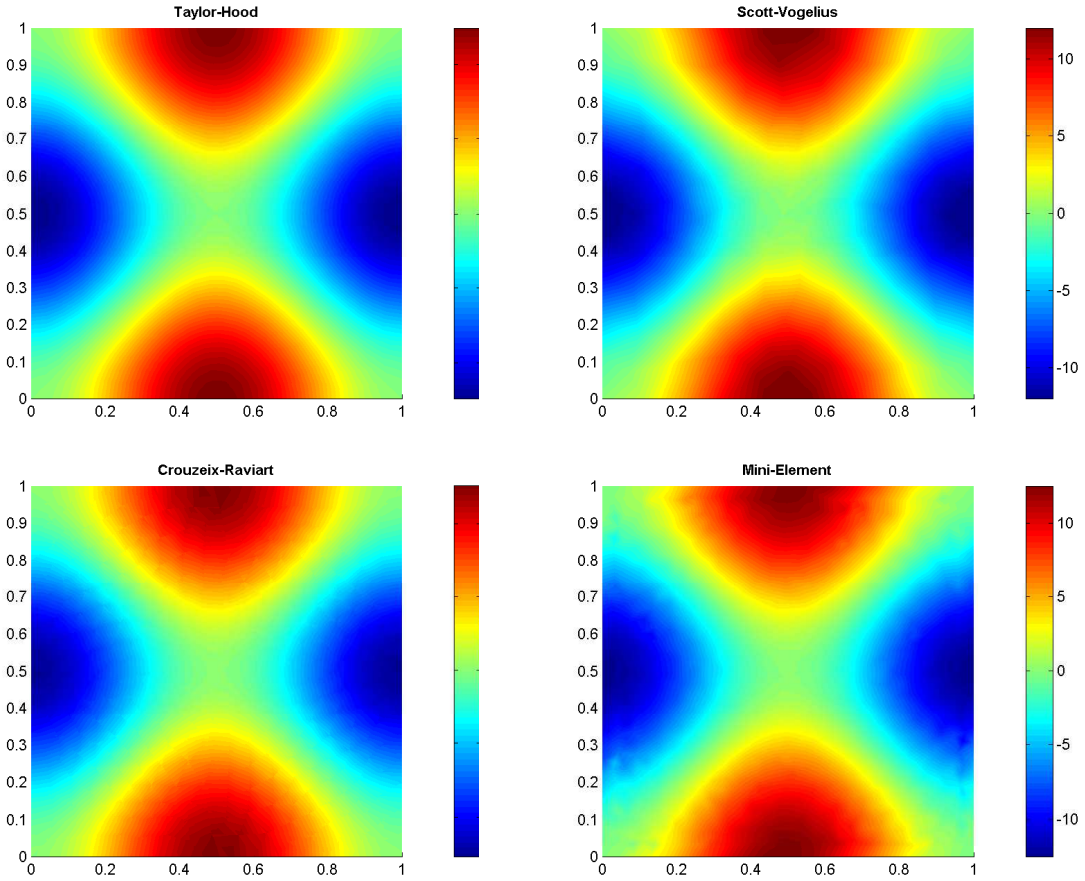


FIGURE 3.14 – Tracés des lignes isobares de la pression du système quasi-Stokes obtenue par les quatre MEF pour le troisième cas-test.

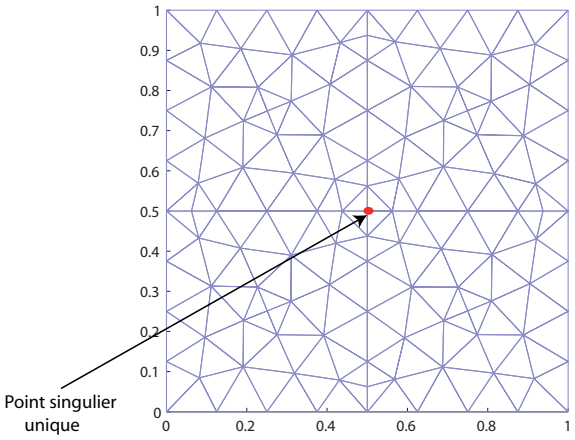


FIGURE 3.15 – Exemple de maillage générant une instabilité pour le schéma de Scott-Vogelius.

Chapitre 4

Méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement pour un problème elliptique standard

Dans cette partie, on donnera un aperçu des différentes techniques des méthodes de décomposition de domaine (MDD) sans recouvrement existantes.
Pour ce faire on considérera tout au long de ce chapitre le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \text{ solution de} \\ -\Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{f}, \text{ sur } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

La formulation variationnelle du problème précédant s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \in X_\Omega \text{ tel que :} \\ a_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}, \forall \mathbf{v} \in X_\Omega \end{cases} \tag{4.2}$$

avec :

$$a_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} dx + \int_\Omega \mathbf{u}\mathbf{v} dx, \tag{4.3}$$

et où X_Ω représente l'espace $\left(H_0^1(\Omega)\right)^n$ ou un sous-espace d'approximation par éléments finis de $\left(H_0^1(\Omega)\right)^n$.

4.1 Introduction aux MDD sans recouvrement

Les méthodes de décomposition de domaine ont pour but de réduire la résolution globale d'un système résultant d'une approximation d'un problème elliptique à la résolution en parallèle de systèmes linéaires définis sur des sous-domaines couplés à système de petite taille. Ces méthodes se présentent comme une combinaison de deux techniques de calcul. D'une part un algorithme itératif est utilisé pour résoudre le problème condensé aux interfaces entre les sous-domaines et qui nécessite de nombreuses communications entre les processeurs et d'autre part, à chaque itération, des systèmes linéaires propres aux sous-domaines sont résolus par une méthode directe indépendamment les uns des autres.

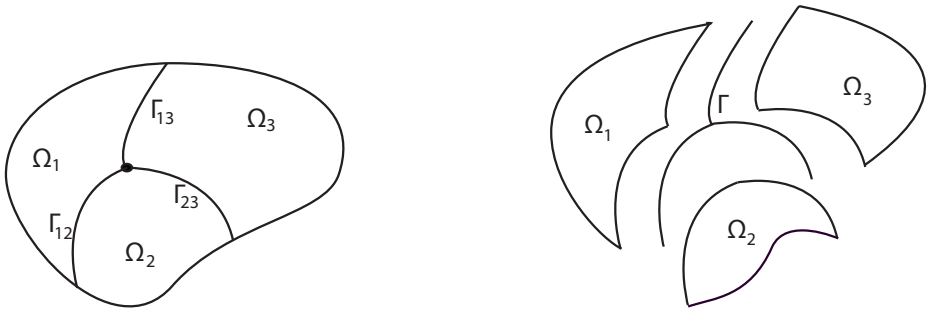


FIGURE 4.1 – Décomposition du domaine géométrique Ω en trois sous-domaines.

Considérons une partition du domaine géométrique Ω en plusieurs sous-domaines $\Omega_i, i = 1, \cdots, N_s$, voir Figure 4.1, où N_s représente le nombre de sous-domaines avec pour interface commune Γ :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_s} \Omega_i, \quad \bigcap_{i=1}^{N_s} \overset{0}{\Omega}_i = \emptyset \quad \text{et} \bigcap_{i=1}^{N_s} \overline{\Omega}_i = \Gamma. \tag{4.4}$$

On notera par $\Gamma_{ij} = \overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j \, (1 \leq i < j \leq N_s)$ l'interface de mesure non-nulle entre deux sous-domaines quand elle existe et par :

$$\Gamma_i = \sum_{j \in \Lambda_i} \Gamma_{ij}, \tag{4.5}$$

l'ensemble des interfaces du sous-domaine, où la notation $j \in \Lambda_i$ réfère à un sous-domaine Ω_j partageant une interface Γ_{ij} avec Ω_i (voir, par exemple, Figure 4.1).
La résolution du problème (4.1) se ramènera alors à celle des problèmes locaux posés sur

chaque sous-domaine suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}_i \text{ tel que :} \\ \quad -\Delta \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i \quad = \mathbf{f}_i, \text{ sur } \Omega_i, \\ \quad \mathbf{u}_i \quad = 0, \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{4.6}$$

auxquels on adjoint les relations de continuité des déplacements et d'équilibre des efforts le long de l'interface de décomposition, c'est-à-dire :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j, \text{ sur } \Gamma_{ij}\ (1 \leq i \leq N_s,\ j \in \Lambda_i), \tag{4.7}$$

$$\sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j \in \Lambda_i} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{n}_{ij}} = 0, \text{ sur } \Gamma = \cup_{i=1}^{N_s} \Gamma_i, \tag{4.8}$$

où : $\mathbf{n}_{ij}$ représente la normale sortante définie sur l'interface Γ_{ij} dirigée vers l'extérieur du sous-domaine Ω_i.
Grace à ces deux conditions le champ de déplacement $\mathbf{u}_i$ est la restriction à Ω_i de la solution du problème (4.1) posé sur Ω.

A partir de cette formulation du problème, on peut introduire les méthodes de décomposition de domaine, qui vont s'appuyer sur l'une ou l'autre des relations de raccords (4.7) (4.8) et aboutir ainsi aux méthodes de complément de Schur primale ou duale respectivement. Elles peuvent s'appuyer également sur une contribution des deux conditions de raccords (4.7) (4.8) pour aboutir à des méthodes de type lagrangien augmenté dites aussi méthodes mixtes.
L'idée des méthodes de décomposition de domaine est de réduire la résolution à un problème posé sur l'interface dont la résolution se fera par une méthode itérative de type Krylov où à chaque itération, on aura à résoudre d'une manière indépendante et par des méthodes directes des problèmes posés sur les sous-domaines.

4.2 Méthode de complément de Schur primale

4.2.1 Interprétation au niveau continu

L'approche primale de la méthode de complément de Schur (voir, par exemple, [44, 62, 63, 64]) consiste à introduire la condition de continuité en déplacement sur l'interface $\Gamma = \bigcup_{i,j} \Gamma_{ij}$ dans la formulation variationelle des problèmes locaux (4.6). Ceci consiste

à introduire un déplacement μ donné, mais à priori inconnu, au niveau de l'interface et à résoudre les problèmes locaux suivants :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u}_i \text{ tel que :} \\ -\Delta \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i, \ \text{ sur } \Omega_i, \\ \mathbf{u}_i = 0, \ \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \\ \mathbf{u}_i = R^{(i)}\mu, \ \text{ sur } \Gamma_i, \end{cases} \tag{4.9}$$

où : $R^{(i)}\mu$ définit la restriction de μ sur Γ_i l'ensemble des interfaces du sous-domaine Ω_i.
On associera à ces problème locaux, la condition d'équilibre des efforts (4.8) au niveau de l'interface Γ.
Pour déterminer le problème dont doit être solution le champ de déplacement d'interface μ on introduit la décomposition suivante : $\mathbf{u}_i = \hat{\mathbf{u}}_i + \tilde{\mathbf{u}}_i$ où :

1. $\hat{\mathbf{u}}_i$ est solution du problème de type Dirichlet (condition homogène sur Γ_i) suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \hat{\mathbf{u}}_i \text{ tel que :} \\ -\Delta \hat{\mathbf{u}}_i + \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{f}_i, \ \text{ sur } \Omega_i, \\ \hat{\mathbf{u}}_i = 0, \ \text{ sur } \partial\Omega_i, \end{cases} \tag{4.10}$$

2. $\tilde{\mathbf{u}}_i$ est solution du problème de type Dirichlet ($R^{(i)}\mu$ sur Γ_i), sans forces extérieures, suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{\mathbf{u}}_i \text{ solution de} \\ -\nabla \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}_i + \tilde{\mathbf{u}}_i = 0, \ \text{sur } \Omega_i, \\ \tilde{\mathbf{u}}_i = 0, \ \text{ sur } \partial\Omega_i \cup \partial\Omega, \\ \tilde{\mathbf{u}}_i = R^{(i)}\mu, \ \text{ sur } \Gamma_i. \end{cases} \tag{4.11}$$

On remarque que les problèmes locaux (4.10) peuvent être résolus d'une façon totalement indépendante.
En définissant par la suite les opérateurs de Steklov-Poincaré $S^{(i)}$ relatif aux problèmes (4.11), qui associent aux restrictions du champ de déplacement $R^{(i)}\mu$ sur l'interface Γ_i les vecteurs contrainte de ces derniers :

$$\begin{array}{rccl} S^{(i)} : & H^{1/2}(\Gamma_i) & \to & H^{-1/2}(\Gamma_i), \\ & R^{(i)}\mu & \mapsto & S^{(i)}R^{(i)}\mu = \sum_{j\in\Lambda_i} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_i}{\partial \mathbf{n}_{ij}}, \end{array} \tag{4.12}$$

on peut exprimer la condition d'équilibre des efforts (4.8) de la façon suivante :

$$\sum_{i=1}^{N_s} \left(\sum_{j\in\Lambda_i} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_i}{\partial \mathbf{n}_{ij}} + S^{(i)}R^{(i)}\mu \right) = 0, \ \text{sur } \Gamma. \tag{4.13}$$

Cette dernière équation consiste alors à résoudre un problème posé sur l'interface Γ dont l'inconnue est le champ de déplacement μ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mu \text{ solution de} \\ \sum_{i=1}^{N_s} {R^{(i)}}^T S^{(i)} R^{(i)} \mu = - \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j \in \Lambda_i} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_i}{\partial \mathbf{n}_{ij}}, \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right. \tag{4.14}$$

où le second membre est, rappelons-le, obtenu à partir de la solution des problèmes locaux (4.10) et donc connu puisque indépendant du champ μ recherché.

4.2.2 Interprétation matricielle

Afin de donner une interprétation discrète de la méthode de complément de Schur primale, considérons une approximation par une méthode d'éléments finis et écrivons le problème (4.6) sous sa forme matricielle :

$$A^{(i)} \mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i. \tag{4.15}$$

La matrice de rigidité $A^{(i)}$ peut se décomposer sous forme de blocs pour distinguer les degrés de libertés internes (indicés I) et ceux appartenant à l'interface entre les sous-domaines (indicés Γ). En partitionnant de la même manière le vecteur déplacement et celui des efforts, on obtient alors :

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} A_{II}^{(i)} & A_{I\Gamma}^{(i)} \\ A_{\Gamma I}^{(i)} & A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_I^{(i)} \\ \mathbf{u}_\Gamma^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_I^{(i)} \\ \mathbf{f}_\Gamma^{(i)} \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Par condensation (élimination de Gauss) des degrés de libertés internes, on se ramène à la résolution d'un problème ayant pour inconnues les degrés de libertés d'interface, lequel s'écrit alors sous la forme :

$$\left(A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} - A_{\Gamma I}^{(i)} {A_{II}^{(i)}}^{-1} A_{I\Gamma}^{(i)} \right) \mathbf{u}_\Gamma^{(i)} = \left(\mathbf{f}_\Gamma^{(i)} - A_{\Gamma I}^{(i)} {A_{II}^{(i)}}^{-1} \mathbf{f}_I^{(i)} \right). \tag{4.17}$$

Dans cette expression apparaît le complément de Schur associé au sous-domaine Ω_i, qui n'est autre que la discrétisation de l'opérateur de Steklov-Poincaré (4.12), défini ci-dessous :

$$S^{(i)} = A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} - A_{\Gamma I}^{(i)} {A_{II}^{(i)}}^{-1} A_{I\Gamma}^{(i)}. \tag{4.18}$$

En introduisant la matrice $R^{(i)}$, qui est la discrétisation de l'opérateur de restriction, sur le sous-domaine Ω_i, du champ de déplacement sur l'interface Γ, noté comme précédemment μ, de sorte que :

$$\mathbf{u}_\Gamma^{(i)} = R^{(i)} \mu, \tag{4.19}$$

on a alors à partir de (4.17) :

$$S^{(i)} R^{(i)} \mu = \left(\mathbf{f}_\Gamma^{(i)} - A_{\Gamma I}^{(i)} A_{II}^{(i)^{-1}} \mathbf{f}_I^{(i)} \right). \tag{4.20}$$

En sommant les contributions de chaque sous-domaine, on obtient finalement le problème condensé à l'interface :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mu \text{ tel que :} \\ S\,\mu = \sum_{i=1}^{N_s} \left(\mathbf{f}_\Gamma^{(i)} - A_{\Gamma I}^{(i)} A_{II}^{(i)^{-1}} \mathbf{f}_I^{(i)} \right), \end{array} \right. \tag{4.21}$$

où la matrice $S = \sum_{i=1}^{N_s} R^{(i)^T} S^{(i)} R^{(i)}$ est symétrique définie positive, sous réserve que le problème global (4.1) soit bien posé.

4.3 Méthode de complément de Schur duale

4.3.1 Interprétation au niveau continu

Dans cette approche, plus communément appelée méthode FETI, c'est la condition d'équilibre des efforts entre sous-domaines qui est introduite dans la formulation variationnelle des problèmes locaux (4.6), via un multiplicateur de Lagrange, noté λ, auxquels on associera la condition de continuité des déplacements (voir, par exemple, [21, **?**, 46, 36]). Pour ce faire, on définit un multiplicateur d'interface (effort global) λ sur Γ, à priori inconnu et on résout les problèmes locaux suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } \mathbf{u}_i \text{ tels que :} & \\ -\Delta \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i, & \text{sur } \Omega_i, \\ \mathbf{u}_i = 0, & \text{sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \\ \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{n}} = B^{(i)} \lambda, & \text{sur } \Gamma_i, \end{array} \right. \tag{4.22}$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal défini sur Γ_i et où les opérateurs $B^{(i)}$ définissent la restriction à Γ_i de λ. Ces opérateurs sont également signés tels que :

$$\mathrm{sgn}(B^{(i)} \lambda|_{\Gamma_{ij}}) = -\,\mathrm{sgn}(B^{(j)} \lambda|_{\Gamma_{ij}}), (1 \leq i \leq N_s,\ j \in \Lambda_i). \tag{4.23}$$

Pour que les solutions $\mathbf{u}_i$ de ces problèmes locaux soient la restriction de la solution $\mathbf{u}$ du problème global (4.1), on associe à (4.22) la condition de continuité des déplacement :

$$\sum_{i=1}^{N_s} B^{(i)} \mathbf{u}_i = 0, \text{ sur } \Gamma. \tag{4.24}$$

Comme précédemment, en vue de l'écriture du problème condensé à l'interface Γ, on décompose la solution $\mathbf{u}_i$, sous la forme $\mathbf{u}_i = \hat{\mathbf{u}}_i + \tilde{\mathbf{u}}_i$ où :

1. $\hat{\mathbf{u}}_i$ est solution du problème de type Neumann (condition homogène sur Γ_i) à forces extérieures imposées :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } \hat{\mathbf{u}}_i \text{ solution de} & \\ -\nabla \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}_i + \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{f}_i, & \text{sur } \Omega_i, \\ \hat{\mathbf{u}}_i = 0, & \text{sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial \hat{\mathbf{u}}_i}{\partial \mathbf{n}} = 0, & \text{sur } \Gamma_i. \end{array} \right. \tag{4.25}$$

2. $\tilde{\mathbf{u}}_i$ est solution du problème de type Neumann ($B^i\lambda$ imposée sur Γ_i), sans forces extérieures, suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } \tilde{\mathbf{u}}_i \text{ solution de} & \\ -\nabla \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}_i + \tilde{\mathbf{u}}_i = 0, & \text{sur } \Omega_i, \\ \tilde{\mathbf{u}}_i = 0, & \text{sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_i}{\partial \mathbf{n}} = B^{(i)}\lambda, & \text{sur } \Gamma_i. \end{array} \right. \tag{4.26}$$

On introduit les opérateurs linéaires $\left(S^{(i)}\right)^{-1}$, opérateurs inverses de l'opérateur de Steklov-Poincaré, relatifs aux sous-domaines Ω_i, qui associent aux vecteurs contraintes des problèmes locaux (4.26) la trace du déplacement sur l'interface Γ_i :

$$\begin{array}{rrl} \left(S^{(i)}\right)^{-1} : & H^{-1/2}(\Gamma_i) & \to H^{1/2}(\Gamma_i), \\ & B^{(i)}\lambda & \mapsto \left(S^{(i)}\right)^{-1}\left(B^i\lambda\right) = \tilde{\mathbf{u}}_i|_{\Gamma_i}. \end{array} \tag{4.27}$$

Alors, l'équation de continuité des déplacements (4.24) sur l'interface Γ, s'écrira comme un problème posé sur l'interface, avec comme inconnue λ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \lambda \text{ tel que :} \\ \sum_{i=1}^{N_s} B^{(i)^T}\left(S^{(i)}\right)^{-1} B^{(i)}\lambda = -\sum_{i=1}^{N_s} \hat{\mathbf{u}}_i|_{\Gamma_i}. \end{array} \right. \tag{4.28}$$

On notera que le second membre de l'équation est obtenu à partir des problèmes locaux (4.25) et donc connu puisque il est indépendant du multiplicateur λ recherché.

Remarque 4.3.1. *Dans l'approche duale, on risque d'avoir des sous-problèmes locaux* (4.22) *mal définis dans le cas d'une partition du domaine Ω comportant des sous-domaines dits "flottants" (i.e. des sous-domaines où $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega = \emptyset$). On aura alors des sous-problèmes avec aucune condition de Dirichlet sur le bord pour fixer les modes rigides.*

4.3.2 Interprétation matricielle

La discrétisation de problèmes locaux (4.22) s'écrira de la façon suivante :

$$A^{(i)}\mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i - B^{(i)}\lambda, \tag{4.29}$$

où ici les matrices $B^{(i)}$ sont des matrices booléennes de composantes $1, -1, 0$ qui représentent la discrétisation des opérateurs de restrictions apparaissant dans (4.22). Ici, à la différence de la méthode primale, il n'est pas nécessaire de distinguer les degrés de libertés internes et ceux de l'interface au sein de la matrice de raideur. En ajoutant la condition de continuité des déplacements (4.24) aux différentes équations d'équilibre des sous-structures, le système global obtenu s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & B^{(1)} \\ 0 & A^{(2)} & \cdots & 0 & B^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A^{(N_s)} & B^{(N_s)} \\ B^{(1)^T} & B^{(2)^T} & \cdots & B^{(N_s)^T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N_s} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{N_s} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.30}$$

En supposant les matrices de rigidité locales inversibles, le problème d'interface (4.28) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \lambda \text{ solution de} \\ D\,\lambda = \sum_{i=1}^{N_s} B^{(i)^T} A^{(i)^{-1}} \mathbf{f}_i, \end{cases} \tag{4.31}$$

où la matrice $D = \sum_{i=1}^{N_s} B^{(i)^T} A^{(i)^{-1}} B^{(i)}$.

4.3.3 Présence de sous-domaines flottants

En pratique, dans l'approche duale, le procédé de partitionnement produit très souvent des sous-domaines "flottants", c'est-à-dire des sous-domaines qui n'ont pas de déplacements prescrits sur le bords pour éliminer les mouvements de corps rigide du sous-domaine (voir, par exemple, Figure 4.2). Dans le cas de sous-domaine flottant, la matrice locale $A^{(i)}$ est singulière. Le but de ce paragraphe est d'introduire la notion d'"inverse généralisé" afin de donner une écriture matricielle générale du problème d'interface (4.31) qui prenne en compte la présence des sous-domaines flottants.

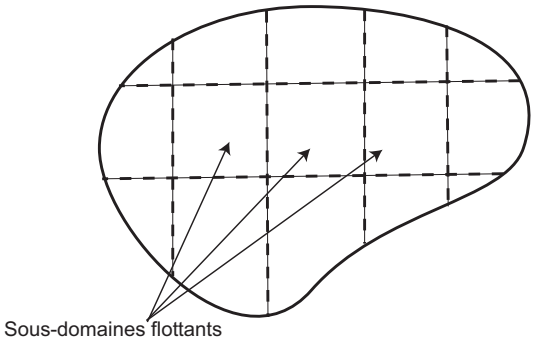


FIGURE 4.2 – Décomposition de Ω comportant 3 sous-domaines flottants.

Considérons une matrice A, non-définie positive, et qui peut être décomposée de la manière suivante :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} A_{22} \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

où le bloc A_{11} est défini positif et sa dimension égale au rang de la matrice A. Le complément de Schur $A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{21}$ étant alors forcément égal à zéro, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} A_{12} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.33}$$

On peut déduire que les colonnes de la matrice N qui sont définies comme :

$$N = \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} A_{12} \\ I \end{bmatrix}, \tag{4.34}$$

forment une base du noyau de la matrice A. Maintenant, si on considère le système d'équations non-défini :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \tag{4.35}$$

on a alors :

$$\begin{cases} x_1 = A_{11}^{-1} b_1 - A_{11}^{-1} A_{12} x_2, \\ \left(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{21} \right) x_2 = b_2 - A_{21} A_{11}^{-1} b_1 = 0. \end{cases} \tag{4.36}$$

Ainsi, le problème admet au moins une solution si, et seulement si, le second membre b satisfait à la condition de compatibilité suivante :

$$\begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} A_{12} \\ I \end{bmatrix} \Bigg] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = b_2 - A_{21} A_{11}^{-1} b_1 = 0. \tag{4.37}$$

Dans ce cas, il existe un nombre infini de solutions de la forme :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} A_{12} \\ I \end{bmatrix} x_2. \tag{4.38}$$

Cette équation montre que les solutions du problème (4.35) sont définies comme une somme de la solution particulière $\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} b_1 & 0 \end{bmatrix}^t$ et d'un élément quelconque du noyau. En définissant la matrice inverse généralisée A^+ par :

$$A^+ = \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

la solution particulière s'écrit : $x = A^+ [b_1 \quad b_2]^t$. La condition d'admissibilité (4.37) exprime le fait que le second membre b doit être orthogonal au noyau de la matrice A, ce qui équivaut à dire qu'il appartient à l'espace image de A.

Remarque 4.3.2. *En pratique, pour numéroter la matrice A comme dans* (4.32) *et calculer la matrice N suivant la définition* (4.34)*, lors de la factorisation de la matrice A, on repère les pivots nuls. Les colonnes de la matrice A correspondant à ces pivots nuls forment donc la matrice rectangulaire $R = [A_{12} \quad A_{22}]^t$. Si la taille du problème* (4.35) *est de n , et le nombre de pivots nuls de m , la dimension de matrice N est de $n \times m$. A l'aide de la matrice A^+ , on résout m fois le système* (4.35) *ayant pour second membre une colonne R_j de la matrice $R, j = 1, \cdots, m$. Les m vecteurs solutions forment alors la matrice rectangulaire $n \times m$: $N = [-A_{11}^{-1} A_{12} \quad I]^t$ qui est une base de noyau recherché.*

Revenons maintenant aux problèmes locaux (4.22) :

$$A^{(i)} \mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i - B^{(i)} \lambda. \tag{4.40}$$

En définissant l'inverse généralisé de $A^{(i)^+}$ de la manière suivante :

$$A^{(i)^+} = \begin{cases} A^{(i)^{-1}} & \text{si le sous-domaine } \Omega_i \text{ n'est pas flottant,} \\ (4.39) & \text{si } \Omega_i \text{ est un sous-domaine flottant,} \end{cases} \tag{4.41}$$

et en utilisant (4.38) les solutions de ces problèmes locaux s'écrivent :

$$\mathbf{u}_i = A^{(i)^+} \left(\mathbf{f}_i - B^{(i)} \lambda \right) + N^i \alpha^i, \tag{4.42}$$

où N^i est le noyau de la matrice $A^{(i)}$. Pour qu'une telle solution existe, il est nécessaire que le second membre du problème soit orthogonal au noyau de la matrice de raideur (i.e. satisfaction de la condition de compatibilité (4.37)), c'est à dire :

$$N^{i^t}\left(\mathbf{f}_i - B^{(i)}\lambda\right) = 0. \tag{4.43}$$

A partir de l'équation de continuité du champ de déplacement (4.24) sur l'interface qui s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{N_s} B^{(i)}\mathbf{u}_i = 0, \text{ sur } \Gamma, \tag{4.44}$$

et en remplaçant $\mathbf{u}_i$ par l'expression (4.42), le problème d'interface (4.31) peut être formulé alors comme suit :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \lambda \text{ solution de :} \\ \sum_{i=1}^{N_s} B^{(i)}A^{(i)^+}B^{(i)}\lambda - \sum_{i=1}^{N_s} B^{(i)}N^i\alpha^i = \sum_{i=1}^{N_s} B^{(i)}A^{(i)^+}\mathbf{f}_i, \end{array}\right. \tag{4.45}$$

à résoudre sous la contrainte (4.43).

4.4 Méthode de décomposition de domaine mixte

4.4.1 Interprétation au niveau continu

L'idée dans l'approche mixte des méthodes de décomposition de domaine [30, 29], appelée aussi parfois "two-lagrange multiplier FETI method" [57, 58, 43] ou aussi "Augmented Lagrangian DDM" [28, 41], consiste à réécrire les conditions d'équilibre et de continuité aux interfaces à l'aide d'une nouvelle inconnue d'interface locale $\Phi \in \prod_{i=1}^{3} H^{-1/2}(\Gamma_i)$ donnée, qui sera définie comme une combinaison linéaire des efforts et des déplacements. La résolution du problème global (4.1) se ramenera à celle des sous-problèmes locaux :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}_i \text{ solution de} \\ \qquad \begin{array}{ll} -\Delta\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i & = \mathbf{f}_i, \text{ sur } \Omega_i, \\ \mathbf{u}_i & = 0, \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{n}_i} + \lambda\mathbf{u}_i & = \Phi_i, \text{ sur } \Gamma_i, \end{array} \end{array}\right. \tag{4.46}$$

où : Φ_i désigne la restriction sur Γ_i de Φ et $\mathbf{n}_i$ le vecteur normal à Γ_i dirigé vers l'extérieur de Ω_i et $\lambda > 0$ un paramètre strictement positif.

On devra associer à ces problèmes locaux les conditions de continuité des déplacements (4.7) et d'équilibre des efforts (4.8) afin que les solutions $\mathbf{u}_i$ représentent les restrictions de la solution globale $\mathbf{u}$ sur chaque sous-domaine Ω_i.

Dans la proposition suivante on donnera une nouvelles façon, bien adaptée pour l'écriture du problème condensé à l'interface, d'écrire ces conditions de raccord.

Proposition 4.4.1. *Les conditions de raccord* (4.7), (4.8) *s'écrivent de la manière équivalente suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{ij} & = -\Phi_{ji} + 2\lambda\, \boldsymbol{u}_j|_{\Gamma_{ij}}, \\ \Phi_{ji} & = -\Phi_{ij} + 2\lambda\, \boldsymbol{u}_i|_{\Gamma_{ij}}, \end{array} \right. \quad \textit{sur tout } \Gamma_{ij} \in \Gamma, \tag{4.47}$$

où Φ_{ij} désigne la restriction de Φ_i sur Γ_{ij} et λ un paramètre strictement positif.

Démonstration. En effet sur chaque interface Γ_{ij} on a les équivalences :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j, \\ \dfrac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{n}_{ij}} + \dfrac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial \mathbf{n}_{ji}} = 0, \end{array} \right. \quad (\forall i = 1, \ldots, N_s,\, \forall j \in \Lambda_i),$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j, \\ \Phi_{ij} + \Phi_{ij} - \lambda\,(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j) = 0, \end{array} \right. \quad (\forall i = 1, \ldots, N_s,\, \forall j \in \Lambda_i),$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{ij} & = -\Phi_{ji} + 2\lambda\, \mathbf{u}_j|_{\Gamma_{ij}}, \\ \Phi_{ji} & = -\Phi_{ij} + 2\lambda\, \mathbf{u}_i|_{\Gamma_{ij}}, \end{array} \right. \quad (\forall i = 1, \ldots, N_s,\, \forall j \in \Lambda_i),$$

□

Dans le but d'écrire le problème condensé à l'interface, considérons la décomposition de la solution des problèmes (4.46) suivante : $\mathbf{u}_i = \hat{\mathbf{u}}_i + \tilde{\mathbf{u}}_i$ où :

1. $\hat{\mathbf{u}}_i$ est solution du problème de type Robin (condition homogène sur Γ_i) à forces extérieures imposées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \hat{\mathbf{u}}_i \text{ solution de} \\ \quad -\Delta \hat{\mathbf{u}}_i + \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{f}_i, \qquad \text{sur } \Omega_i, \\ \quad \hat{\mathbf{u}}_i = 0, \qquad \text{sur } \partial\Omega_i \cup \partial\Omega, \\ \quad \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{n}_i} + \lambda \mathbf{u}_i = 0, \qquad \text{sur } \Gamma_i, \end{array} \right. \tag{4.48}$$

2. $\tilde{\mathbf{u}}_i$ est solution du problème de type Robin (Φ_i imposée sur Γ_i), sans forces extérieures, suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \tilde{\mathbf{u}}_i \text{ solution de} \\ \quad -\Delta\tilde{\mathbf{u}}_i + \tilde{\mathbf{u}}_i = 0, \qquad \text{sur } \Omega_i, \\ \quad \tilde{\mathbf{u}}_i = 0, \qquad \text{sur } \partial\Omega_i \cup \partial\Omega, \\ \quad \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{n}_i} + \lambda \mathbf{u}_i = \Phi_i, \qquad \text{sur } \Gamma_i, \end{array}\right. \tag{4.49}$$

et les opérateurs locaux relatifs aux problèmes (4.49) :

$$\begin{array}{rccl} \left(S^{(i)}\right)^{-1} : & H^{-1/2}(\Gamma_i) & \to & H^{1/2}(\Gamma_i), \\ & \Phi_i & \mapsto & \left(S^{(i)}\right)^{-1}(\Phi_i) = \tilde{\mathbf{u}}_i|_{\Gamma_i}. \end{array} \tag{4.50}$$

Les conditions de raccord (4.47) s'écriront alors :

$$\left\{\begin{array}{ll} \Phi_{ij} - 2\lambda\,\tilde{\mathbf{u}}_{ji} & = -\Phi_{ji} + 2\lambda\,\hat{\mathbf{u}}_{ji}, \\ \Phi_{ji} - 2\lambda\,\tilde{\mathbf{u}}_{ij} & = -\Phi_{ij} + 2\lambda\,\hat{\mathbf{u}}_{ij}, \end{array}\right. \quad \text{sur tout } \Gamma_{ij} \in \Gamma, \tag{4.51}$$

Nous obtenons par la suite le problème condensé à l'interface, que doivent satisfaire les multiplicateurs Φ, suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \Phi \in \prod_{i=1}^{N_s} \prod_{j\in\Lambda_i} H^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \text{ solution de} \\ \left(\begin{array}{cc} I & I - 2\lambda\,\left(S^{(i)}\right)^{-1} \\ I - 2\lambda\,\left(S^{(j)}\right)^{-1} & I \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \Phi_{ij} \\ \Phi_{ji} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 2\lambda\,\hat{\mathbf{u}}_{ji} \\ 2\lambda\,\hat{\mathbf{u}}_{ij} \end{array}\right), \\ (\forall i = 1, \ldots, N_s,\ \forall j \in \Lambda_i). \end{array}\right. \tag{4.52}$$

Le second membre du problème précédent, rappelons-le, est obtenu à partir des problèmes locaux (4.48) indépendamment du multiplicateur Φ.

4.4.2 Interprétation matricielle

Comme dans l'approche primale , dans le but d'écrire la formulation discrète de la méthode de décomposition mixte, on distinguera les degrés de libertés internes et ceux appartenant à l'interface. Les sous-problèmes (4.46) s'écriront alors sous la forme matricielle :

$$\left(\begin{array}{cc} A_{II}^{(i)} & A_{I\Gamma}^{(i)} \\ A_{I\Gamma}^{(i)^T} & \left(A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} + \lambda C_{\Gamma\Gamma}^{(i)}\right) \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{u}_I^{(i)} \\ \mathbf{u}_\Gamma^{(i)} \end{array}\right), = \left(\begin{array}{c} \mathbf{f}_I^{(i)} \\ \mathbf{f}_\Gamma^{(i)} + C_{\Gamma\Gamma}^{(i)}\Phi \end{array}\right), \tag{4.53}$$

où : les matrices $C_{\Gamma\Gamma}^{(i)}$ sont des matrices masse d'interface associées aux produits scalaires $L^2(\Gamma_i)$.

Par condensation (élimination de Gauss) des degrés de libertés internes, on a le problème ayant pour inconnues les degrés de libertés d'interface suivant :

$$\left(S^{(i)} + \lambda C_{\Gamma\Gamma}^{(i)}\right) \mathbf{u}_\Gamma^{(i)} = C_{\Gamma\Gamma}^{(i)} \Phi + F_\Gamma^{(i)}, \tag{4.54}$$

où $S^{(i)}$ est le complément de Schur local associé au sous-domaine Ω_i défini par $S^{(i)} = A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} - A_{I\Gamma}^{(i)^T} A_{II}^{(i)^{-1}} A_{I\Gamma}^{(i)}$ et avec $F_\Gamma^{(i)} = \mathbf{f}_\Gamma^{(i)} - A_{I\Gamma}^{(i)^T} A_{II}^{(i)^{-1}} \mathbf{f}_I^{(i)}$.
Par la suite, en exprimant les déplacements d'interfaces $\mathbf{u}_\Gamma^{(i)}$ à partir des équations d'équilibre locales (4.54) et en les substituant dans les conditions de raccord (4.47), on obtient un système ayant pour inconnue le multiplicateur Φ et défini sur chaque interface Γ_{ij} par :

$$\begin{pmatrix} I & I - 2\lambda R^{(ij)} \left(S^{(j)} + \lambda C_{\Gamma\Gamma}^{(j)}\right)^{-1} \\ I - 2\lambda R^{(ij)} \left(S^{(i)} + \lambda C_{\Gamma\Gamma}^{(i)}\right)^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{ij} \\ \Phi_{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda R^{(ij)} \left(S^{(j)} + \lambda C_{\Gamma\Gamma}^{(j)}\right)^{-1} F_{j\Gamma} \\ 2\lambda R^{(ij)} \left(S^{(i)} + \lambda C_{\Gamma\Gamma}^{(i)}\right)^{-1} F_{i\Gamma} \end{pmatrix} \tag{4.55}$$

où $R^{(ij)}$ est l'opérateur de restriction sur Γ_{ij}.

4.5 Problème lié à la présence de point-multiples dans l'approche duale et mixte

4.5.1 Au niveau continu

Dans la méthode de décomposition duale et mixte, les déplacements sont supposés a priori discontinus à travers l'interface globale Γ, à charge pour les conditions de raccords (4.7) et (4.47) d'assurer cette continuité.
Quand la décomposition de domaine Ω comporte des "point-multiples", i.e. des points partagés par plus de 2 sous-domaines (Figure 4.3), l'écriture de ces conditions de raccords pose problème. En effet, bien que la trace sur $\Gamma_i = \cup_{j \in \Lambda_i} \Gamma_{ij}$ d'une fonction $\mathbf{v}_i \in H^1_{0,\partial\Omega_i \setminus \Gamma_i}(\Omega_i)$ appartienne à $H_{00}^{1/2}(\Gamma_i)$, le saut de la trace définie par $\mathbf{v}_{ij} - \mathbf{v}_{ji}$ sur chaque interface Γ_{ij} n'est pas toujours dans $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$.
Cela vient du fait que même si le saut est régulier sur chaque interface Γ_{ij} , il peut être discontinu aux points-multiples. Donc, le saut appartient à un espace moins régulier que $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ dont l'espace dual est inclus dans $H^{-1/2}(\Gamma_{ij})$.

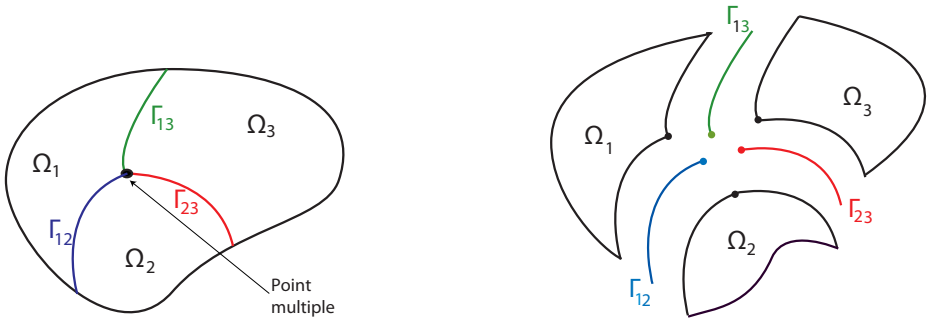


FIGURE 4.3 – Difficulté de raccords au niveau des point-multiples.

Remarque 4.5.1. *Dans les MDD primales le problème du raccord au niveau des point-multiples ne se pose pas. Cependant, lorsqu'un préconditionnement de type Neumann-Neumann est associé à ces méthodes le problème de raccord au niveau des point-multiples se pose là aussi comme dans les MDD FETI ou mixtes.*

4.5.2 Au niveau discret

La description du raccord des degrés de libertés au niveau des point-multiples donne lieu, pour l'approche duale et mixte d'une méthode de décomposition de domaine, à des redondances lors d'une discrétisation par une méthode d'éléments finis. En effet dans le cas général d'un point-multiple appartenant à $m > 2$ sous-domaines, on aura C_m^2 relations de connectivité, alors que seulement $(m-1)$ seraient suffisantes et nécessaires (dans la Figure 4.4 il existe 3 relations de raccord au niveau du point-multiple, alors que 2 sont suffisantes pour assurer la continuité du déplacement à ce point).

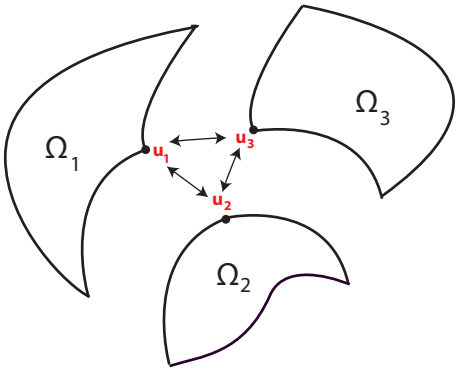


FIGURE 4.4 – Redondance au niveau des point-multiples.

Afin de supprimer ces redondances, il suffit de modifier la table de connectivité, de sorte qu'un point-multiple soit connecté une seule fois à chaque sous-domaine. Ceci peut être réalisé en introduisant soit un opérateur d'assemblage dit "non-redondant", soit un opérateur dit "orthonormal" [24] (voir Figure 4.5 pour une description de ces deux opérateurs). Ceci induit des complications au niveau de le programmation des méthodes et une perte au niveau du modèle mathématique. Une approche des méthodes de décomposition de domaine que

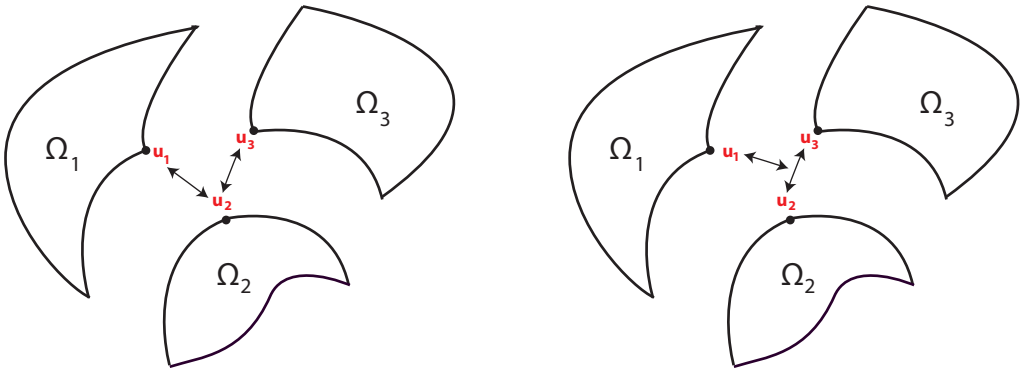


FIGURE 4.5 – Schématisation des opérateurs "non-redondant" et "orthonormal" pour supprimer les redondances au niveau des point-multiples.

nous allons présenter dans le paragraphe suivant, dite méthode FETI-DP, introduite par [23], permet comme nous allons le voir un traitement plus élégant du problème de raccord au niveau des point-multiples dans les méthodes de décompositions de domaines.

4.6 Méthode FETI-DP

La méthode FETI-DP est à la base une méthode de complément de Schur duale (FETI), où le raccord fort des déplacements est maintenu au niveau des point-multiples. Au vu de sa popularité, elle a fait l'objet de nombreuses publications [23, 47, 17, 37, 38].

4.6.1 Interprétation de la formulation discrète

Supposons qu'on ait une partition du domaine Ω comportant des point-multiples. On notera l'ensemble de ces points $\mathcal{C}$. Comme dans la méthode FETI, on supposera les déplacements à priori discontinus sur l'interface globale Γ, sauf que dans l'approche FETI-DP, une continuité des déplacements est maintenue au niveau des points appartenant à $\mathcal{C}$ (voir Figure 4.6). Cela revients à imposer des conditions aux limites ponctuelles, ceci est valable

uniquement dans le cas discret.
Le raccord sur le reste de l'interface est assuré, comme on l'a vu précédemment, par la condition de continuité (4.24).

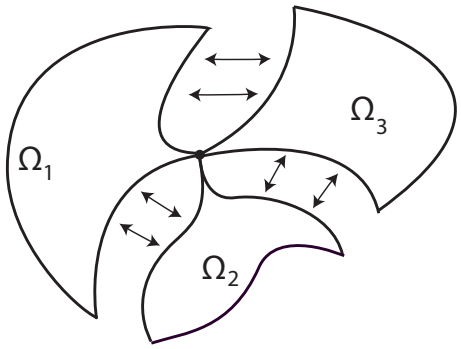


FIGURE 4.6 – Maintien de la continuité aux niveau des point-multiples.

La méthode FETI-DP, consiste alors à se donner un multiplicateur d'interface (effort global) λ sur Γ, à priori inconnu et un déplacement μ continu aux point-multiples (à priori inconnu lui aussi) et à résoudre les problèmes locaux suivants :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Trouver } \mathbf{u}_i \text{ solution de} & \\ -\Delta \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i, & \text{sur } \Omega_i, \\ \mathbf{u}_i = 0, & \text{sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{n}} = B^{(i)}\lambda, & \text{sur } \Gamma_i, \\ \mathbf{u}_i = B_c^{(i)}\mu, & \text{aux points } \mathcal{C}, \end{array}\right. \tag{4.56}$$

où : $B_c^{(i)}$ et $B^{(i)}$ sont des opérateurs de restriction respectivement sur $\mathcal{C}$ et Γ_i.

On remarquera que les problèmes (4.56) ne sont pas totalement découplés, dans le sens ou un raccord primal est maintenu au niveau des point-multiples. A la différence de la méthode FETI classique ou la solution recherchée appartenait à l'espace de Sobolev "brisé" :

$$X = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega); \mathbf{v}_i = \mathbf{v}|_{\Omega_i} \in H^1_{0,\partial\Omega_i \setminus \Gamma_i}(\Omega_i)\}, \tag{4.57}$$

ici la solution est recherchée dans l'espace :

$$\begin{aligned} X = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega); \mathbf{v}_i = \mathbf{v}|_{\Omega_i} \in H^1_{0,\partial\Omega_i\ \Gamma_i}(\Omega_i) \text{ tel que :} \\ [\mathbf{v}]_{\Gamma_{ij}} \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_{ij}),\ \forall \Gamma_{ij} \in \Gamma\}, \end{aligned} \tag{4.58}$$

c'est-à-dire dans l'espace des fonctions **v** dont le saut est nul au niveau des point-multiples. On n'omettra pas d'associer aux problèmes (4.56) la condition de continuité aux interfaces :

$$\sum_{i=1}^{N_s} B^{(i)}\mathbf{u}_i = 0, \text{ sur } \Gamma, \tag{4.59}$$

qui assurera que les solution $\mathbf{u}_i$ sont les restrictions de la solution globale recherchée.

4.6.2 Interprétation au niveau discret

En distinguant les degrés de liberté associés aux point-multiples (indicés c) de ceux appartenant au sous-domaine Ω_i (indicés r), la matrice de rigidité, les vecteurs déplacement et les efforts associés aux problèmes (4.56) s'écrivent :

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} A_{rr}^{(i)} & A_{rc}^{(i)} \\ A_{rc}^{(i)^T} & A_{cc}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_r^{(i)} \\ \mathbf{u}_c^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_r^{(i)} \\ \mathbf{f}_c^{(i)} \end{pmatrix}. \tag{4.60}$$

On partitionnera, aussi les composantes $\mathbf{u}_r^{(i)}$ de la sorte :

$$\mathbf{u}_r^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_I^{(i)} \\ \mathbf{u}_\Gamma^{(i)} \end{pmatrix}, \tag{4.61}$$

où l'indice I désigne les degrés de liberté interne au sous-domaine Ω_i, et l'indice Γ désigne le reste des degrés de liberté sur l'interface Γ_i excepté bien sûr ceux associés aux point-multiples.

En désignant par $\mathbf{u}_c$ le vecteur contenant tous les degrés de liberté associés aux point-multiples, on définit sur chaque sous-domaine Ω_i deux matrices booléennes $B_r^{(i)}$ et $B_c^{(i)}$ (associées aux opérateurs de restriction aux interfaces Γ_i et aux point-multiples respectivement) tels que :

$$B_r^{(i)}\mathbf{u}_r^{(i)} = \pm\mathbf{u}_\Gamma^{(i)}, \qquad B_c^{(i)}\mathbf{u}_c = \mathbf{u}_c^{(i)} \tag{4.62}$$

Les équations d'équilibre relatives aux problèmes (4.56) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} A_{rr}^{(i)}\mathbf{u}_r^{(i)} + A_{rc}^{(i)}B_c^{(i)}\mathbf{u}_c &= \mathbf{f}_r^{(i)} - B_r^{(i)^T}\lambda, \\ \sum_{i=1}^{N_s} B_c^{(i)^T}A_{rc}^{(i)^T}\mathbf{u}_r^{(i)} + \sum_{i=1}^{N_s} B_c^{(i)^T}A_{cc}^{(i)}B_c^{(i)}\mathbf{u}_c &= \sum_{i=1}^{N_s} B_c^{(i)^T}\mathbf{f}_c^{(i)}, \end{aligned} \tag{4.63}$$

et la condition de continuité (4.59) :

$$\sum_{i=1}^{N} B_r^{(i)}\mathbf{u}_r^{(i)} = 0. \tag{4.64}$$

A partir de la première équation de (4.63) on a :

$$\mathbf{u}_r^{(i)} = A_{rr}^{(i)^{-1}} \left(\mathbf{f}_r^{(i)} - B_r^{(i)^T} \lambda - A_{rc}^{(i)} B_c^{(i)} \mathbf{u}_c \right), \tag{4.65}$$

et en faisant une substitution dans (4.64) et en utilisant la deuxième équation de (4.63) on obtient le système condensé à l'interface suivant :

$$\begin{pmatrix} K_{\Gamma\Gamma} & K_{\Gamma c} \\ K_{\Gamma c}^T & K_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mathbf{u}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_\Gamma \\ F_c \end{pmatrix}, \tag{4.66}$$

où :

$$\begin{aligned} K_{rr} &= \sum_{i=1}^{N} B_r^{(i)} A_{rr}^{(i)^{-1}} B_r^{(i)^T}, \\ K_{rc} &= \sum_{i=1}^{N} B_r^{(i)} A_{rr}^{(i)^{-1}} A_{rc}^{(i)} B_c^{(i)}, \\ K_{cc} &= \sum_{i=1}^{N} \left(A_{rc}^{(i)} B_c^{(i)} \right)^T A_{rr}^{(i)^{-1}} \left(A_{rc}^{(i)} B_c^{(i)} \right) - \sum_{i=1}^{N} B_c^{(i)^T} A_{cc}^{(i)} B_c^{(i)}, \\ F_r &= \sum_{i=1}^{N} B_r^{(i)} A_{rr}^{(i)^{-1}} \mathbf{f}_r^{(i)}, \\ F_c &= \mathbf{f}_c - \sum_{i=1}^{N} B_c^{(i)^T} A_{rc}^{(i)^T} A_{rr}^{(i)^{-1}} \mathbf{f}_r^{(i)}. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Le problème (4.66) est un problème Primal-Dual dans le sens où il est relatif aux multiplicateurs de Lagrange duaux λ et les inconnues primles $\mathbf{u}_c$ (les degrés de liberté du déplacement).

En éliminant par un procédé de condensation les déplacements $\mathbf{u}_c$ de (4.66), la méthode FETI-DP consiste alors à solutionner le problème d'interface symétrique défini positif suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \lambda \text{ tel que :} \\ \left(K_{rr} - K_{rc} K_{cc}^{-1} K_{rc}^T \right) \lambda = F_r - K_{rc} K_{cc}^{-1} F_c. \end{cases} \tag{4.68}$$

Remarque 4.6.1. *Une propriété importante de méthode FETI-DP est que le maintien d'un raccord fort au niveau des point-multiples, permet une transmission de l'information entre les sous-domaines d'une manière globale, contrairement aux méthodes de décomposition de domaine classiques où l'information se transmet entre sous-domaines voisins. Cette particularité, permet d'accélérer la convergence et de réduire la dépendance de la méthode FETI-DP par rapport au nombre de sous-domaines (i.e. l'extensibilité).*

4.7 Application numérique

Pour terminer cette présentation des différentes MDD, on fera une comparaison sur le nombre d'itérations nécessaires à la convergence des 3 méthodes Primal, Duale (FETI) et mixte, appliquèes pour résoudre un cas-test de la forme (4.1), où la solution analytique est donnée par :

$$\mathbf{u}(x,y) = \begin{bmatrix} 16xy(1-x)(1-y) \\ \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) + xy(1-x)^3(1-y)^3 \end{bmatrix}. \tag{4.69}$$

Pour cela une approximation par une méthode d'éléments finis continus d'ordre 2 est considérée dans les 3 méthodes. On prendra une décomposition en bandes de Ω en N_s sous-domaines exempte de point-multiples. Le pas de maillage considéré dans les tests est $h = 1/20$ générant approximativement 5500 ddl.

Le problème condensé à l'interface dans chacune des trois MDD sera résolu en utilisant un algorithme itératif de type GMRES(m) [60, 59], où l'entier m indique la dimension de l'espace de Krylov utilisé, généralement appelé *restart*. On prendra zéro comme valeur initiale et la norme du résidu relatif $\leq 10^{-6}$ comme critère d'arrêt du solveur GMRES. La Figure 4.7 montre un avantage certain pour la méthode FETI en termes de nombre d'itérations, suivie de la méthode mixte (augmentation de 30% du nombre d'itérations). On notera aussi une dépendance du nombre d'itérations par rapport au nombre de sous-domaines de la partition pour les 3 méthodes, ceci est dû à l'absence d'un problème grossier qui permettrait une transmission globale de l'information entre les sous-domaines comme par exemple dans les méthodes FETI-DP.

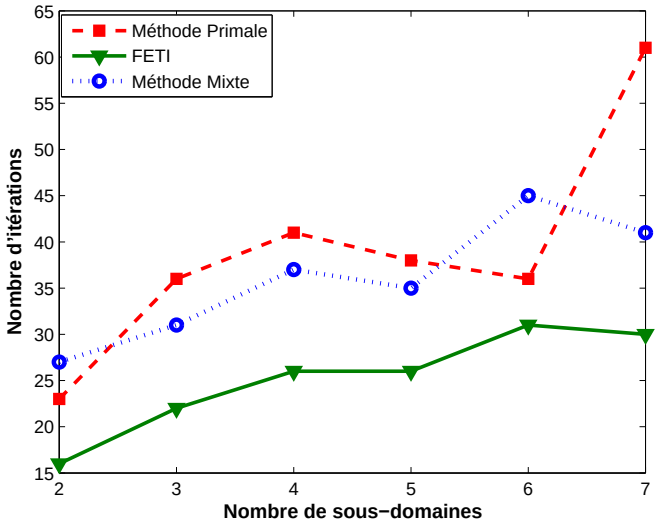


FIGURE 4.7 – Comparatif du nombre d'itérations nécessaire à la convergence des 3 MDD (primale, duale et mixte) pour résoudre un problème elliptique avec une partition en bandes de Ω et sans préconditionnement du solveur itératif.

Chapitre 5

MDD mixte pour le système de Stokes

Dans ce chapitre, on s'intéressera à développer une méthode de décomposition mixte pour le système discret de Stokes résultant d'une discrétisation par une méthode d'éléments finis. La méthode que nous allons présenter, prend en compte des décompositions du domaine géométrique de Ω comportant des point-multiples.

La construction de la méthode ainsi que les résultats théoriques que nous allons présenter concernent essentiellement les schémas d'éléments finis où une approximation continue de la pression est considérée. Cependant, cette construction s'adapte de manière beaucoup plus simple au cas d'une approximation discontinue de la pression.

L'approche adoptée pour circonscrire le problème lié à la présence de point-multiples dans notre décomposition est celle considérée dans les méthode FETI-DP [23] et qui consiste à maintenir une continuité forte au niveau des point-multiples. Sur les interfaces, les déplacements de la vitesses et de la pression seront supposés a priori discontinue. On introduira, alors des multiplicateurs de Lagrange, comme dans le cas des MDD mixtes pour les problèmes elliptiques présentés dans le chapitre précédent, pour assurer la continuité des déplacements de la vitesse et de la pression. Les premiers multiplicateurs, notés dans la suite de ce chapitre Φ correspondront dans le cas continu à une combinaison linéaire de la vitesse et du vecteur normal des contraintes, les deuxièmes notés par la suite ψ correspondront à la pression.

On obtiendra un système linéaire augmenté qui sera exactement équivalent au problème de Stokes discret. Ceci fera en sorte que les systèmes locaux seront augmentés par une matrice masse d'interface. On démontrera alors la stabilité de ces systèmes locaux (sans avoir à imposer que la pression soit de moyenne nulle localement) ainsi que celle du système global augmenté. Comme cela est caractéristique des MDD mixtes, le problème est réduit alors à la résolution d'un système linéaire implicite relatif aux multiplicateurs de Lagrange d'interfaces. Un résultat de la convergence de la méthode est par la suite démontré. Ce travail a fait l'objet d'une publication [4].

On rappelle la formulation variationnelle discrète du système de Stokes (1.15) donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in X^h, p \in M_0^h \\ a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},p) = (\mathbf{f},\mathbf{v})_\Omega, & \forall \mathbf{v} \in X^h, \\ b(\mathbf{u},q) = 0, & \forall q \in M_0^h, \end{cases} \tag{5.1}$$

où M_0^h est le sous-espace des fonctions de M^h qui vérifient le contrainte de moyenne nulle $\big(M_0^h = M^h \cap L_0^2(\Omega)\big)$.
On supposera que la paire d'éléments finis mixte (X^h, M_0^h) satisfait la condition inf-sup usuelle de Brezzi, i.e. il existe une constante positive β, indépendante de h tel que :

$$\sup_{\mathbf{v}\in X^h} \frac{b(\mathbf{v},q)}{\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}} \geq \beta \|q\|_{0,\Omega}, \quad \forall q \in M_0^h. \tag{5.2}$$

Dans la section suivante, on introduira quelques notations utiles par la suite dans le présentation de la méthode de décomposition mixte considérée.

5.1 Notations utiles de la MDD

On supposera que le maillage $\mathcal{T}^h$ est compatible avec la décomposition de Ω en N sous-domaines $\{\Omega_i\}_{i=1}^N$, i.e. $\mathcal{T}^h$ induit un maillage local $\mathcal{T}_i^h$ sur chaque sous-domaine Ω_i de telle sorte que chaque élément de $\mathcal{T}^h$ soit contenu dans exactement un Ω_i. On notera, comme cela a été fait dans le chapitre 4, par $\Gamma_{ij} = \overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j$, $1 \leq i < j \leq N$ l'interface de deux sous-domaines, quand elle existe (c'est-à-dire quand son intérieur n'est pas l'ensemble vide).

Pour chaque sous-domaine, on définit X_i^h un sous-espace de $H^1(\Omega_i)$ et M_i^h un sous espace de $L^2(\Omega_i)$, dont les éléments sont les restrictions à Ω_i de fonctions de X^h and M^h respectivement. On notera que par définition, les éléments de X_i^h ont une trace nulle sur $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega$.

Pour les besoins de la description de la MDD, on considérera les espaces X_B^h de la vitesse et M_B^h de la pression, les espaces d'éléments finis, contenant X^h et M^h respectivement, dont les éléments peuvent être discontinus au travers des interfaces Γ_{ij} exceptés au point-multiples, définis par :

$$X_B^h = \{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^n;\, \mathbf{v}|_{\Omega_i} \in X_i^h, \quad \mathbf{v} \text{ est continu aux point-multiples } \}, \tag{5.3}$$

$$M_B^h = \{q \in L^2(\Omega);\, q|_{\Omega_i} \in M_i^h, \quad q \text{ est continu aux point-multiples}\}. \tag{5.4}$$

Dans ces espaces de dimension finie, les degrés de liberté associés aux point-multiples sont communs à tous les sous-domaines partageant ces points. Ces espaces peuvent être vu comme une version "brisée" des espaces X^h et M^h respectivement, où la continuité de chaque fonction appartenant à X_B^h ou M_B^h est maintenue uniquement aux point-multiples. On associera de façon assez naturelle à ces espaces les normes :

$$\|\mathbf{v}\|_{X_B^h} = \left\{\sum_{i=1}^{N} \|\mathbf{v}|_{\Omega_i}\|_{1,\Omega_i}^2\right\}^{1/2}, \quad \|q\|_{X_B^h} = \left\{\sum_{i=1}^{N} \|q|_{\Omega_i}\|_{1,\Omega_i}^2\right\}^{1/2} \tag{5.5}$$

En se basant sur ces définitions, chaque fonction $\mathbf{v} \in X_B^h$ peut être décomposée de manière unique via ses valeurs nodales de la manière suivante :

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_c = \sum_{i=1}^{N} \left(\mathbf{v}_{i0} + \sum_{j \in \Lambda_i} \mathbf{v}_{ij}\right) + \mathbf{v}_c, \tag{5.6}$$

où $\mathbf{v}_{i0}$, $\mathbf{v}_{ij}$ et $\mathbf{v}_c$ représentent les composantes de $\mathbf{v}$ associées aux valeurs nodales se trouvant respectivement :

- à l'intérieur du sous-domaine Ω_i,
- sur l'intérieur de l'interface Γ_{ij},
- aux point-multiples.

La notation $j \in \Lambda_i$, comme signalé précédemment, est utilisée en référence a un sous-domaine Ω_j partageant une interface Γ_{ij} avec Ω_i.
Les fonctions pression aussi se décomposent de manière similaire :

$$q = \sum_{i=1}^{N} q_i + q_c = \sum_{i=1}^{N} \left(q_{i0} + \sum_{j \in \Lambda_i} q_{ij} \right) + q_c. \tag{5.7}$$

Se basant sur cette décomposition des fonctions de X_B^h et M_B^h on peut définir les espaces X_c^h et M_c^h engendrés respectivement par les composantes $\mathbf{v}_c^h \in X^h$ et $q_c^h \in M^h$ (composantes qui s'annulent en tous les noeuds exceptés ceux associés aux point-multiples) et les espaces $\mathring{X}_i^h$ et $\mathring{M}_i^h$, respectivement sous-espaces de fonctions de X_i^h et de M_i^h, qui s'annulent aux point-multiples :

$$X_B^h = X_c^h \oplus_{i=1}^N \mathring{X}_i^h, \quad M_B^h = M_c^h \oplus_{i=1}^N \mathring{M}_i^h, \tag{5.8}$$

Il est utile dans la suite de la description de la méthode de décomposition de domaine d'introduire, pour les espaces des multiplicateurs de Lagrange qui assurent le raccord des vitesses aux interfaces, la notation suivante :

$$W^h = \prod_{i=1}^{N} \prod_{j \in \Lambda_i} W_{ij}^h, \tag{5.9}$$

où W_{ij}^h est engendré par les traces sur $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$ des composantes $\mathbf{v}_{ij}$ de $\mathbf{v}_i \in X_i^h$:

$$W_{ij}^h = \{\Phi_{ij} \in (L^2(\Gamma_{ij}))^n;\ \exists \mathbf{v}_i \in \mathring{X}_i^h \text{ tel que } \Phi_{ij} = \mathbf{v}_{ij}|_{\Gamma_{ij}}\}. \tag{5.10}$$

On définit d'une manière similaire l'espace des multiplicateurs de la pression :

$$Y^h = \prod_{i=1}^{N} \prod_{j \in \Lambda_i} Y_{ij}^h, \tag{5.11}$$

avec :

$$Y_{ij}^h = \{\psi_{ij} \in L^2(\Gamma_{ij});\ \exists q \in \mathring{M}_i^h \text{ tel que } \psi_{ij} = q_{ij}|_{\Gamma_{ij}}\}. \tag{5.12}$$

On soulignera le fait que la continuité des fonctions aux point-multiples est maintenue d'une manière explicite grâce à la définition de l'espace des vitesses X_B^h et celui de la pression M_B^h. Aussi, il est important de noter pour la suite que toute valeur nodale d'un élément de W^h ou bien de Y^h correspondant à un point-multiple est nulle.

On définira sur les espaces d'inconnues d'interfaces W^h et Y^h les normes :

$$\|\cdot\|^2_{W^h} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\in\Lambda_i} c_{ij}(\cdot,\cdot), \tag{5.13}$$

$$\|\cdot\|^2_{Y^h} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\in\Lambda_i} d_{ij}(\cdot,\cdot), \tag{5.14}$$

induites par les produits scalaires L^2 définis sur Γ_{ij}, où la forme bilinéaire $c_{ij}(.,.)$ réfère à l'espace vectoriel $\left(L^2\left(\Gamma_{ij}\right)\right)^n$ et $d_{ij}(.,.)$ à l'espace scalaire $L^2\left(\Gamma_{ij}\right)$.

On peut alors énoncer les conditions de raccords pour qu'un vecteur $\mathbf{v} \in X_B^h$ (respectivement $q \in M_B^h$) soit dans X^h (respectivement M^h) de manière adaptée à la description de la méthode de décomposition de domaine présentée ici.

Proposition 5.1.1. *Tout vecteur $\boldsymbol{v} \in X_B^h$ (resp $q \in M_B^h$) est dans X^h (rep M^h) si et seulement si $\forall i = 1, ..., N$ et $j \in \Lambda_i$:*

$$\begin{gathered} c_{ij}(\boldsymbol{v}_{ij}, \Phi_{ij}) = c_{ij}(\boldsymbol{v}_{ji}, \Phi_{ij}), \quad \forall \Phi_{ij} \in W_{ij}^h. \\ \left(\textit{resp } d_{ij}(q_{ij}, \psi_{ij}) = c_{ij}(q_{ji}, \psi_{ij}), \quad \forall \psi_{ij} \in Y_{ij}^h\right). \end{gathered} \tag{5.15}$$

Démonstration. La démonstration est immédiate. □

5.2 Écriture équivalente du système discret de Stokes

Dans ce paragraphe on donnera une formulation équivalente du problème de Stokes discret (5.1) bien adaptée pour la méthode de décomposition de domaine que l'on va introduire par la suite. Dans cette nouvelle formulation, la solution recherchée appartient à l'espace "brisé" $X_B^h \times M_B^h$ et où les conditions de raccords (5.15) sur l'intérieur des interfaces Γ_{ij} sont relaxées à l'aide d'un paramètre $\lambda > 0$. Ces deux raccords seront relaxés par le même paramètre λ comme formulé dans le théorème suivant.

Théorème 5.2.1. *Soient $\lambda > 0$ un paramètre réel donné et $a_i(.,.)$, $b_i(.,.)$ les restrictions respectives des formes bilinéaires $a(.,.)$, $b(.,.)$ à Ω_i. Alors, le problème discret de Stokes*

(5.1) *est équivalent au système suivant :*

$$\left\{\begin{array}{l}(\boldsymbol{u},p)\in X_B^h\times\left(M_B^h\cap L_0^2(\Omega)\right),(\Phi,\psi)\in W^h\times Y^h\\ \left\{\begin{array}{l} i=1\ldots N \textit{ fixé}\\ a_i(\boldsymbol{u}_i\,,\boldsymbol{v}_i)+b_i(\boldsymbol{v}_i\,,p_i)+a_i(\boldsymbol{u}_c\,,\boldsymbol{v}_i)+b_i(\boldsymbol{v}_i\,,p_c)\\ \qquad\qquad +\lambda\sum\limits_{j\in\Lambda_i}c_{ij}(\boldsymbol{u}_{ij}\,,\boldsymbol{v}_{ij})=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_i)_{\Omega_i}+\sum\limits_{j\in\Lambda_i}c_{ij}(\Phi_{ij},\,\boldsymbol{v}_{ij})\\ b_i(\boldsymbol{u}_i\,,q_i)+b_i(\boldsymbol{u}_c\,,q_i)-\lambda\sum\limits_{j\in\Lambda_i}d_{ij}(p_{ij},q_{ij})=\sum\limits_{j\in\Lambda_i}d_{ij}(\psi_{ij},q_{ij}),\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{N}\Big(a_i(\boldsymbol{u}_i\,,\boldsymbol{v}_c)+b_i(\boldsymbol{v}_c\,,p_i)\Big)+a(\boldsymbol{u}_c\,,\boldsymbol{v}_c)+b(\boldsymbol{v}_c\,,p_c)=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_c),\\ \sum\limits_{i=1}^{N}b_i(\boldsymbol{u}_i\,,q_c)+b(\boldsymbol{u}_c\,,q_c)=0,\end{array}\right.\end{array}\right. \tag{5.16}$$

pout tout $(\boldsymbol{v},q)\in X_B^h\times\left(M_B^h\cap L_0^2(\Omega)\right)$. *Les inconnues d'interfaces* (Φ,ψ) *sont assujetties aux conditions de raccord :*

$$\Phi_{ij}=-\Phi_{ji}\,+2\,\lambda\,\boldsymbol{u}_{ji},\ \psi_{ij}=-\psi_{ji}\,-2\,\lambda\,p_{ji},\ \forall i=1,...,N \textit{ et } j\in\Lambda_i. \tag{5.17}$$

Démonstration. La démonstration revient à une simple vérification algébrique obtenue à partir d'une adaptation de la proposition 2.1 dans [3]. En effet, soit $(\mathbf{u},p)\in X_B^h\times\left(M_B^h\cap L_0^2(\Omega)\right)$ solution du problème (5.16) et vérifiant les conditions (5.17). On notera alors en utilisant la proposition 5.1.1 que $(\mathbf{u},p)$ est forcément dans $X^h\times\left(M^h\cap L_0^2(\Omega)\right)$. Aussi en écrivant les conditions de raccord (5.17) de la façon suivante :

$$\begin{array}{l}\Phi_{ij}+\Phi_{ji}=\lambda\,(\mathbf{u}_{ji}+\mathbf{u}_{ij}),\\ \psi_{ij}+\psi_{ji}=\lambda\,(p_{ji}+p_{ij}),\end{array}\qquad \text{pour tout } i=1,...,N \text{ et } j\in\Lambda_i, \tag{5.18}$$

et en sommant les équations résultant de (5.16) sur chaque interface pour des fonctions tests $(\mathbf{v},q)\in X^h\times\left(M^h\cap L_0^2(\Omega)\right)$, on observe que les produits scalaires relatifs aux formes $c(.,.)$ et $d(.,.)$ disparaissent. On conclut alors, que $(\mathbf{u},p)$ est solution du problème de Stokes discret (5.1).

Inversement, supposons que $(\mathbf{u},p)\in X^h\times\left(M^h\cap L_0^2(\Omega)\right)$ soit solution du problème (5.1). Alors forcément :

$$\mathbf{u}_{ij}=\mathbf{u}_{ji},\ p_{ij}=p_{ji},\ \forall i=1,\cdots,N,\forall j\in\Lambda_i. \tag{5.19}$$

D'autre part, pour tout $(\mathbf{v}, q) \in X_B^h \times \left(M_B^h \cap L_0^2(\Omega)\right)$ les deux applications :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{ij} \longmapsto^{L_1} & (f, \mathbf{v}_{ij})_{\Omega_i} - a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_{ij}) - b_i(\mathbf{v}_{ij}, p_i) - a_i(\mathbf{u}_c, \mathbf{v}_{ij}) \\ & -b_i(\mathbf{v}_{ij}, p_c) + \lambda\, c_{ij}(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_{ij}), \\ q_{ij} \longmapsto^{L_2} & -b_i(\mathbf{u}_i, q_{ij}) - b_i(\mathbf{u}_c, q_{ij}) - \lambda\, d_{ij}(p_i, q_{ij}), \end{aligned} \tag{5.20}$$

étant des formes linéaires définies respectivement sur W_{ij}^h et sur Y_{ij}^h, il existe $\Phi_{ij} \in W_{ij}^h$ et $\psi_{ij} \in Y_{ij}^h$ tels que :

$$c_{ij}(\Phi_{ij}, \mathbf{v}_{ij}) = L_1(\mathbf{v}_{ij}),\ d_{ij}(\psi_{ij}, q_{ij}) = L_2(q_{ij}). \tag{5.21}$$

En sommant les représentations obtenues pour chaque interface et en utilisant le fait que $(\mathbf{u}, p)$ est solution du problème de Stokes discret, on obtient :

$$\begin{aligned} &\forall y \in W_{ij}^h, \quad c_{ij}(\Phi_{ij} + \Phi_{ji}, y) = \lambda\, c_{ij}(\mathbf{u}_{ij} + \mathbf{u}_{ji}, y), \\ &\forall y \in Y_{ij}^h, \quad d_{ij}(\psi_{ij} + \psi_{ji}, y) = \lambda\, d_{ij}(p_{ij} + p_{ji}, y). \end{aligned}$$

A partir de (5.19) on en déduit alors que :

$$\Phi_{ij} = -\Phi_{ji} + 2\,\lambda\,\mathbf{u}_{ji},\ \psi_{ij} = -\psi_{ji} - 2\,\lambda\, p_{ji},\ \forall i = 1, ..., N \text{ et } j \in \Lambda_i.$$

□

Remarque 5.2.1. *On notera que :*

1. *Dans le cas d'une approximation par une méthode d'éléments finis discontinue de la pression, la forme bilinéaire $d_{ij}(\cdot,\cdot)$ disparaît dans la formulation* (5.16)*. Et dans ce cas là, on n'a pas besoin de raccorder la pression sur les interfaces et l'espace M_B^h sera simplement réduit à l'espace M^h.*

2. *La première condition dans* (5.17) *traduit, au niveau discret, le raccord de la vitesse et de la composante normale du vecteur des contraintes. Au niveau continu, ce raccord s'écrit (voir [49, 42]) :*

$$\mu \frac{\boldsymbol{u}_i}{\boldsymbol{n}_{ij}} - p_i \boldsymbol{n}_{ij} + \lambda \boldsymbol{u}_i = -\mu \frac{\boldsymbol{u}_j}{\boldsymbol{n}_{ji}} + p_i \boldsymbol{n}_{ji} + \lambda \boldsymbol{u}_j \tag{5.22}$$

où $\lambda > 0$ est le paramètre défini dans le théorème (5.2.1) *et $\boldsymbol{n}_{ij}$ est le vecteur normal à Γ_{ij} dirigé vers l'extérieur de Ω_i. La deuxième condition dans* (5.17) *a été posé pour assurer la continuité de la pression au niveau du schéma d'éléments finis. Elle n'a pas lieu d'être dans le cas d'une approximation discontinue de la pression.*

3. *En prenant $\lambda = 0$, ce qui revient à considérer des conditions aux bords sur les interfaces de type de Neumman au lieu de considérer celle de type Fourier-Robin, conduit à des problèmes locaux non-inversibles ou du moins non-inversibles d'une façon stable. De plus, la propriété d'équivalence établie dans le théorème précédent ne sera plus assurée.*

5.3 Écriture matricielle et algorithme de la méthode

La méthode de décomposition de domaine mixte se résumera, comme on l'a vu dans le cas des problèmes elliptiques dans le chapitre précédent, à un procédé itératif ayant pour objectif de déterminer les bonnes inconnues d'interfaces $(\Phi, \psi) \in W^h \times Y^h$. A chaque itération du procédé, on aura à résoudre le système (5.16). En notant par X_i le vecteur des valeurs nodales de $(\mathbf{u}_i, p_i) \in \mathring{X}_i^h \times \mathring{M}_i^h$ et par X_c celui des valeurs nodales de $(\mathbf{u}_c, p_c)$, ce système peut s'écrire sous la forme quasi-diagonale suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & & & \mathcal{A}_{1c} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \mathcal{A}_{NN} & \mathcal{A}_{Nc} \\ \mathcal{A}_{1c}^t & \cdots & & A_{cc} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \\ X_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{F}_N \\ \mathcal{F}_c \end{bmatrix}, \tag{5.23}$$

où les matrices locales $\mathcal{A}_{ii}$ et $\mathcal{A}_{ic}$ sont données par :

$$\mathcal{A}_{ii} = \begin{bmatrix} A_{ii} + \lambda C_{ii} & B_{ii} \\ B_{ii}^t & -\lambda D_{ii} \end{bmatrix}, \mathcal{A}_{ic} = \begin{bmatrix} A_{ic} & B_{ic} \\ B_{ci} & 0 \end{bmatrix},$$

avec :

$$\begin{aligned} &A_{ii},\ A_{ic} \text{ et } A_{cc}, \text{ les matrices de rigidité associées à } a(\cdot,\cdot), \\ &B_{ii},\ B_{ic}, B_{ci} \text{ et } B_{cc}, \text{ les matrices de rigidité associées à } b(\cdot,\cdot), \\ &C_{ii} \text{ les matrices masse d'interface associées à } \sum_{j\in\Lambda_i} c_{ij}(\cdot,\cdot), \\ &D_{ii} \text{ les matrices masse d'interfaces associées à } \sum_{j\in\Lambda_i} d_{ij}(\cdot,\cdot). \end{aligned} \tag{5.24}$$

Les composantes du second membre $\mathcal{F}_i$ et $\mathcal{F}_c$ représentent les vecteurs colonnes associées respectivement à :

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{f}, \mathbf{v}_i)_{\Omega_i} + \sum_{j\in\Lambda_i} c_{ij}(\Phi_{ij}, \mathbf{v}_i) \\ \sum_{j\in\Lambda_i} d_{ij}(\psi_{ij}, q_i) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (\mathbf{f}, \mathbf{v}_c) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pour résoudre le système (5.23) de manière efficace, on considérera un complément de Schur relatif à X_c :

$$\left(A_{cc} - \sum_{i=1}^{N} \mathcal{A}_{ic}^t \mathcal{A}_{ii}^{-1} \mathcal{A}_{ic} \right) X_c = \mathcal{F}_c - \sum_{i=1}^{N} \mathcal{A}_{ic}^t \mathcal{A}_{ii}^{-1} \mathcal{F}_i, \tag{5.25}$$

ceci réduira le couplage aux point-multiples à un simple post-processing de solutions de problèmes complètement découplés définis sur les sous-domaines Ω_i :

$$\mathcal{A}_{ii} X_i = (\mathcal{F}_i - \mathcal{A}_{ic} X_c) . \tag{5.26}$$

A chaque itération de la méthode de décomposition de domaine, les problèmes locaux seront résolus deux fois, une première fois pour calculer les vecteurs $\mathcal{A}_{ii}^{-1}\mathcal{A}_{ic}$ et $\mathcal{A}_{ii}^{-1}\mathcal{F}_i$ et une deuxième fois pour obtenir X_i à partir de (5.26). Entre ces deux séries de solutions locales est insérée une inversion du système (5.25) relatif au degrés de libertés supportés par les point-multiples.

Remarque 5.3.1. *On notera que :*

1. *On soulignera le fait que chaque matrice locale $\mathcal{A}_{ii}$ est augmentée par les matrices d'interfaces C_{ii} et D_{ii} , contrairement à une méthode FETI-DP pure où les matrices locales restent inchangées.*
2. *Dans l'algorithme développé précédemment, les systèmes* (5.26) *et* (5.25) *sont résolus par des méthodes directes. La taille du système* (5.25) *étant petite (elle est égale à deux fois le nombre de degrés de liberté associés aux point-multiples), on procède de la manière suivante :*
   - *on effectue une factorisation LU de chaque matrice $\mathcal{A}_{ii}$, $i = 1 \cdots N$,*
   - *on calcule les quantités $\mathcal{A}_{ii}^{-1}\mathcal{A}_{ic}$ and $\mathcal{A}_{ii}^{-1}\mathcal{F}_i$, $i = 1 \cdots N$ par un procédé de remontée et de descente,*
   - *on utilise une méthode de résolution directe pour résoudre le système* (5.25).

   Enfin, on effectue un procédé de remontée et de descente sur les matrices $\mathcal{A}_{ii}$ pour calculer X_i, $i = 1 \cdots N$ les solutions des problèmes locaux (5.26).

5.4 Stabilité de la MDD mixte du système de Stokes

Dans ce paragraphe, on s'assurera que l'algorithme de la méthode de décomposition développée si-dessus est bien défini en démontrant des estimations de stabilité là où il y

a inversion de systèmes linéaires. La stabilité est importante dans le sens où même s'il peut être prouvé que les systèmes linéaires ci-dessus sont algébriquement inversibles, l'algorithme ne peut être fiable que si les solutions de ces systèmes sont majorées par les données lorsque $h \to 0$. Ainsi on montrera ces majorations en termes de normes convenablement choisies.
D'autre part, les résultats de stabilité démontrés ci-après sont des outils indispensables pour s'assurer que le procédé itératif déterminant les inconnues d'interfaces $(\Phi, \psi) \in W^h \times Y^h$ converge.

Les estimations de stabilité que nous allons démontrer sont exprimées en normes H^1 sur les sous-domaines Ω_i et en normes L^2 sur les interfaces Γ_{ij} pour l'espace Y^h. On commencera dans un premier temps par donner un résultat assaurant que les problèmes locaux peuvent être inversés d'une manière stable. Dans ce qui suit C désigne une constante générique positive indépendante de h, qui n'est pas forcément la même à chaque fois.

5.4.1 Stabilité des problèmes locaux

On démontrera un résultat de stabilité relative aux problèmes locaux (5.26) dont l'écriture sous forme variationnelle est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i \in \mathring{X}_i^h, p_i \in \mathring{M}_i^h, \\ a_i^\lambda(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) + b_i(\mathbf{v}_i, p_i) = L_i \mathbf{v}_i, \quad \forall \mathbf{v}_i \in \mathring{X}_i^h, \\ b_i(\mathbf{u}_i, q_i) - \lambda \sum_{j \in \Lambda_i} d_{ij}(p_{ij}, q_{ij}) = \chi q_i, \quad \forall q_i \in \mathring{M}_i^h, \end{cases} \tag{5.27}$$

où : L_i et χ sont deux formes linéaires définies respectivement sur X_i^h et M_i^h et la forme bilinéaire augmentée $a_i^\lambda(\cdot,\cdot)$ est définie par :

$$a_i^\lambda(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) = a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) + \lambda \sum_{j \in \Lambda_i} c_{ij}(\mathbf{u}_{ij}, \mathbf{v}_{ij}), \tag{5.28}$$

Les problèmes locaux (5.27) entrent dans le cadre des formulation mixtes d'éléments finis introduits au chapitre 3, aussi on commencera dans un premier temps par démontrer la seconde condition de stabilité de Brezzi (c.f, [26, 11]), dite aussi condition inf-sup.

Lemme 5.4.1. *Pout tout $i = 1 \cdots N$, il existe une constante $\beta > 0$ indépendante de h telle que :*

$$\sup_{\|\mathbf{v}_i\|_{1,\Omega_i} \leq 1} b(\mathbf{v}_i, q_i) \geq \beta \|q_i\|_{0,\Omega_i}, \quad \forall q_i \in \mathring{M}_i^h. \tag{5.29}$$

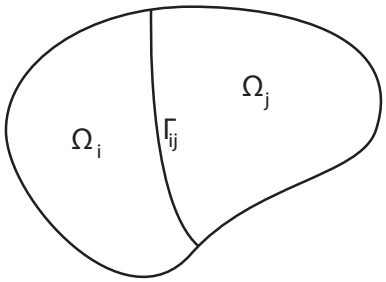


FIGURE 5.1 – Extension de $q_i \in M_i^h$ par zéro sur Ω_j.

Démonstration. La démonstration de la condition inf-sup (5.29) est une adaptation de celle donnée dans [54] pour le cas d'un domaine avec des conditions aux bords de type Dirichlet-Neumann. L'idée principale est de prendre un domaine $\Omega_j, j \in \Lambda_i$, ayant une interface avec Ω_i et de constater que toute fonction $\mathbf{v}_i \in X_i^h$ ayant une trace nulle sur $\partial\Omega_i$ excepté sur Γ_{ij} appartient à l'espace $\mathring{X}_i^h$.

En effet, soit $q_i \in M_i^h$ et $\tilde{q}_i$ son extension par zéro sur $\tilde{\Omega}_i = \overline{\Omega}_i \cup \overline{\Omega}_j$, avec Ω_j un sous-domaine voisin ayant une interface Γ_{ij} avec Ω_i (voir Figure 5.1). En notant la valeur moyenne de cette dernière sur $\tilde{\Omega}_i$ par $\overline{\tilde{q}}_i = \dfrac{1}{\tilde{\Omega}_i}\displaystyle\int_{\tilde{\Omega}_i} \tilde{q}_i \, dx$ et en remarquant que $(\tilde{q}_i - \overline{\tilde{q}}_i) \in M^h(\tilde{\Omega}_i) \cap L_0^2(\tilde{\Omega}_i)$, il existe alors $\tilde{\mathbf{v}} \in X^h(\tilde{\Omega}_i) \cap (H_0^1(\tilde{\Omega}_i))^2$, $\tilde{\mathbf{v}} \neq 0$, tel que :

$$b(\tilde{\mathbf{v}}_i, \tilde{q}_i - \overline{\tilde{q}}_i) \geq \beta \, \|\tilde{\mathbf{v}}_i\|_{1,\tilde{\Omega}_i} \cdot \|\tilde{q}_i - \overline{\tilde{q}}_i\|_{0,\tilde{\Omega}_i}.$$

Soit $\mathbf{v}_i \in X_i^h$ la restriction de $\tilde{\mathbf{v}}_i$ à Ω_i, on peut avoir alors :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{v}_i, q_i) &= b(\tilde{\mathbf{v}}_i, \tilde{q}_i) = b(\tilde{\mathbf{v}}_i, \tilde{q}_i - \overline{\tilde{q}}_i) \\ &\geq \beta \, \|\tilde{\mathbf{v}}_i\|_{1,\tilde{\Omega}_i} \cdot \|\tilde{q}_i - \overline{\tilde{q}}_i\|_{0,\tilde{\Omega}_i} \\ &\geq \beta \, \|\mathbf{v}_i\|_{1,\Omega_i} \cdot \|q_i - \overline{\tilde{q}}_i\|_{0,\Omega_i}. \end{aligned}$$

Comme $\|q_i\|_{0,\Omega_i} \leq \|q_i - \overline{\tilde{q}}_i\|_{0,\Omega_i} + \|\overline{\tilde{q}}_i\|_{0,\Omega_i}$ et :

$$\|\overline{\tilde{q}}_i\|_{0,\Omega_i}^2 = \frac{|\Omega_i|}{|\tilde{\Omega}_i|^2} \left(\int_{\tilde{\Omega}_i} \tilde{q}_i dx \right)^2 = \frac{|\Omega_i|}{|\tilde{\Omega}_i|^2} \left(\int_{\Omega_i} q_i dx \right)^2 \leq \frac{|\Omega_i|^2}{|\tilde{\Omega}_i|^2} \, \|q_i\|_{0,\Omega_i}^2,$$

on déduit que $\left(1 - \dfrac{|\Omega_i|}{|\tilde{\Omega}_i|}\right) \cdot \|q_i\|_{0,\Omega_i} \leq \|q_i - \overline{\tilde{q}}_i\|_{0,\Omega_i}$ et par la suite

$$b(\mathbf{v}_i, q_i) \geq \beta^* \, \|\mathbf{v}_i\|_{1,\Omega_i} \cdot \|q_i\|_{0,\Omega_i},$$

avec $\beta^* = \left(1 - \dfrac{|\Omega_i|}{|\tilde{\Omega}_i|}\right) \beta$. □

Remarque 5.4.1. *Notons les points suivants :*

1. *Localement la pression n'a pas besoin d'être de moyenne nulle pour assurer la seconde condition de stabilité de Brezzi, contrairement aux méthodes de décomposition primale ou duale (FETI) appliquées au problème de Stokes où il aurait fallu décomposer la pression en composantes nulles localement et en composantes constantes sur chaque sous-domaine [40, 33, 34, 51] pour avoir la condition inf-sup locale.*
2. *On rappelle que $q_i \in \mathring{M}_i^h$ signifie que $q_i \in M_i^h$ et que ces valeurs nodales associées aux point-multiples sont nulles. Cependant, cette propriété ne joue aucun rôle lors de la démonstration de la condition inf-sup local* (5.29) *qui reste valable pour $q_i \in M_i^h$. Ce point est important par la suite dans la démonstration de la stabilité de l'algorithme de la MDD.*

On peut maintenant donner le résultat important de stabilité locale suivant :

Théorème 5.4.1. *Sous l'hypothèse de stabilité* (5.2)*, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que la solution des problèmes locaux*

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{u}_i \in \mathring{X}_i^h, p_i \in \mathring{M}_i^h, \\ a_i^\lambda(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i) + b_i(\boldsymbol{v}_i, p_i) = L_i \boldsymbol{v}_i, \quad \forall \boldsymbol{v}_i \in \mathring{X}_i^h, \\ b_i(\boldsymbol{u}_i, q_i) - \lambda \sum_{j \in \Lambda_i} d_{ij}(p_{ij}, q_{ij}) = \chi q_i, \quad \forall q_i \in \mathring{M}_i^h, \end{array} \right. \tag{5.30}$$

vérifie

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{1,\Omega_i} + \|p_i\|_{0,\overline{\Omega}_i} \leq C \left(\sup_{\|\boldsymbol{v}_i\|_{1,\Omega_i} \leq 1} |L_i \boldsymbol{v}_i| + \sup_{\|q_i\|_{0,\overline{\Omega}_i} \leq 1} |\chi_i q_i| \right), \tag{5.31}$$

où $\|\cdot\|_{0,\overline{\Omega}_i}$ est la norme de graphe de M_i^h impliquant le norme usuelle L^2 définie sur Ω_i et la norme L^2 sur les interfaces

$$\|p_i\|_{0,\overline{\Omega}_i} = \sqrt{\|p_i\|_{0,\Omega_i}^2 + \sum_{j \in \Lambda_i} d_{ij}(p_{ij}, p_{ij})}. \tag{5.32}$$

Démonstration. On notera dans un premier temps que les formes bilinéaires évoquées dans la formulation du problème (5.30) sont uniformément majorées en termes de norme H^1 et de la norme de graphe introduite dans l'énoncé du théorème. La condition inf-sup étant démontrée dans le lemme précédent, reste à s'assurer de la première condition de stabilité de Brezzi (i.e. la coercivité de la forme bilinéaire $a_i^\lambda(\cdot,\cdot)$).

En notant que chaque partie d'interface Γ_{ij} contient strictement un ouvert borné ω_{ij}, au moins pour h assez petit, l'inégalité usuelle de Poincaré assure alors que la forme bilinéaire $a_i^\lambda(\cdot,\cdot)$ est uniformément coercive sur $H^1(\Omega_i)$:

$$a_i^\lambda(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i) \geq |\mathbf{v}_i|^2_{1,\Omega_i} + \lambda \sum_{j\in\Lambda_i} |\mathbf{v}_i|^2_{0,\omega_{ij}} > \alpha \|\mathbf{v}_i\|^2_{1,\Omega_i}, \tag{5.33}$$

où $\alpha > 0$ est une constante indépendante de h. Ici l'expression "ω_{ij} est strictement contenu dans Γ_{ij}" traduit le fait que la fermeture $\overline{\omega}_{ij}$ est contenue dans l'intérieur de Γ_{ij}.

On s'attellera maintenant à donner les différents arguments permettant d'avoir l'estimation (5.31). Une simple combinaison des équations (5.30) donnera :

$$a_i^\lambda(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i) + \lambda \sum_{j\in\Lambda_i} d_{ij}(p_i,p_i) = L_i\mathbf{u}_i - \chi_i p_i. \tag{5.34}$$

On obtient alors la majoration suivante :

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_i\|^2_{1,\Omega_i} + \sum_{j\in\Lambda_i} d_{ij}(p_{ij},p_{ij}) \leq \\ &\qquad C\left(\sup_{\|\mathbf{v}_i\|_{1,\Omega_i}\leq 1} |L_i\mathbf{v}_i|^2 + \sup_{\|q_i\|_{0,\overline{\Omega}_i}\leq 1} |\chi_i q_i|^2\right)\left(\|\mathbf{u}_i\|^2_{1,\Omega_i} + \|p_i\|^2_{0,\overline{\Omega}_i}\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

On n'a pas assez de control, à ce niveau, sur la norme de graphe de p_i. On utilise alors la condition inf-sup pour avoir :

$$\beta\|p_i\|_{0,\Omega_i} \leq C_{a_i^\lambda}\|\mathbf{u}_i\|_{1,\Omega_i} + \sup_{\|\mathbf{v}_i\|_{1,\Omega_i}\leq 1} |L_i\mathbf{v}_i|, \tag{5.36}$$

avec $C_{a_i^\lambda}$ la constante de continuité de la forme bilinéaire $a_i^\lambda(\cdot,\cdot)$ sur $H^1(\Omega_i)\times H^1(\Omega_i)$. Ici on a utilisé le fait que $\mathbf{u}_i|_{\Gamma_{ij}} = \mathbf{u}_{ij}|_{\Gamma_{ij}}$ car $\mathbf{u}_i$ appartient à $\overset{o}{X}{}_i^h$.
En considérant les deux inégalités précédentes, on arrive à :

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_i\|^2_{1,\Omega_i} + \|p_i\|^2_{0,\overline{\Omega}_i} \leq \\ &\qquad C\left(\begin{array}{l} \left(\sup_{\|\mathbf{v}_i\|_{1,\Omega_i}\leq 1} |L_i\mathbf{v}_i| + \sup_{\|p_i\|_{0,\overline{\Omega}_i}\leq 1} |\chi_i q_i|\right)^2 + \\ \left(\sup\limits_{\|\mathbf{u}_i\|_{1,\Omega_i}\leq 1} |L_i\mathbf{v}_i|^2 + \sup\limits_{\|q_i\|_{0,\overline{\Omega}_i}\leq 1} |\chi_i q_i|^2\right)\left(\|\mathbf{u}_i\|^2_{1,\Omega_i} + \|p_i\|^2_{0,\overline{\Omega}_i}\right)^{1/2} \end{array}\right). \end{aligned} \tag{5.37}$$

La preuve est complétée à partir d'un raisonnement élémentaire sur le signe d'un polynôme

quadratique réel pour un $x \geq 0$ défini par :

$$\begin{aligned} x \mapsto x^2 - C \left(\sup_{\|\mathbf{v}_i\|_{1,\Omega_i} \leq 1} |L_i \mathbf{v}_i|^2 + \sup_{\|q_i\|_{G,\Omega_i} \leq 1} |\chi_i q_i|^2 \right)^{1/2} x \\ -C \left(\sup_{\|\mathbf{v}_i\|_{1,\Omega_i} \leq 1} |L_i \mathbf{v}_i|^2 + \sup_{\|q_i\|_{G,\Omega_i} \leq 1} |\chi_i q_i|^2 \right). \end{aligned} \tag{5.38}$$

□

5.4.2 Stabilité du problème lié aux point-multiples

Comme mentionné plus haut dans l'introduction de l'algorithme de la méthode FETI-DP, une inversion du système linéaire relatif aux degrés de liberté associés aux point-multiples est faite entre les deux résolution des problèmes locaux. Ainsi, on doit démontrer que ce système peut être résolu d'une manière stable. La stabilité de résolution des problèmes locaux étant établie, il suffit de démontrer que le système global, impliquant aussi bien les degrés de liberté locaux que ceux associés aux point-multiples, possède des propriétés de stabilité similaires.

Pour cela, on a besoin d'affiner un peu plus la définition de l'augmentation des équations locales. Cela se fait en remarquant que les composantes $\mathbf{v}_{ij}$ de $\mathbf{v}_i \in X_i^h$ et q_{ij} de $q_i \in M_i^h$ dans (5.6) et (5.7) peuvent être obtenues par le biais d'opérateurs algébriques définis comme suit :

$$\begin{array}{lll} \pi_{ij} : & W_{ij}^h \to W_{ij}^h & \sigma_{ij} : \quad Y_{ij}^h \to Y_{ij}^h \\ & \Phi \mapsto\mapsto \pi_{ij}\Phi & \psi \mapsto \sigma_{ij}\psi \end{array} \quad i = 1, \cdots, N, j \in \Lambda_i. \tag{5.39}$$

où $\pi_{ij}\Phi$ et $\sigma_{ij}\psi$ ont respectivement les mêmes degrés de liberté que ceux de Φ et ψ exceptés ceux associés aux point-multiples qui sont mis à zéro ; Φ est ψ sont ici égaux respectivement aux traces $\mathbf{v}_i|_{\Gamma_{ij}}$ de $\mathbf{v}_i \in X_i^h$ et de $q_i|_{\Gamma_{ij}}$ de $q_i \in M_i^h$.

Nous sommes maintenant en position de donner une formulation, mieux adaptée à l'étude de stabilité, du problème global (5.16) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \in X_B^h, p \in M_B^h \cap L_0^2(\Omega), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^N \Big(a_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_i(\mathbf{v}, p) \Big) + \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda_i} c_{ij}(\pi_{ij}\mathbf{u}, \pi_{ij}\mathbf{v}) = L\mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in X_B^h, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^N b_i(\mathbf{u}, q) - \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda_i} d_{ij}(\sigma_{ij}q, \sigma_{ij}q) = \chi q, \quad \forall q \in M_B^h \cap L_0^2(\Omega), \end{array} \right. \tag{5.40}$$

où L et χ sont deux formes linéaires définies sur X_B^h et M_B^h.
Dans (5.40), par souci d'alléger l'écriture, les restrictions à Ω_i, comme par exemple $\mathbf{u}|_{\Omega_i}$ et $q|_{\Omega_i}$ pour une fonction $\mathbf{u} \in X_B^h$ où $q \in M_B^h$, sont implicites.

Nous allons démontrer la stabilité du problème (5.40) en utilisant le cadre général des formulations mixtes. Les deux conditions de stabilité de Brezzi, à savoir la coercivité de la forme bilinéaire sur $X_B^h \times X_B^h$ et la condition inf-sup sur $X_B^h \times \left(M_B^h \cap L_0^2(\Omega)\right)$ seront obtenues par une simple déduction de celles préalablement établies au niveau local dans le théorème 5.4.1. De façon surprenante, c'est la continuité uniforme de la forme bilinéaire :

$$a_i(\cdot,\cdot) + \lambda \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in \Lambda_i} c_{ij}(\pi_{ij}\cdot, \pi_{ij}\cdot), \tag{5.41}$$

qui n'est plus aussi simple à établir. On démontrera une majoration relative sous des hypothèse techniques de régularité du maillage (c.f [9, 13]).

Lemme 5.4.2. *Sous les hypothèses que la méthode d'éléments finis relative aux vitesses satisfait les conditions suivantes :*

- *elle induit une méthode d'éléments finis sur la frontière,*
- *chaque triplé $\{T, P_T, \Sigma_T\}$, dans la terminologie de l'analyse de la méthode des éléments finis (cf., e.g., [13]), associé à un élément géométrique T d'une interface peut être obtenu à partir d'un élément fini de référence $\left\{\widehat{T}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma}\right\}$ en utilisant une bijection $F_T : \widehat{T} \to T$,*
- *le Jacobien de cette bijection F_T' satisfait la majoration suivante*

$$\max_{\widehat{x} \in \widehat{T}} |det\ F_T' \widehat{x}| / \min_{\widehat{x} \in \widehat{T}} |det\ F_T' \widehat{x}| \leq C, \tag{5.42}$$

  avec une constante indépendante de h.

Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que :

$$|a_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \lambda \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in \Lambda_i} c_{ij}(\pi_{ij}\boldsymbol{u}, \pi_{ij}\boldsymbol{v}| \leq C \|\boldsymbol{u}\|_{X_B^h} \|\boldsymbol{v}\|_{X_B^h}. \tag{5.43}$$

Démonstration. La démonstration sera une simple conséquence de la majoration suivante : il existe une constante indépendante de h telle que :

$$\int_T |\pi_{ij}\mathbf{u}|^2 dx \leq C \int_T |\mathbf{u}|^2 dx, \tag{5.44}$$

pour tout élément géométrique T contenu dans une interface Γ_{ij}.

Lorsque aucun point-multiple n'appartient à T, π_{ij} est simplement l'opérateur identité. Sinon, les hypothèses sur l'existence d'un élément référence permet de transférer la définition de l'opérateur de projection à un autre opérateur $\widehat{\pi}$ défini sur $\widehat{T}$ tel que la transformation définie par :

$$\widehat{\mathbf{u}}(\widehat{x}) = \mathbf{u}(F_T\widehat{x}), \tag{5.45}$$

permette d'écrire :

$$\widehat{\pi_{ij}\mathbf{u}} = \widehat{\pi}\widehat{\mathbf{u}}. \tag{5.46}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \int_T |\pi_{ij}\mathbf{u}|^2 dx &\leq \max_{\widehat{x}\in\widehat{T}} |\det F'_T\widehat{x}| \int_{\widehat{T}} |\widehat{\pi_{ij}\mathbf{u}}|^2 d\widehat{x} \\ &\leq \max_{\widehat{x}\in\widehat{T}} |\det F'_T\widehat{x}| \int_{\widehat{T}} |\widehat{\pi}\widehat{\mathbf{u}}|^2 d\widehat{x}. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Mais comme $\widehat{\pi}$ est une application linéaire de l'espace de dimension finie $\widehat{P}$ vers lui même on a :

$$\int_T |\pi_{ij}\mathbf{u}|^2 dx \leq C \max_{\widehat{x}\in\widehat{T}} |\det F'_T\widehat{x}| \int_{\widehat{T}} |\widehat{\mathbf{u}}|^2 d\widehat{x}. \tag{5.48}$$

De manière similaire, en revenant à une intégrale sur T, on obtient :

$$\int_T |\pi_{ij}\mathbf{u}|^2 dx \leq C \frac{\max\limits_{\widehat{x}\in\widehat{T}} |\det F'_T\widehat{x}|}{\min\limits_{\widehat{x}\in\widehat{T}} |\det F'_T\widehat{x}|} \int_{\widehat{T}} |\mathbf{u}|^2 d\widehat{x}. \tag{5.49}$$

La démonstration est alors une simple conséquence des propriétés supposées de la méthode d'éléments finis relative aux vitesses. □

Lemme 5.4.3. *Les formes bilinéaires introduites dans* (5.40) *satisfont les conditions de stabilité de Brezzi suivantes :*

$$\sum_{i=1}^{N} \Big(a_i(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \lambda \sum_{j\in\Lambda_i} \int_T |\pi_{ij}\boldsymbol{u}|^2 dx \Big) \geq \alpha \|\boldsymbol{u}\|^2_{X_B^h} \quad \forall \mathbf{u} \in X_B^h, \tag{5.50}$$

$$\sup_{\|\boldsymbol{v}\|_{X_B^h}\leq 1} \sum_{i=1}^{N} b_i(\boldsymbol{v},p) \geq \beta \|p\|_{0,\Omega} \quad \forall p \in M_B^h, \tag{5.51}$$

où α et β sont des constantes positives indépendantes de h.

Démonstration. La majoration (5.50) est obtenue par une simple extension de la démonstration donnée dans le théorème 5.4.1. Pour établir (5.51), on fixe q dans M^h et en combinant

la seconde condition de stabilité démontrée dans le lemme 5.4.1 avec le point N° 2 de la remarque 5.4.1, on peut affirmer qu'il existe une constante $\beta_i > 0$ indépendante de h et $\mathbf{v}_i \in X_i^h$ ayant une trace nulle sur $\partial\Omega_i$ excepté aux interfaces Γ_{ij} tels que $\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega_i} = 1$ et :

$$b_i(\mathbf{v}_i, q) \geq \beta_i \|q\|_{0,\Omega_i}. \tag{5.52}$$

On peut supposer que $q \neq 0$, autrement l'inégalité est satisfaite avec une constante arbitraire $\beta > 0$. En posant, $\beta = \min_{1\leq i\leq N} \beta_i$, on obtient facilement :

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\|q\|_{0,\Omega_i}}{\|q\|_{0,\Omega}} b_i(\mathbf{v}_i, q) \geq \frac{\beta}{\|q\|_{0,\Omega}} \sum_{i=1}^{N} \|q\|_{0,\Omega_i}^2 = \beta \|q\|_{0,\Omega}. \tag{5.53}$$

En définissant $\mathbf{v}$ sur Ω par $\mathbf{v}|_{\Omega_i} = (\|q\|_{0,\Omega_i}/\|q\|_{0,\Omega})\mathbf{v}_i$, on peut affirmer que $\mathbf{v} \in X_B^h$ puisqu'il est égal à zéro aux point- multiples. La fin de la démonstration est alors immédiate. □

On peut maintenant démontrer la principale propriété de stabilité de la méthode de décomposition mixte développée ici pour le problème de Stokes. En particulier, ceci assurera que l'algorithme ne casse pas et que la procédure itérative inhérente soit convergente.

Théorème 5.4.2. *Supposons qu'il existe une constante C indépendante de h telle que les formes bilinéaires L et χ définies sur X_B^h satisfassent*

$$|L\boldsymbol{v}| \leq C\|\boldsymbol{v}\|_{X_B^h}, \quad |\chi q| \leq C\|q\|_{X_B^h} \quad \forall(\boldsymbol{v}^h, q) \in X_B^h \times M_B^h. \tag{5.54}$$

Alors, toute solution du problème (5.40) *vérifie*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{X_B^h} + \|p\|_{0,\overline{\Omega}} \leq C \left(\sup_{\|\boldsymbol{v}\|_{X_B^h}\leq 1} |L\boldsymbol{v}| + \sup_{\|q\|_{0,\overline{\Omega}}\leq 1} |\chi q| \right). \tag{5.55}$$

où C est une autre constante indépendante de h et $\|\cdot\|_{0,\overline{\Omega}_i}$ est la norme de graphe de M_B^h impliquant le norme usuelle L^2 définie sur Ω et la norme L^2 sur les interfaces Γ_{ij} définie par :

$$\|q\|_{0,\overline{\Omega}} = \sqrt{\|q\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\in\Lambda_i} d_{ij}(\sigma_{ij}q, \sigma_{ij}q)}, \ \forall q \in M_B^h. \tag{5.56}$$

Démonstration. La démonstration est obtenue de la même manière que celle du théorème 5.4.1, à partir des estimations données respectivement dans (5.43), (5.50) and (5.51). □

Remarque 5.4.2. *En notant que les applications linéaires L et χ qui interviennent dans* (5.40) *sont définies dans la formulation du système de Stokes* (5.16) *par*

$$L\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{N} \left((\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{\Omega_i} + \sum_{j \in \Lambda_i} c_{ij}(\Phi_{ij}, \boldsymbol{v}) \right), \tag{5.57}$$

$$\chi q = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in \Lambda_i} d_{ij}(\psi_{ij}, \sigma_{ij} q), \tag{5.58}$$

et en remarquant que

$$|\chi \boldsymbol{v}| \leq C \left(\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}^2 + \|\Phi\|_{W^h}^2 \right)^{1/2} \|\boldsymbol{v}\|_{X_B^h}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in X_B^h, \tag{5.59}$$

$$|\zeta(q)| \leq \|\psi\|_{Y^h} \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in \Lambda_i} d_{ij}(\sigma_{ij} p, \sigma_{ij} p) \right)^{1/2}, \quad \forall q \in M_B^h, \tag{5.60}$$

il ressort du théorème précédent que le problème (5.16) *peut être résolu de façon stable.*

On terminera l'étude de la stabilité de la MDD mixte développée par un "zoom" sur le résultat de stabilité générale (5.55) à l'intérieur de chaque itération de la méthode.

Corollaire 5.4.1. *Chaque itération de l'algorithme MDD mixte peut se dérouler d'une manière stable en résolvant les problèmes locaux et le problème relatif aux points multiples de la manière suivante : l'estimation* (5.55) *est valide dans la mesure où :*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_{i0} + \textstyle\sum_{j \in \Lambda_i} \mathbf{u}_{ij}\|_{X_i^h} + \|p_{i0} + \textstyle\sum_{j \in \Lambda_i} p_{ij}\|_{0,\overline{\Omega}_i} \leq \\ &\qquad C \left(\sup_{\|\mathbf{v}\|_{X_B^h} \leq 1} |L\mathbf{v}| + \sup_{\|q\|_{0,\overline{\Omega}_i} \leq 1} |\chi q| \right) \quad (i = 1, \ldots, N) \end{aligned} \tag{5.61}$$

$$\|\mathbf{u}_c\|_{X_B^h} + \|p_c\|_{0,\overline{\Omega}_i} \leq C \left(\sup_{\|\mathbf{v}\|_{X_B^h} \leq 1} |L\mathbf{v}| + \sup_{\|q\|_{0,\overline{\Omega}_i} \leq 1} |\chi q| \right) \tag{5.62}$$

où $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N} \left(\mathbf{u}_{i0} + \sum_{j \in \Lambda_i} \mathbf{u}_{ij} \right) + \mathbf{u}_c$ *et* $p = \sum_{i=1}^{N} \left(p_{i0} + \sum_{j \in \Lambda_i} p_{ij} \right) + p_c$ *sont les décompositions respectives de* $\mathbf{u}$ *et* p *déja introduites dans respectivement* (5.6) *et* (5.7).

Démonstration. En prenant $(v, q) = (\mathbf{v}_{i0} + \sum_{j \in \Lambda_i} \mathbf{v}_{ij}, q_{i0} + \sum_{j \in \Lambda_i} q_{ij})$ comme des fonctions tests, on obtient d'une manière directe du théorème de stabilité local 5.4.1 :

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_{i0} + \textstyle\sum_{j \in \Lambda_i} \mathbf{u}_{ij}\|_{X_i^h} + \|p_{i0} + \textstyle\sum_{j \in \Lambda_i} p_{ij}\|_{0,\overline{\Omega}_i} \leq \\ &C \left(\sup_{\|\mathbf{v}\|_{X_B^h} \leq 1} |L\mathbf{v}| + \sup_{\|q\|_{0,\overline{\Omega}_i} \leq 1} |\chi q| + \|\mathbf{u}_c\|_{X_B^h} + \|p_c\|_{0,\overline{\Omega}_i} \right). \end{aligned} \tag{5.63}$$

La démonstration peut alors être complétée à l'aide de l'inégalité triangulaire et de l'estimation (5.55). □

5.5 Etude de la convergence de l'algorithme associé à la MDD

La MDD mixte appliquée au problème de Stokes proposée consiste à réduire le système :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{u} \in X_B^h, p \in M_B^h \cap L_0^2(\Omega), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \Big(a_i(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b_i(\mathbf{v},p) \Big) + \lambda \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\in\Lambda_i} c_{ij}(\mathbf{u}_{ij},\mathbf{v}_{ij}) = \\ \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \left((\mathbf{f},\mathbf{v})_{\Omega_i} + \sum_{j\in\Lambda_i} c_{ij}(\Phi_{ij},\mathbf{v}_{ij}) \right), \quad \forall \mathbf{v} \in X_B^h, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} b_i(\mathbf{u},q) - \lambda \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\in\Lambda_i} d_{ij}(q_{ij},q_{ij}) = \\ \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j\in\Lambda_i} d_{ij}(\psi_{ij},q_{ij}), \quad \forall q \in M_B^h \cap L_0^2(\Omega), \end{array}\right. \tag{5.64}$$

qui est couplé aux conditions de raccords :

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi_{ij} = -\Phi_{ji} + 2\,\lambda\,\mathbf{u}_{ji}, \\ \psi_{ij} = -\psi_{ji} - 2\,\lambda\,p_{ji}, \end{array}\right. \quad \forall i = 1,...,N \text{ et } j \in \Lambda_i. \tag{5.65}$$

à un système implicite apparenté uniquement aux inconnues d'interfaces (Φ,ψ) et dont la résolution se fera, comme on le verra plus loin, à l'aide d'une méthode itérative de type Krylov.

Le but dans cette section est l'étude de la convergence de ce type d'algorithme itératif appliqué au système implicite apparenté uniquement aux inconnues d'interfaces, obtenu à partir de (5.64) et (5.65). Cela étant, on considèrera dans un premier temps le système à résoudre comme un problème de point fixe, que l'on va résoudre par une méthode d'approximation successive dépendant d'un paramètre $0 < \theta < 1$:

- $\left(\Phi^0,\psi^0\right)$ fixé comme valeur initiale,
- pour $k = 1, 2, \cdots$ jusqu'à la convergence faire :

$$\left(\Phi^{k+1},\psi^{k+1}\right) = (1-\theta)\left(\Phi^k,\psi^k\right) + \theta S\left(\left(\Phi^k,\psi^k\right),\mathbf{f}\right), \tag{5.66}$$

où l'application linéaire S est définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} S_1\left((\Phi,\psi),\mathbf{f}\right)_{ij} = -\Phi_{ji} + 2\,\lambda\,\mathbf{u}_{ji}, \\ S_2\left((\Phi,\psi),\mathbf{f}\right)_{ij} = -\psi_{ji} - 2\,\lambda\,p_{ji}, \end{array}\right. \quad \forall i = 1,...,N \text{ et } j \in \Lambda_i, \tag{5.67}$$

$(\mathbf{u},p)$ étant solution de (5.64).

L'idée alors est qu'en établissant la convergence de cet algorithme d'approximations successives, on aura démontré celle liée à l'utilisation d'un algorithme de type Krylov. Pour démontrer la convergence de l'algorithme des approximations successives, il suffira de démontrer que l'application définie de $W^h \times Y^h$ dans lui même :

$$(\Phi, \psi) \mapsto (1-\theta)(\Phi, \psi) + \theta S((\Phi, \psi), \mathbf{f}), \tag{5.68}$$

est une contraction.

Pour le besoin de la démonstration, on donnera dans le lemme suivant une technique de preuve initiée par [19], mise au point par [16] et donnée dans un cadre plus général dans [3].

Lemme 5.5.1. *Soit W un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|_W$ et du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_W$. Si S est une application linéaire de W n'augmentant pas la norme*

$$\|Sx\|_W \leq \|x\|_W, \quad \forall x \in W, \tag{5.69}$$

telle que l'application $I - S$ soit injective et d'image fermée

$$\exists \gamma > 0 : \|x - Sx\|_W \geq \gamma \|x\|_W, \quad \forall x \in W, \tag{5.70}$$

alors $(1-\theta)I + \theta S$ est une contraction stricte pour $0 < \theta < 1$.

Démonstration. En notant que :

$$\begin{aligned} \|(1-\theta)x + \theta Sx\|^2 &= (1-\theta)^2\|x\|^2 + \theta^2\|Sx\|^2 + 2\theta(1-\theta)(x, Sx), \\ \|x - Sx\|^2 &= \|x\|^2 + \|Sx\|^2 - 2(x, Sx), \end{aligned}$$

et par élimination du terme (x, Sx) on obtient :

$$\|(1-\theta)x + \theta Sx\|^2 = (1-\theta)\|x\|^2 + \theta\|Sx\|^2 - \theta(1-\theta)\|x - Sx\|^2.$$

En utilisant le fait que S n'augmente pas la norme, on trouve :

$$\|(1-\theta)x + \theta Sx\|^2 \leq \|x\|^2 - \theta(1-\theta)\|x - Sx\|^2.$$

Enfin, l'hypothèse que $(I - S)$ est injectif et d'image fermé, permet de conclure que $(1-\theta)I + \theta S$ est une contraction stricte de constante $\kappa = \sqrt{1 - \theta(1-\theta)\gamma^2}$. □

On peut maintenant énoncer le résultat principal de convergence de l'algorithme de la méthode d'approximations successives décrite plus haut.

Théorème 5.5.1. *La suite* $\left(\boldsymbol{u}^{(k)}, p^{(k)}\right)$ *définie récursivement dans l'algorithme d'approximations successives* (5.66) *converge vers la solution* $(\boldsymbol{u}, p)$ *du problème de Stokes* (5.1) *avec la majoration d'erreur suivante :*

$$\left(\|\boldsymbol{u}^{(k)} - \boldsymbol{u}\|^2_{X_B^h} + \|p^{(k)} - p\|^2_{0,\Omega}\right)^{1/2} \leq C\,\kappa_h^k \left(\|\boldsymbol{u}^{(0)} - \boldsymbol{u}\|^2_{X_B^h} + \|p^{(0)} - p\|^2_{0,\overline{\Omega}}\right)^{1/2}. \tag{5.71}$$

où κ_h *est une constante* < 1 *qui peut dépendre de* h*.*

Démonstration. Le principal point pour assurer la convergence de l'algorithme est de vérifier que l'application (5.68) est une contraction stricte. Ceci revient à s'assurer des deux conditions énoncées dans le lemme 5.5.1 à savoir que S n'augmente pas la norme :

$$\|S\left((\Phi,\psi),0\right)\|_{W^h\times Y^h} \leq \|(\Phi,\psi)\|_{W^h}, \tag{5.72}$$

et satisfait à la condition de coercivité :

$$\exists\gamma > 0, \quad \|(\Phi,\psi) - S\left((\Phi,\psi),0\right)\|_{W^h\times Y^h} \geq \gamma\|(\Phi,\psi) \in \|_{W^h\times Y^h}, \tag{5.73}$$

pour tout $(\Phi,\psi) \in W^h \times Y^h$.

Puisque W^h et Y^h sont des espaces de dimensions finies, la condition (5.73) est équivalente à l'invisibilité de l'application $(\Phi,\psi) \mapsto (\Phi,\psi) - S\left(\Phi,\psi),0\right)$ et donc à la condition suivante :

$$S\left((\Phi,\psi),0\right) = (\Phi,\psi) \text{ si et seulemnt si } (\Phi,\psi) = 0. \tag{5.74}$$

Ainsi si $(\mathbf{u},p)$ et $((\Phi,\psi))$ sont solutions de (5.64) et (5.65) avec $\mathbf{f} = 0$, la paire $(\mathbf{u},p)$ est solution du système discret de Stokes (5.1) avec zéro comme second membre. Et par suite $(\mathbf{u},p) = (0,0)$. On obtient ainsi :

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\in\Lambda_i} c_{ij}(\Phi_{ij}, \pi_{ij}\mathbf{v}) = 0, \forall\mathbf{v} \in X_B^h, \tag{5.75}$$

et :

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\in\Lambda_i} d_{ij}(\psi_{ij}, \sigma_{ij}q) = 0, \forall q \in M_B^h \cap L_0^2\Omega. \tag{5.76}$$

En choisissant $q \in M_B^h$ tel que $q|_{\Gamma_{ij}} = \psi_{ij}$ et en fixant une valeur de q en un noeud intérieur à un sous-domaine Ω_i (de sorte à avoir la condition de moyenne nulle sur Ω), on a $d_{ij}(\psi_{ij}, \psi_{ij}) = 0$ et donc $\psi = 0$. Le fait que $\Phi = 0$ est évident, puisque aucune condition ne doit être imposée à **v**.

Maintenant, pour établir la première condition (5.72), faisons le développement de $\|S\left((\Phi,\psi),0\right)\|^2_{W^h\times Y^h}$ suivant :

$$\begin{aligned}
&\|S\left((\Phi,\psi),0\right)\|^2_{W^h\times Y^h} \\
&\quad= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\in\Lambda_i}\Big(\|-\Phi_{ij}\,+2\,\lambda\,\mathbf{u}_{ij}\|^2_{0,\Gamma_{ij}}\,+\,\|-\psi_{ij}\,-2\,\lambda\,p_{ij}\|^2_{0,\Gamma_{ij}}\Big) \\
&\quad= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\in\Lambda_i}\Big(\Big(\|\Phi_{ij}\|^2_{0,\Gamma_{ij}} - 4\,\lambda\,c_{ij}(\Phi_{ij},\mathbf{u}_{ij}) + 4\,\lambda^2\,\|\mathbf{u}_{ij}\|^2_{0,\Gamma_{ij}}\Big) \\
&\qquad\qquad + \Big(\|\psi_{ij}\|^2_{0,\Gamma_{ij}} + 4\,\lambda\,d_{ij}(\psi_{ij},p_{ij}) + 4\,\lambda^2\,\|p_{ij}\|^2_{0,\Gamma_{ij}}\Big)\Big).
\end{aligned} \tag{5.77}$$

En remarquant que $(\mathbf{u}, p)$ est solution du problem (5.64), on obtient :

$$\|S\left((\Phi,\psi),0\right)\|^2_{W^h\times Y^h} = \|(\Phi,\psi)\|^2_{W^h\times Y^h} - 4\,\lambda\sum_{i=1}^{N} a_i(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i). \tag{5.78}$$

La coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ nous assure alors la condition (5.50). Enfin, l'estimation (5.71) découle directement du théorème de stabilité 5.4.2. □

Remarque 5.5.1. *La constante de contraction $0 < \kappa_h = \sqrt{1-\theta(1-\theta)\gamma^2} < 1$ dépend du pas de maillage h à travers le paramètre γ. Sa meilleure valeur correspond à $\theta = 1/2$. Comme cela est mentionné dans [16] pour les équations de Helmohltz, il est nécessaire de remplacer λ par un opérateur non-local pour que γ, et par la suite κ_h, ne soit pas dépendant de h. Nous verrons dans la dernière partie de cette thèse la manière algébrique de construire de tels opérateurs.*

5.6 Résolution par des méthodes de type Krylov

On rappelle que dans la pratique le système linéaire implicite associé au problème d'interface que l'on peut écrire sous la forme

$$(\Phi,\psi) = S\left((\Phi,\psi),\mathbf{f}\right) \tag{5.79}$$

sera résolu en utilisant une méthode de Krylov. Pour ce type de méthode, il est nécessaire de connaître le second membre et la manière d'effectuer le produit matrice-vecteur correspondant au système linéaire implicite (5.79).
En écrivant le système linéaire précédent sous la forme :

$$(\Phi, \psi) - S\left((\Phi, \psi), 0\right) = S\left((0,0), \mathbf{f}\right), \tag{5.80}$$

on voit clairement que le second membre du système linéaire d'interface à résoudre peut être obtenu en évaluant $S\left((0,0), \mathbf{f}\right)$, ce qui revient à effectuer la première itération des approximations successives en prenant zéro comme valeur initiale.
Pour effectuer le produit matrice-vecteur il suffira de calculer la différence de deux itérations successives correspondant au système avec des forces extérieurs nulles $\mathbf{f} = 0$:

$$(\Phi, \psi) - S\left((\Phi, \psi), 0\right).$$

Chapitre 6

Validation numérique

Dans ce chapitre on testera numériquement la MDD mixte pour le problème discret de Stokes développée au chapitre précédent. Comme on l'a constaté au chapitre 3 sur les différents schémas d'éléments finis appliqués au système de Stokes, le schéma d'éléments finis à pression continue de Taylor-Hood $\mathbb{P}_l - \mathbb{P}_{l-1}$, $l \geq 2$ est le plus performant. C'est le schéma d'élément finis que nous adopterons tout au long de ce chapitre dans la discrétisation du système de Stokes, avec des degrés d'approximation pour la vitesse d'ordre $l = 2$.

Aussi, on choisira comme cas-test celui de Bercovier-Engelman [5], introduit également au Chapitre 3, vu que la solution analytique recherchée pour ce cas-test est de degré polynômial élevé. On considérera aussi dans nos tests une partition du domaine Ω en neuf sous-domaines comme illustré dans la figure 6.1. Cette décomposition du domaine Ω est intéressante dans le sens où elle est assez généraliste car elle comporte :

- des point-multiples,
- une sous-structure flottante.

La contrainte de moyenne nulle relative à l'espace des pressions (2.22) est prise en compte d'une façon très naturelle dans notre MDD mixte en introduisant l'inconnue et l'équation associées au multiplicateur, relatif à cette contrainte, dans le problème associé aux point-multiples. Tous les codes développés ici on été réalisés en utilisant la bibliothèque d'éléments finis Getfem++ [53] interfacé Matlab. Même si les tests ont été réalisés sur une mono-station de calcul, ils ont été conçus de manière à être parfaitement exécutables sur des architectures de calcul parallèle.

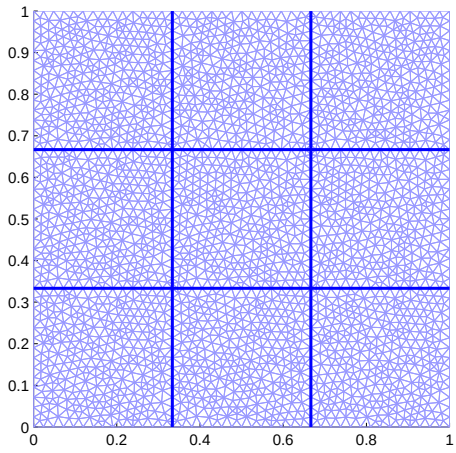


FIGURE 6.1 – Partitionnement du domaine Ω en 9 sous-domaines.

6.1 Résolution directe

Dans un premier temps, la solution du système de Stokes discret résultant d'une approximation par des éléments de type $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$ pour le cas-test de Bercovier-Engelman [5], est calculée sur tout le domaine Ω (**sans utilisation de la méthode de décomposition de domaine**). Elle est calculée en utilisant l'algorithme standard d'Uzawa, ce qui consiste à résoudre le complément de Schur associé à la pression par une méthode Gradient Conjugué (cf. [11]). Dans le tableau 6.1 sont résumées les erreurs relatives calculées par rapport à la solution analytique, connue au préalable, et obtenues pour différents pas d'un maillage non-structuré de Ω, 6.1. Notons qu'on obtient une meilleure approximation de la vitesse (erreur relative de l'ordre de 10^{-5}) comparée à celle de la pression (erreur relative de l'ordre de 10^{-3}) ; ceci est en bonne concordance avec les résultats présentés dans la litérature pour les schémas d'éléments finis pour les systèmes de Stokes.

6.2 Validation de la MDD mixte

On testera dans ce paragraphe, la MDD mixte pour le système de Stokes développée au chapitre 5 sur le cas-test de Bercovier-Engelman. La décomposition géométrique utilisée

h	Nbre de triangles	Nbre de dll vitesse	Nbre de dll pression	Err-rel vitesse en norme $\|\cdot\|_{H^1}$	Err-rel pression en norme $\|\cdot\|_{L^2}$
$1/10$	292	1266	171	2.6910^-3	1.6510^-1
$1/20$	1406	5794	746	5.7010^-4	2.9110^-2
$1/30$	2980	12162	1551	2.5810^-4	1.2010^-2
$1/40$	5400	21931	2785	1.4410^-4	7.0210^-3
$1/50$	8412	34058	4309	9.8110^-5	5.5610^-3
$1/60$	55070	49706	6274	5.8910^-5	2.6710^-3

TABLE 6.1 – Erreurs relatives de la vitesse et de la pression obtenues avec le schéma EF $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$ sans utilisation de MDD pour le cas-test de Bercovier-Engelman.

est celle de la Figure 6.1. Comme mentionné dans le chapitre 5, deux façons de résoudre le système implicite réduit aux inconnues d'interfaces (Φ, ψ) sont possibles : soit la résolution se fait par une méthode de relaxation, soit elle se fait par une méthode itérative de type Krylov. On présentera dans ce qui suit les résultats obtenus par chacune de ces deux méthodes.

Pour la méthode de relaxation on prendra comme paramètre de relaxation $\theta = 1/2$ et on utilisera un GMRES(m) [60, 59] pour la méthode de Krylov, où l'entier m désigne la dimension de l'espace de Krylov utilisé, usuellement appelé *restart*. On fera des tests avec un GMRES(15) et GMRES(50) pour voir le comportement de la MDD par rapport à un petit et un grand *restart*. On prendra $\lambda = 1$, $(\Phi^0, \psi^0) = (0, 0)$ comme valeur initiale et comme critère d'arrêt un résidu relatif d'interface $\leq 10^{-6}$ pour les deux méthodes (relaxation et GMRES(m)).

La Figure 6.2, ci-dessous, montre la diminution des résidus relatifs obtenue lors des trois procédés itératifs solutionnant le problème d'interface. Naturellement, L'algorithme de GMRES(50) est le plus efficace des trois, celui de relaxation stagnant après approximativement 80 itérations.

Le tableau 6.2 décrit la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice d'itération de la méthode de relaxation. Les résultats obtenus et ceux théoriques de convergence

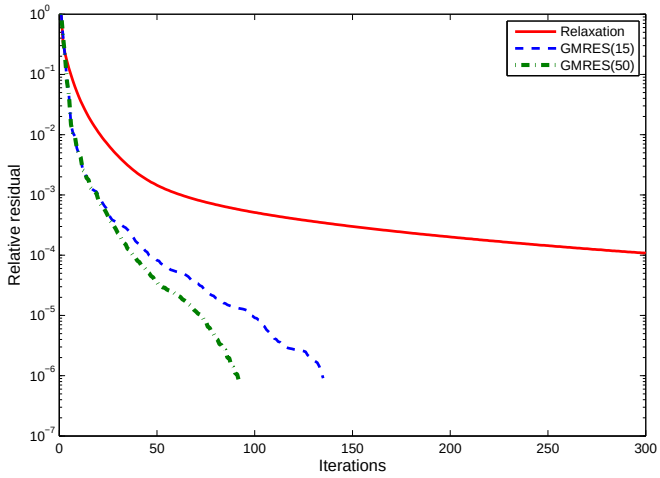


FIGURE 6.2 – Diminution des résidus relatifs des trois solveurs : relaxation, GMRES(15) et GMRES(50).

démontrés dans le chapitre précédent sont en parfaite concordance. On soulignera le fait que la constante de contraction dépend du maillage, plus précisément elle tend vers 1 quand le pas du maillage $h \to 0$. On retrouve ainsi un comportement bien connu de ce genre de MDD mixtes : la grande oscillation des composantes spectrales de l'erreur (voir, par exemple, [3, 7] pour une description d'un comportement similaire pour les équations de Helmholtz). Ceci explique pourquoi l'erreur correspondant à la méthode de relaxation diminue rapidement pour les premières itérations et stagne pour les itérations suivantes.

La Figure 6.3 représente la diminution des erreurs relatives de la vitesse et de la pression en normes $H^1(\Omega)$ and $L^2(\Omega)$ respectivement. Ces erreurs sont calculées par rapport à la solution vitesse et pression obtenue par une résolution sans MDD du problème (5.1) par un algorithme d'Uzawa. Dans le tracé de la Figure 6.3, nous avons aussi reporté les erreurs inhérentes à l'approximation sans MDD par le schéma d'éléments finis $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$ calculées par rapport à la solution analytique du problème discret (5.1) (lignes droites en pointillés). Cela donne une indication sur le nombre d'itérations qui ont un impact réel sur la précision de la simulation numérique de la MDD mixte. Il est également intéressant de noter que, de façon assez surprenante, pour une résolution avec ou sans MDD la convergence vers leurs limites respectives est plus rapide pour la vitesse que pour la pression.

h	λ_{max}	λ_{min}	$\kappa_h = \frac{\lvert 1-\lambda_{min}\rvert}{\lvert 1-\lambda_{min}\rvert} =$ $10^4\times$
$1/10$	0.9979	-0.5	0.7
$1/20$	0.9980	-0.5	0.7
$1/30$	0.9991	-0.5	1.7
$1/40$	0.9991	-0.5	1.7
$1/50$	0.9991	-0.5	1.7
$1/60$	0.9991	-0.5	1.7

TABLE 6.2 – Plus petite, plus grande valeur propre et nombre de conditionnement de la matrice d'itération de la méthode de relaxation.

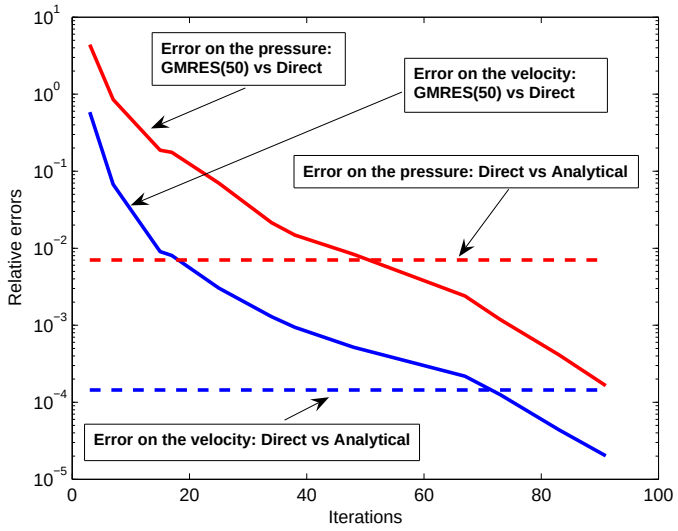


FIGURE 6.3 – Les erreurs relatives obtenues pour la vitesse et la pression avec ou sans utilisation de la MDD mixte, pour le schéma d'EF de Taylor-Hood.

La Figure 6.4 représente les tracés des lignes isobares de la pression obtenue à différentes itérations du solveur GMRES(50) de la MDD mixte sur tout le domaine Ω. Cela

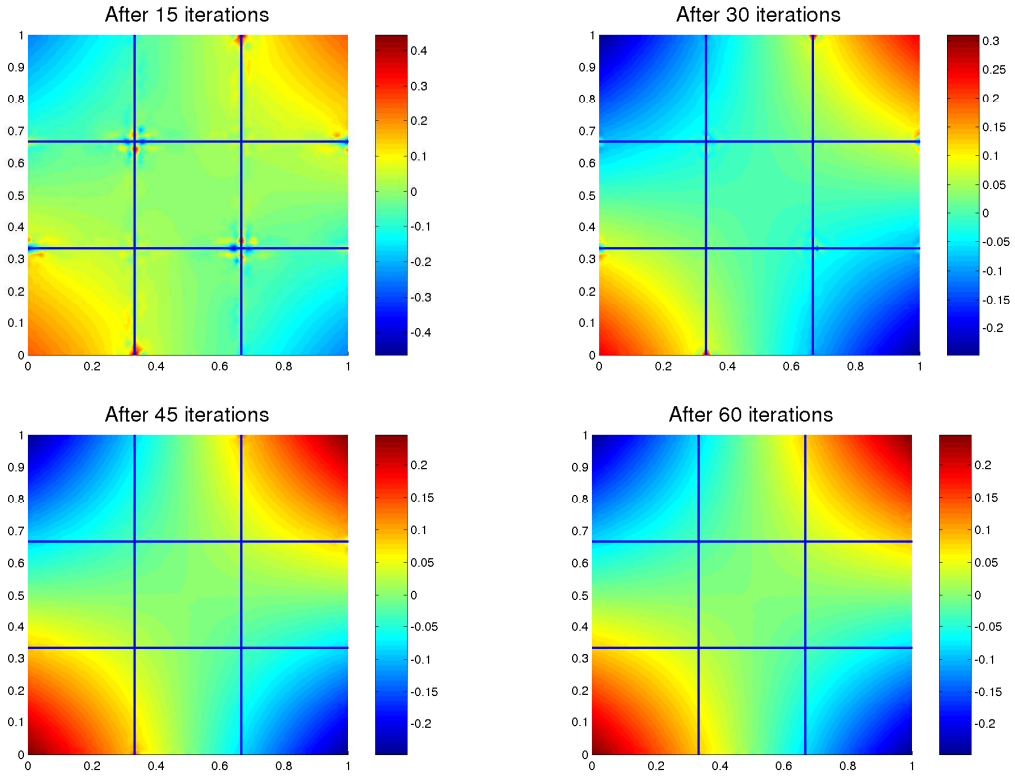


FIGURE 6.4 – Lignes isobares de la pression obtenue à différentes itérations du solveur GMRES(50) de la MDD mixte.

permet de bien visualiser le raccordement de la solution pression au niveau des interfaces des 9 sous-domaines : on obtient au bout de 60 itérations une solution globale de la pression parfaitement continue au niveau des interfaces. Cependant, pour obtenir une meilleure idée de ce raccord au niveau des interfaces, on a dans la Figure 6.5 tracé les valeurs de la pression obtenue à différentes itérations du solveur GMRES(50), comme dans la Figure 6.4, mais cette fois-ci uniquement au niveau de la ligne d'interface $y = 1/3$ et $0 \leq x \leq 1$, où la solution analytique est donnée par : $p(x, 1/3) = -(x - 1/2)/6$. Ce tracé montre clairement qu'au delà de 45 itérations le solveur itératif n'améliore pas vraiment la qualité des résultats.

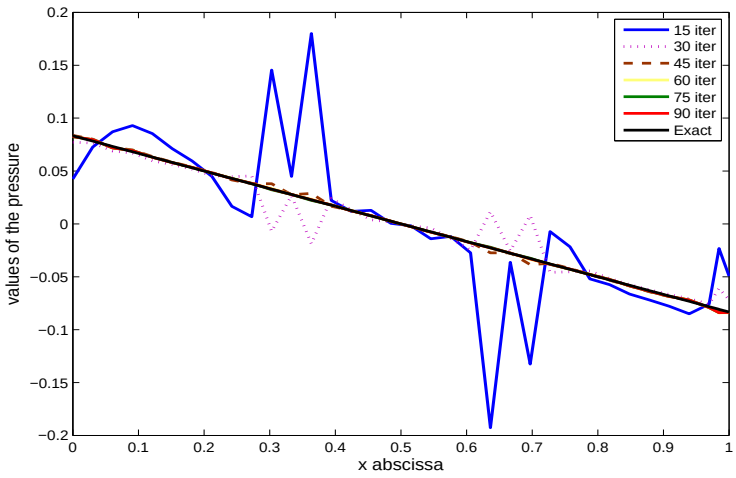


FIGURE 6.5 – Tracé des valeurs de la pression obtenues à différentes itérations du solveur GMRES(50) de la MDD mixte au niveau de la ligne interface $y = 1/3$.

6.3 Comparaison de la MDD mixte avec une méthode FETI-DP standard

Nous allons maintenant, dans le but de comparer le MDD mixte développée ici avec d'autre MDD relatives au système de Stokes, essayer d'appliquer, d'une manière formelle, la méthode FETI-DP pour le problème discret (5.1) comme s'il s'agissait d'un problème elliptique coercif de mécanique des structures (voir par exemple [30]). Une telle façon de procéder, pour le système de Stokes, ne semble pas avoir été prise en considération auparavant pour des approximations par éléments finis continus de pression. Par exemple, dans [40, 33, 34] les solveurs FETI-DP n'ont été utilisés que dans le cadre d'approximations par éléments finis où la pression était discontinue aux interfaces des éléments. Lorsqu'une méthode d'éléments finis impliquant des pressions continues a été utilisée dans ce contexte, comme dans [12], cette exigence de continuité a été omise à l'interface des sous-domaines dans la procédure de décomposition de domaine.

L'adaptation de la méthode FETI-DP qui est considérée ici utilise presque le même cadre que la MDD mixte précédente, c'est-à-dire les mêmes exigences de continuité forte aux point-multiples incarnées par les espaces X_B^h et M_B^h, mais fait appel à une seule inconnue parcourant les interfaces au lieu de deux. Les inconnues d'interfaces et leurs fonctions

test associées seront donc définies dans le sous-espaces de $W^h \times Y^h$ suivant :

$$\left(W^h \times Y^h\right)_s = \left\{(\Phi,\psi) \in W^h \times Y^h;\ \Phi_{ij} = \Phi_{ji} \text{ and } \psi_{ij} = \psi_{ji}\right\}. \tag{6.1}$$

On peut alors exprimer là, d'une façon équivalente, le système de Stokes discret (5.1) de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}
(\mathbf{u},p) \in X_B^h \times \left(M_B^h \cap L_0^2(\Omega)\right),\ (\Phi,\psi) \in \left(W^h \times Y^h\right)_s, \\
\left\{\begin{array}{l}
i = 1,\ldots,N \\
a_i(\mathbf{u}_i\,,\mathbf{v}_i) + b_i(\mathbf{v}_i\,,p_i) + a_i(\mathbf{u}_c\,,\mathbf{v}_i) + b_i(\mathbf{v}_i\,,p_c) + \displaystyle\sum_{j\in\Lambda_i} c_{ij}(\Phi_{ij},\mathbf{v}_{ij}) \\
\qquad\qquad = (\mathbf{f},\mathbf{v}_i)_{\Omega_i}, \\
b_i(\mathbf{u}_i\,,q_i) + b_i(\mathbf{u}_c\,,q_i) - \displaystyle\sum_{j\in\Lambda_i} d_{ij}(\psi_{ij},q_{ij}) = 0,
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\Big(a_i(\mathbf{u}_i\,,\mathbf{v}_c) + b_i(\mathbf{v}_c\,,p_i)\Big) + a(\mathbf{u}_c\,,\mathbf{v}_c) + b(\mathbf{v}_c\,,p_c) = (\mathbf{f},\mathbf{v}_c), \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{N} b_i(\mathbf{u}_i\,,q_c) + b(\mathbf{u}_c\,,q_c) = 0,
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^{N} \displaystyle\sum_{j\in\Lambda_i} c_{ij}(\Phi'_{ij},\mathbf{u}_{ij}) = 0, \\
\sum_{i=1}^{N} \displaystyle\sum_{j\in\Lambda_i} d_{ij}(\psi'_{ij},p_{ij}) = 0
\end{array}\right.
\end{array}\right. \tag{6.2}$$

pour tout $(\mathbf{v},q) \in X_B^h \times \left(M_B^h \cap L_0^2(\Omega)\right)$ et $(\Phi',\psi') \in \left(W^h \times Y^h\right)_s$.

Nous attirerons l'attention ici sur le fait que :

- c_{ij} and d_{ij} sont maintenant deux formes bilinéaires associées aux matrices booléennes correspondant aux conditions de raccords qui assurent que $\mathbf{u}$ et p sont continus aux interfaces des sous-domaines et par suite elle sont définies telles que l'on ait $c_{ij} = -c_{ji}$ et $d_{ij} = -d_{ji}$,
- contrairement à la MDD mixte, une condition locale de valeur moyenne nulle de la pression est nécessaire sur chaque sous-domaine Ω_i (dans la pratique, nous avons ajouté une faible compressibilité locale pour assurer l'inversibilité des problèmes locaux)

La même condition de valeur moyenne nulle sur tout le domaine Ω de la pression est prescrite dans la méthode FETI-DP à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange dont l'inconnue et l'équation correspondantes seront introduites dans le problème relatif aux degrés de liberté correspondant aux point-multiples.

Comme d'habitude, le solveur FETI-DP est implémenté comme une méthode itérative pour résoudre un système linéaire implicite correspondant au complèment de Schur de (6.2) associé aux inconnues d'interfaces. De toute évidence, la quasi-totalité de l'effort de calcul passé à effectuer le produit matrice-vecteur correspondant est dédié à la solution de (6.2) pour des inconnues d'interfaces Φ et ψ données. Ceci se fera là aussi en résolvant deux fois les problèmes locaux et une fois le problème relié aux point-multiples, comme dans la MDD mixte.

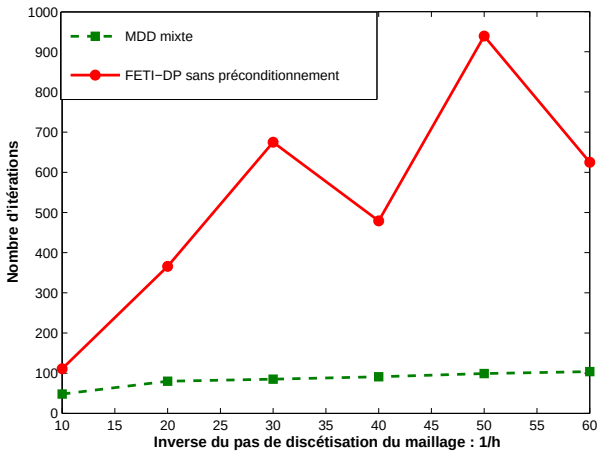


FIGURE 6.6 – Corrélation entre le pas du maillage et le nombre d'itérations nécessaire à la convergence de la MDD mixte et de la FETI-DP non-préconditionnées.

Il est cependant bien établi que l' algorithme FETI-DP converge mal quand il n'est pas couplé à une technique de préconditionnement approprié (voir, par exemple, [29, 30, 17]). Par exemple, utilisée dans le même cadre que la précédente MDD mixte à savoir, avec une décomposition de Ω en 9 sous-domaines, avec un GMRES(50) et avec comme critère d'arrêt une réduction de 10^{-6} du résidu initial, la méthode FETI-DP appliquée au système discret de Stokes est largement moins performante que la MDD mixte développée dans cette thèse comme cela est clairement indiqué dans la tableau 6.3. Cette constations ressort mieux dans le tracé de la Figure 6.6 où on remarque une dépendance très importante du nombre d'itérations par rapport au pas de discrétisation dans la méthode FETI-DP. Dans la MDD mixte, même si cette dependence est constatée, elle reste plus ou moins nuancée.

	Numb. of Iter.		Rel. Err.$\mathbf{u}$		Rel. Err. p	
h	Mixte	FETI-DP	Mixte	FETI-DP	Mixte	FETI-DP
$1/10$	48	111	$6.99\ 10^{-6}$	$4.21\ 10^{-6}$	$1.72\ 10^{-4}$	$8.37\ 10^{-5}$
$1/20$	80	366	$1.46\ 10^{-5}$	$1.42\ 10^{-5}$	$2.22\ 10^{-4}$	$1.22\ 10^{-4}$
$1/30$	85	675	$1.47\ 10^{-5}$	$2.07\ 10^{-5}$	$1.70\ 10^{-4}$	$1.01\ 10^{-4}$
$1/40$	91	479	$2.01\ 10^{-5}$	$2.08\ 10^{-5}$	$1.64\ 10^{-4}$	$1.49\ 10^{-4}$
$1/50$	99	939	$1.72\ 10^{-5}$	$3.08\ 10^{-5}$	$2.41\ 10^{-4}$	$2.22\ 10^{-4}$
$1/60$	104	625	$2.66\ 10^{-5}$	$3.38\ 10^{-5}$	$3.08\ 10^{-4}$	$1.23\ 10^{-4}$

TABLE 6.3 – Avantage de la MDD mixte sur la méthode FETI-DP, non-préconditionnées, appliquées au système de Stokes pour un partitionnement de Ω en 9 sous-domaines avec le solveur itératif GMRES(50). L'approximation par EF est de type $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$.

A partir des erreurs relatives, présentées dans le tableau 6.3, calculées en normes H^1 et L^2 pour la vitesse et la pression respectivement (la solution nominale étant celle obtenue par la méthode d'Uzawa), on notera que la même précision est atteinte par les deux méthodes (FETI-DP, MDD mixte) pour la même critère d'arrêt.

Chapitre 7

Préconditionnement des MDD pour un problème elliptique

Comme on l'a déjà vu précédemment, le principe des différentes approches des méthodes de décomposition de domaine présentées consiste à résoudre des systèmes implicites réduits aux interfaces et à en déduire par la suite la solution définie sur tout domaine Ω. Une utilisation d'un solveur direct pour résoudre ces systèmes implique :

- le calcul exact de chaque contribution locale, i.e. inversion du complèment de Schur local,
- la sommation de toutes ces contributions et cela induit par la suite un large échange de données entre processeurs,
- l'inversion de la matrice pleine relative aux inconnues d'interfaces, dont la taille correspond au nombre de ddl rattachés aux interfaces pour les approches primales et duales et le double pour les approches mixtes.

A partir de là, l'utilisation d'un solveur itératif pour résoudre ces systèmes d'interfaces, où de simples produits matrice-vecteur sont nécessaires, semble beaucoup plus avantageuse et plus efficace qu'une résolution par une méthode directe. Si la matrice associée au système d'interface est symétrique définie positive, on utilisera alors l'algorithme du Gradient conjugué sinon on utilisera un autre solveur comme celui du GMRES(m) [60, 59].

Cependant, plusieurs études ont montré [61] que le nombre de conditionnement de la matrice associée à ces systèmes d'interfaces est majoré par :

$$cond(S) \leq C\frac{1}{hH}, \tag{7.1}$$

où h représente la finesse du maillage et H le diamètre maximum des sous-domaines. Ce qui montre une diminution de la vitesse de convergence lorsqu'on affine le maillage ou lorsque le nombre de sous-domaines (et donc le nombre de processeurs utilisés) augmente. On parlera alors de MDD "non-extensible".

Définition 7.0.1. *Une méthode de décomposition de domaine est dite* "extensible" *(scalable en Anglais), par rapport au nombre de sous-domaines, si la vitesse de convergence de l'algorithme croît raisonnablement avec l'accroissement du nombre de processeurs (nombre de sous-domaines).*

Il en résulte que l'efficacité des MDD est fortement liée à la qualité de leur préconditionnement, afin de réduire cette dépendance du nombre d'itérations du processus itératif par rapport à l'augmentation du nombre de sous-domaines. On parlera alors de *"préconditionneur optimal"*.

De plus, un critère important à prendre en considération est que le calcul du préconditionneur doit être parfaitement parallèlisable. La stratégie retenue alors consiste à approcher l'inverse de l'opérateur d'interface (qui est une somme de contributions locales) par la somme (parfois pondérée) des inverses des contributions locales. On va voir que le préconditionneur de l'approche primale consiste à résoudre des problèmes de Neumann de part et d'autre de l'interface d'où son nom de préconditionneur Neumann-Neumann. Celui de l'approche duale, pour des raisons identiques, sera appelé le préconditionneur de Dirichlet.

Attardons-nous quelques instants sur les caractéristiques spectrales des opérateurs d'interface. Lorsqu'on applique une méthode de descente, celle-ci capte en premier lieu les plus grandes valeurs propres. Or, dans le cas de la matrice du complément de Schur primal, cela correspond aux plus grandes valeurs propres de la matrice de raideur, zone que l'on sait très perturbée d'un point de vue spectral. En effet, la matrice du complément de Schur primal résulte de la condensation statique sur l'interface de la matrice de rigidité. Cela

signifie que l'on retrouve une distribution des valeurs propres à peu près semblable à celle de la matrice de rigidité globale.
Par contre, pour la matrice du complément de Schur dual, les plus grandes valeurs propres associées vont correspondre aux plus petites valeurs propres de la matrice de raideur. En conséquence, la méthode duale bénéficie d'un avantage intrinsèque pour la résolution. Dans sa thèse, F. X. Roux [56] met en évidence ces considérations.

Nous allons introduire dans ce qui suit la façon de construire de tels préconditionneurs. Pour cela, on considèrera tout au long de ce chapitre le problème elliptique suivant, déjà abordé dans le chapitre 4 :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \text{ solution de} \\ -\Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{f}, \text{ sur } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7.2}$$

7.1 Préconditionneur de Neumann-Neumann pour les méthodes primales

On a vu dans le chapitre 4 que la matrice associée au problème posé sur l'ensemble des interfaces, s'écrit comme une somme de compléments de Schur locaux :

$$S_p = \sum_{i=1}^{N_s} R^{(i)^T} S^{(i)} R^{(i)}, \tag{7.3}$$

où : $S^{(i)} = A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} - A_{\Gamma I}^{(i)} A_{II}^{(i)^{-1}} A_{I\Gamma}^{(i)}$.
En pratique, la matrice S_p n'est pas assemblée explicitement ; il est impossible alors de la préconditionner d'une manière directe. Cependant, puisqu'elle s'écrit comme une somme de contributions locales, il est possible d'approcher l'inverse de la somme par la somme des inverses locaux :

$$P_{NN} = \sum_{i=1}^{N_s} R^{(i)^T} S^{(i)^{-1}} R^{(i)}, \tag{7.4}$$

où : $R^{(i)}$ sont les opérateurs booléens précédemment introduits au chapitre 4, appelés aussi opérateurs de restriction. De cette manière, le précondionneur sera calculé de manière complètement parallèle : dans le sens où chaque inverse du complément de Schur $S^{(i)^{-1}}$ sera calculé par un processeur associé dédié.

Évidemment, pour construire le préconditionneur représenté par la relation (7.4), il n'est pas question de calculer explicitement l'inverse local du complément de Schur. Par contre, on peut calculer son action sur un vecteur, noté g_n, en résolvant le problème de type Neumann sans force extérieure :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{w}_i \text{ solution de} \\ \qquad \begin{array}{rl} -\Delta \mathbf{w}_i + \mathbf{w}_i & = 0, \text{ sur } \Omega_i, \\ \mathbf{w}_i & = 0, \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{n}} & = R^{(i)} g_n, \text{ sur } \Gamma_i. \end{array} \end{array} \right. \tag{7.5}$$

Ce problème est bien posé, grâce aux conditions de type Dirichlet imposées sur le bord, à condition que le sous-domaine Ω_i ne soit pas flottant : $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, sinon la solution associée sera définie à un mouvement de solide rigide près.

Au niveau matriciel, en supposant $A^{(i)}$ inversible, le problème (7.5) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} A_{II}^{(i)} & A_{I\Gamma}^{(i)} \\ A_{\Gamma I}^{(i)} & A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_I^{(i)} \\ \mathbf{w}_\Gamma^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R^{(i)} g_n \end{bmatrix}, \tag{7.6}$$

dont la solution est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_I^{(i)} \\ \mathbf{w}_\Gamma^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{II}^{(i)^{-1}} A_{I\Gamma}^{(i)} S^{(i)^{-1}} R^{(i)} g_n \\ S^{(i)^{-1}} R^{(i)} g_n \end{bmatrix}. \tag{7.7}$$

Il est clair alors que la restriction de la solution à l'interface $\mathbf{w}_\Gamma^{(i)}$ du problème (7.6) représente le produit matrice-vecteur $S^{(i)^{-1}} R^{(i)} g_n$. La résolution des problèmes (7.6) permet donc de calculer les produits matrice-vecteur qui apparaissent dans l'algorithme itératif de la MDD sans avoir à calculer explicitement les inverses de compléments de Schur locaux $S^{(i)^{-1}}$.

On notera enfin que l'utilisation du préconditionneur de Neumann-Neumann (7.4) pour la résolution du problème condensé à l'interface dans les approches primales implique une augmentation du coût de calcul à chaque itération. En effet, en plus de résoudre un problème de Dirichlet sur chaque sous-domaine, il faut encore solutionner un problème avec des conditions de Neumann sur l'interface. Cependant, cette double résolution se fait de manière indépendante des autres sous-domaines et peut donc se faire sur un seul processeur dédié.

Remarque 7.1.1. *Les matrices locales du complément de Schur de* (7.6) *sont susceptibles d'être seulement semi-définies positives, si le sous-domaine ne possède pas de conditions aux limites en déplacement. Il est possible d'envisager une décomposition telle qu'aucun sous-domaine ne soit "flottant". Cependant, dans bien des cas, cette restriction est très pénalisante et nuit à la souplesse d'utilisation de la méthode.*
En jouant sur la dualité des deux méthodes du complément de Schur, Mandel [44], propose à l'instar de la méthode duale, une prise en compte de ces modes rigides pour améliorer le comportement du préconditionneur. Ce qui donnera lieu au "préconditionneur Neumann-Neumann généralisé" [17].
Cependant, si le nombre de sous-domaines augmente (i.e. si H le diamètre maximal des sous-domaines diminue), la vitesse décroît de manière quadratique. Pour éliminer cette dépendance Mandel [44] introduit un problème grossier (défini sur le maillage induit par la décomposition) dans le but de réduire d'une manière significative cette dépendance au nombre de sous-domaines. Ce sont les méthodes dites BDD ,"Balancing domain decomposition". *Le développement des méthodes BDD, donnera naissance plus tard aux méthodes BBDC [45] dont le nombre de conditionnement de la matrice d'itération préconditionnée est borné de la manière :*

$$cond(P_{BDD}S_p) \leq C\left(1 + log\frac{H}{h}\right)^2 \tag{7.8}$$

où : h est le pas maximal du maillage et H le diamètre maximal des sous-domaines Ω_i.

7.2 Préconditionneur de Dirichlet pour les méthodes duales

Il s'agit dans ce paragraphe de trouver un bon préconditionneur, parfaitement parallélisable, pour la matrice associée au problème d'interface (4.28) vu dans le chapitre 4, définie par

$$D = \sum_{i=1}^{N_s} B^{(i)^T} A^{(i)^{-1}} B^{(i)}, \tag{7.9}$$

où les $B^{(i)}$ définissent les opérateurs de restriction locaux à l'interface Γ_i du sous-domaine Ω_i.
L'idée, comme vu précédemment pour les méthodes primales, pour construire un préconditionneur parallélisable est d'approcher l'inverse de la matrice D par la somme des inverses

locaux :

$$P_{Dirichlet} = \sum_{i=1}^{N_s} \left(B^{(i)^T} A^{(i)^{-1}} B^{(i)} \right)^{-1}. \tag{7.10}$$

Ici aussi, on évitera le calcul explicite des inverses et à la place on calculera l'action de ces inverses locaux sur un vecteur d'interface donné g_n. Il s'agit de chercher, pour tout vecteur d'interface g_n , les vecteurs $\mathbf{w}_\Gamma^{(i)}$ tel que :

$$\left(B^{(i)^T} A^{(i)^{-1}} B^{(i)} \right)^{-1} \mathbf{w}_\Gamma^{(i)} = B^{(i)} g_n. \tag{7.11}$$

Ceci revient à résoudre les problèmes de Dirichlet sans force extérieure, définis sur chaque sous-domaine Ω_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{w}_i \text{ solution de} \\ \qquad -\Delta \mathbf{w}_i + \mathbf{w}_i \qquad = 0, \text{ sur } \Omega_i, \\ \qquad \mathbf{w}_i \qquad\qquad\quad = 0, \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \\ \qquad \mathbf{w}_i \qquad\qquad\quad = B^{(i)} g_n, \text{ sur } \Gamma_i. \end{array} \right. \tag{7.12}$$

qui s'écrivent sous la forme matricielle :

$$\left[\begin{array}{cc} A_{II}^{(i)} & A_{I\Gamma}^{(i)} \\ A_{\Gamma I}^{(i)} & A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{w}_I^{(i)} \\ \mathbf{w}_\Gamma^{(i)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ B^{(i)} g_n \end{array} \right], \tag{7.13}$$

et dont la solution est donnée par :

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{w}_I^{(i)} \\ \mathbf{w}_\Gamma^{(i)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -A_{II}^{(i)^{-1}} A_{I\Gamma}^{(i)} B^{(i)} g_n \\ S^{(i)^{-1}} B^{(i)} g_n \end{array} \right]. \tag{7.14}$$

On peut alors conclure que :

$$S^{(i)} = A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} - A_{\Gamma I}^{(i)} A_{II}^{(i)^{-1}} A_{I\Gamma}^{(i)} = \left(B^{(i)^T} A^{(i)^{-1}} B^{(i)} \right)^{-1}. \tag{7.15}$$

Finalement, l'assemblage des différentes solutions de (7.13) conduit au résultat désiré :

$$P_{Dirichlet} g_n = \sum_{i=1}^{N_s} B^{(i)^T} S^{(i)} B^{(i)} g_n. \tag{7.16}$$

Pour des problèmes elliptiques de second ordre, il a été prouvé [46] que le préconditionneur de Dirichlet est optimal dans le sens où l'on a la majoration du nombre de conditionnement suivante :

$$cond(P_{Dirichlet} S_d) \leq C \left(1 + log \frac{H}{h} \right)^2, \tag{7.17}$$

Pour les problèmes d'ordre quatre et les problèmes de coque l'estimation précédente n'est plus valable et donc la méthode n'est plus extensible. Néanmoins, en associant dans les méthodes duales (FETI) le préconditionneur de Dirichlet à un problème grossier (méthode FETI-II et FETI-DP) on retrouve l'estimation (7.17) [23, 47].

Aussi, pour les méthodes duales, un préconditionneur allégé est proposé qui n'est certes pas optimal dans le sens défini ci-dessus (donc avec une légère dépendance du nombre d'itérations par rapport au nombre de sous-domaines), mais qui diminue le coût de calcul de chaque itération en comparaison avec le préconditionneur de Dirichlet. C'est le préconditionnuer dit "Lumped" donné par :

$$P_{lumped} = \sum_{i=1}^{N_s} B^{(i)^T} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} \end{bmatrix} B_i, \tag{7.18}$$

où : $A_{\Gamma\Gamma}^{(i)}$ est la matrice extraite de $A_{\Gamma\Gamma}$ contenant les termes relatifs à l'interface.

Dans Farhat et Roux [22], on trouve le conditionnement dans le cas d'un problème de Poisson de la matrice de complèment de Schur dual préconditionnée par la technique allégée (lumped) suivant :

$$cond(P_{lumped} S_d) \leq C \frac{H}{h}. \tag{7.19}$$

Remarque 7.2.1. *Notons les pints suivants :*

- *Le préconditionneur de l'approche primale consiste à résoudre des problèmes de Neumann de part et d'autre de l'interface d'où son nom de préconditionneur Neumann-Neumann comme déjà mentionné. Celui de l'approche duale, pour des raisons identiques, est appelé le préconditionneur de Dirichlet.*
- *Parfois, pour respecter des considérations mécaniques, on rajoute des matrices de pondération diagonales W (scaling). Dans le cas d'une structure homogène, elles sont généralement égales à l'inverse de la multiplicité du degré de liberté considéré. Dans le cas d'une structure hétérogène, elles permettent de capter les différences de rigidité de part et d'autre de l'interface. Les préconditionneurs décrits précédemment*

s'écriront alors :

$$P_{NN} = \sum_{i=1}^{2} W_i S_i^{-1} W_i, \tag{7.20}$$

$$P_{Dirichlet} = \sum_{i=1}^{2} W_i B_i^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_p^i \end{bmatrix} B_i W_i, \tag{7.21}$$

$$P_{lumped} = \sum_{i=1}^{2} W_i B_i^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} \end{bmatrix} B_i W_i, \tag{7.22}$$

7.3 Préconditionnement des méthodes mixtes

On rappelle que le principe dans les MDD mixtes, comme cela a été présenté dans le chapitre 4, est de réécrire les conditions de raccord en termes de nouvelles variables d'interface locales, qui sont une combinaison linéaire des efforts d'interface et des déplacements :

$$\Phi = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + \lambda \mathbf{u}, \tag{7.23}$$

avec $\lambda > 0$ un réel strictement positif.
Au fait, on peut considérer de façon plus générale des opérateurs locaux $T^{(i)}$ et prendre :

$$\Phi = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + T^{(i)}\mathbf{u}, \text{ sur} \Gamma_i. \tag{7.24}$$

Ainsi, si l'on considère, pour simplifier l'écriture, une décomposition en deux sous-domaines $\Omega = \cup_{i=1}^{2} \Omega_i$, il existe alors un couple de multiplicateurs unique $\Phi = (\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)})$ tel que le problème couplé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} A_{II}^{(1)} & A_{I\Gamma}^{(1)} \\ A_{I\Gamma}^{(1)^T} & A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} + T^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_I^{(1)} \\ \mathbf{u}_\Gamma^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_I^{(1)} \\ \mathbf{f}_\Gamma^{(1)} + \Phi^{(1)} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} A_{II}^{(2)} & A_{I\Gamma}^{(2)} \\ A_{I\Gamma}^{(2)^T} & A_{\Gamma\Gamma}^{(2)} + T^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_I^{(2)} \\ \mathbf{u}_\Gamma^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_I^{(2)} \\ \mathbf{f}_\Gamma^{(2)} + \Phi^{(2)} \end{pmatrix}, \end{array} \right. \tag{7.25}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^{(1)} = -\Phi^{(2)} + \left(T^{(2)} + T^{(1)}\right) \mathbf{u}_\Gamma^{(2)} \\ \Phi^{(2)} = -\Phi^{(1)} + \left(T^{(2)} + T^{(1)}\right) \mathbf{u}_\Gamma^{(1)}, \end{array} \right. \tag{7.26}$$

soit équivalent au problème posé sur tout le domaine [57].

L'élimination des variables intérieures $\mathbf{u}_I^{(i)}$ en faveur de $\mathbf{u}_\Gamma^{(i)}$ dans les deux premières équations et ensuite une substitution dans les deux dernières équations, conduisent au système d'équations linéaires pour les variables $\Phi^{(i)}$ suivantes :

$$F\Phi = d, \tag{7.27}$$

où la matrice F et le membre de gauche sont définis respectivement par :

$$F = \begin{bmatrix} I & I - (T^{(1)} + T^{(2)})[S^{(2)} + T^{(2)}]^{-1} \\ I - (T^{(1)} + T^{(2)})[S^{(1)} + T^{(1)}]^{-1} & I \end{bmatrix}, \tag{7.28}$$

et

$$d = \begin{bmatrix} (T^{(1)} + T^{(2)})[S^{(2)} + T^{(2)}]^{-1} b^{(2)} \\ (T^{(1)} + T^{(2)})[S^{(1)} + T^{(1)}]^{-1} b^{(1)} \end{bmatrix} \tag{7.29}$$

où $S^{(i)} = A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} - A_{\Gamma I}^{(i)} A_{II}^{(i)^{-1}} A_{I\Gamma}^{(i)}$ est le complément de Schur et $b^{(i)} = \mathbf{f}_\Gamma^{(i)} - A_{II}^{(i)^{-1}} A_{I\Gamma}^{(i)} \mathbf{f}_I^{(i)}$ est le membre de droite condensé du sous-domaine Ω_i.

La solution de ce système d'interface (7.27) par une méthode de Krylov définit alors la méthode de décomposition de domaine mixte. Il est alors clair, à partir de l'écriture (7.28) que le meilleur choix pour les matrices libres $T^{(i)}, i = 1, 2$, comme montré dans Roux et al. [57], correspond au complément de Schur "extérieur" :

$$T^{(1)} = S_2, \quad T^{(2)} = S_1. \tag{7.30}$$

Ce choix, correspondant à la discrétisation des conditions aux limites continues associées à l'opérateur de Steklov-Poincaré (voir, par exemple, [25, 16, 7]), rend la matrice (7.28) égale à l'identité et par suite, la solution est obtenue en une itération. Ainsi, un bon préconditionneur des méthodes mixtes consisterait à choisir $T^{(i)}$ comme étant le complément de Schur d'interface du sous-domain voisin.

Seulement, ici, contrairement au préconditionneur de Neumann-Neumann pour les méthodes primales et le préconditionneur de Dirichlet pour les méthode duales, cette manière de faire n'est pas parallélisable dans le cas d'une décomposition en plusieurs sous-domaines. En effet, le choix optimal pour $T^{(i)}$ sera alors une combinaison des compléments de Schur des sous-domaines voisins de Ω_i par rapport à l'interface partagée et donc ce choix ne respecte pas la localisation des données.

On verra plus loin que des approximations doivent être considérées, afin de rendre le préconditionnement des méthodes mixtes parfaitement parallèlisable, au détriment de l'efficacité numérique. Ainsi on peut faire une approximation du complément de Schur du sous-domaine voisin

- par un complément de Schur des degrés de libertés *"proches"* de l'interface. Cette technique de préconditionnment est appelée "strip-preconditioner" dans [52] où "Neighbor Schur Complement" dans [58].
- par la matrice de rigidité d'interface.

La première stratégie est un bon compromis, dans le sens où elle respecte la localisation des données (on pourra dédier un processeur qui se chargera uniquement du calcul de ces compléments de Schur "allégés" sur lequel une matrice d'interface globale "élargie" sera stockée) et dans le sens aussi où l'on a un faible coût numérique. La définition des degrés de libertés *"proches"* de l'interface se fera en donnant un entier n représentant le nombre de bandes d'éléments géométriques du maillage proches de l'interface (voir Figure 7.1).

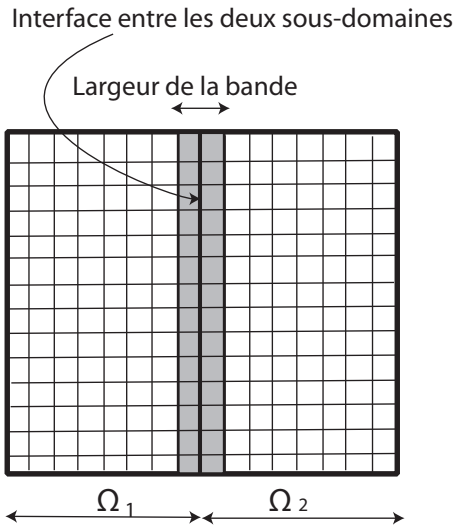


FIGURE 7.1 – Description de la bande (strip) autour de l'interface où se trouvent les ddl intérieurs à prendre en compte lors du calcul des compléments de Schur locaux, dans le cas d'un partitionnement en 2 sous-domaines pour un maillage en quadrilatères.

7.4 Tests numériques des différents préconditionneurs

Nous allons voir dans ce paragraphe l'effet des différents préconditionneurs décrits plus haut sur le cas-test du problème elliptique (4.1), abordé dans le chapitre 4, dont la solution analytique est définie par :

$$\mathbf{u}(x,y) = \begin{bmatrix} 16xy(1-x)(1-y) \\ \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) + xy(1-x)^3(1-y)^3 \end{bmatrix}. \tag{7.31}$$

Pour cela on considérera un maillage de pas $h = 1/20$ générant près de 5500 degrés de liberté et approximativement 1308 triangles. Dans un premier temps, on testera l'efficacité des préconditionneurs des 3 MDD (primale, duale et mixte) sur un partitionnment "en bandes" du domaine Ω. Par la suite, on considérera une décomposition "quadrillée" de Ω, beaucoup plus généraliste, comportant des point-multiples et des sous-domaines flottants. Sur les trois MDD, une approximation quadratique pour le schéma d'éléments finis et un solveur GMRES(50) seront considérés.

7.4.1 Tests pour une partition en bandes

Une partition simple de Ω en bandes ne comportant pas de point-multiples et de sous-domaines flottants engendrant de 2 jusqu'à 10 sous-domaines sera considérée (Figure 7.2).

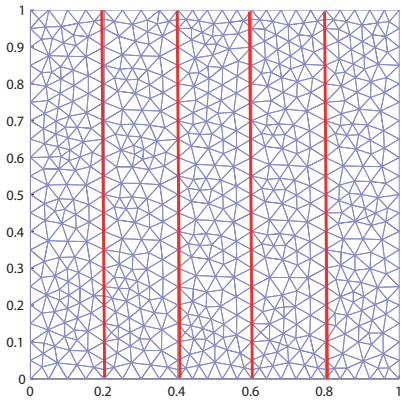


FIGURE 7.2 – Exemple de Partition "en bandes" de Ω en 5 sous-domaines.

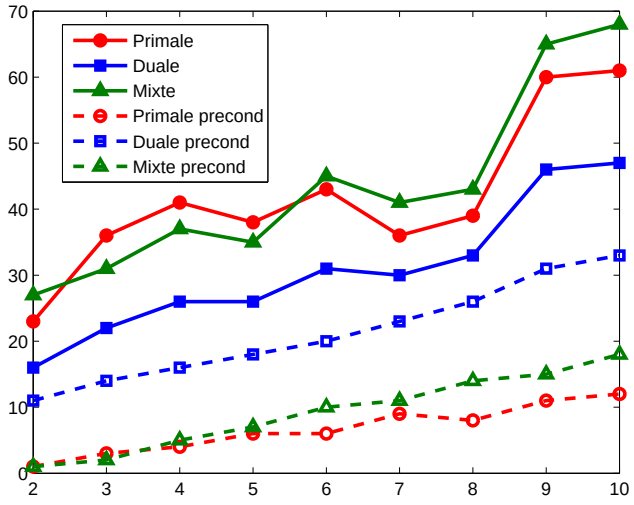
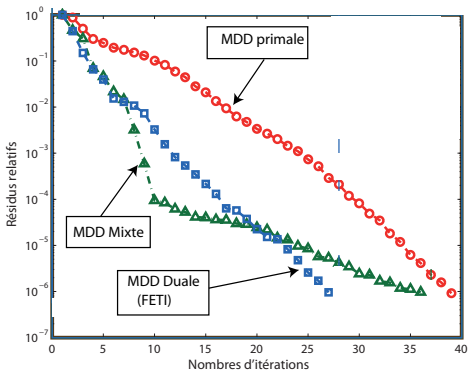


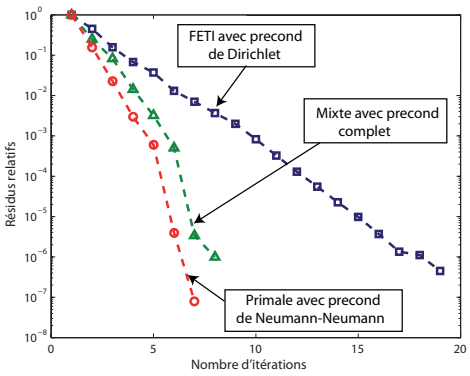
FIGURE 7.3 – Nombre d'itérations nécessaire au GMRES(50) pour solutionner le système d'interface dans les trois MDD appliquées à un problème elliptique avec et sans préconditionnement pour une partition en bandes et une précision de 10^{-6}.

On testera d'abords les MDD primale, duale (FETI) et mixte, sur le cas-test considéré, sans préconditionnement avec comme critère d'arrêt commun une grandeur des résidus relatifs à la convergence $\leq 10^{-6}$.
On constate, dans la Figure 7.3, que le nombre d'itérations augmente avec le nombre de sous-domaines pour les 3 méthode (primale, duale et mixte), ce qui est logique puisque l'interface, et donc la dimension du problème itératif à résoudre, devient plus grande. En outre, une partition de ce genre dite "par bande" n'est pas très avantageuse.

La méthode FETI (i.e. méthode duale) est plus efficace que la méthode primale ou mixte dans cette configuration, ce qui apparaît sur le nombre d'itérations à convergence. Cependant on notera, voir Figure 7.4, que dans la MDD mixte, la vitesse de diminution du résidu dans les premières itérations est beaucoup plus rapide que celle des deux autres méthodes ralentissant par la suite au delà d'un résidus $\leq 10^{-4}$. Dans les méthodes primale et duale la diminution des résidu est uniforme et on remarque que la méthode primale a plus de difficulté à atteindre la norme de résidu demandé.



Sans préconditionnement.



Avec préconditionnement.

FIGURE 7.4 – Diminution des résidus relatifs du GMRES(50) du problème d'interface des 3 MDD (primale, duale et mixte) avec et sans préconditionnement appliquées à un problème elliptique pour une partition "en bandes" de Ω en 5 sous-domaines.

Lorsqu'on utilise le préconditionneur Neumann-Neumann (7.4) pour la méthode primale ou celui de Dirichlet (7.16) pour la méthode FETI et lorsque dans la MDD mixte les opérateurs locaux $T^{(i)}, \forall i = 1 \cdots N_s$ sont choisis de la manière (7.30) (ce qui correspond à un préconditionnment de la MMD mixte), on constate (dans la Figure 7.3) une diminution de l'ordre de 75% du nombre d'itérations nécessaire à la convergence aussi bien pour la méthode primale que mixte.

Cependant, il est assez surprenant de noter que, sur ce cas-test, le préconditionneur de Dirichlet semble moins performant que prévu : on constate une diminution du nombre d'itérations de l'ordre de 30% uniquement. Ceci est probablement dû à la partition en bandes de Ω. Partition qui laisse d'ailleurs les trois méthodes de décomposition testées dépendantes du nombre de sous-domaines, vu l'absence d'un problème grossier permettant une transmission globale de l'information (la transmission se fait d'un sous-domaine à son voisin direct). Dans la figure 7.4, le tracé des courbes de diminution du résidu dans les 3 MDD montre clairement l'efficacité remarquable des préconditionneurs pour la méthode primale et mixte (décroissance rapide des valeurs du résidu) par rapport à celui de Dirichlet de l'approche FETI.

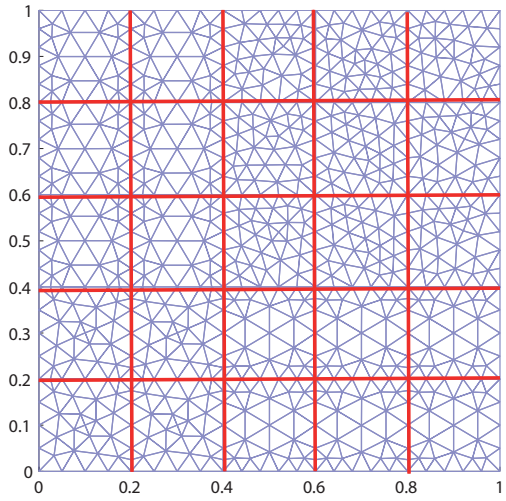


FIGURE 7.5 – Exemple de Partition "quadrillée" de Ω en 25 sous-domaines.

7.4.2 Tests pour des partitions quadrillées

On considère maintenant une décomposition "quadrillée" de Ω comportant des point-multiples et des sous-domaines flottants (voir, Figure 7.5). Ici, contrairement à la décomposition en bandes précédente où chaque sous-domaine disposait de suffisamment de conditions de Dirichlet sur le bord, il existe des sous-domaines flottants (n'ayant aucune condition de Dirichlet sur le bord) et les matrices de rigidité associées peuvent être singulières.

Afin de surseoir à cette contrainte, comme dans les méthodes FETI-DP [23], on fixera les degrés de liberté rattachés aux point-multiples dans les trois méthodes de décomposition de domaine testées. Cela aura pour conséquence d'une part, dans les méthodes duale et mixte, de rendre les matrices de rigidité associées aux sous-structures flottantes inversibles et, d'autre part, permettra le calcul du préconditionneur dans la méthode primale. Cette manière de procéder a l'avantage aussi de supprimer les redondances de raccords aux point-multiples et permettra de définir un problème grossier (défini par le maillage engendré par la décomposition de Ω) assurant une transmission globale de l'information entre tous les sous-domaines. Comme vont le montrer les tests, cela rendra les méthodes de décomposition de domaines extensibles (i.e. peu sensibles à l'augmentation du nombre de sous domaines).

Afin de mieux expliciter cette approche Primale-duale dans les 3 méthodes de décomposition utilisées, nous donnons ci-après la formulation matricielle résultante dans chaque cas, $\mathbf{u}_c$ faisant référence aux ddl relatifs aux point-multiples communs à tous les sous-domaines :

Approche Duale : FETI-DP :

$$\begin{pmatrix} A^{(1)} & \cdots & 0 & A_c^{(1)} & B^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & A^{(N_s)} & A_c^{(N_s)} & B^{(N_s)} \\ A_c^{(1)^t} & \cdots & A_c^{(N_s)^t} & A_c & 0 \\ B^{(1)^T} & \cdots & B^{(N_s)^T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N_s} \\ \mathbf{u}_c \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{N_s} \\ \mathbf{f}_c \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.32}$$

Approche Mixte-DP :

$$\begin{pmatrix} A^{(1)} + T^{(1)} & \cdots & 0 & A_c^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & A^{(N_s)} + T^{(N_s)} & A_c^{(N_s)} \\ A_c^{(1)^t} & \cdots & A_c^{(N_s)^t} & A_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N_s} \\ \mathbf{u}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 + \Phi^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{N_s} + \Phi^{(2)} \\ \mathbf{f}_c \end{pmatrix}, \tag{7.33}$$

Approche Primale-DP :

$$\begin{pmatrix} A_{II}^{(1)} & \cdots & 0 & A_{I\Gamma}^{(1)} & A_{Ic}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{II}^{(N_s)} & A_{I\Gamma}^{(N_s)} & A_{Ic}^{(N_s)} \\ A_{I\Gamma}^{(1)^t} & \cdots & A_{I\Gamma}^{(N_s)^t} & A_{\Gamma\Gamma} & A_{\Gamma c} \\ A_{Ic}^{(1)^t} & \cdots & A_{Ic}^{(N_s)^t} & A_{\Gamma c}^t & A_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{N_s} \\ \mathbf{u}_\Gamma \\ \mathbf{u}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{N_s} \\ \mathbf{f}_\Gamma \\ \mathbf{f}_c \end{pmatrix}, \tag{7.34}$$

où : $\mathbf{u}_\Gamma$ fait référence au vecteur contenant toutes les inconnues rattachées aux dll de l'interface globale, partagées par tous les sous-domaines.

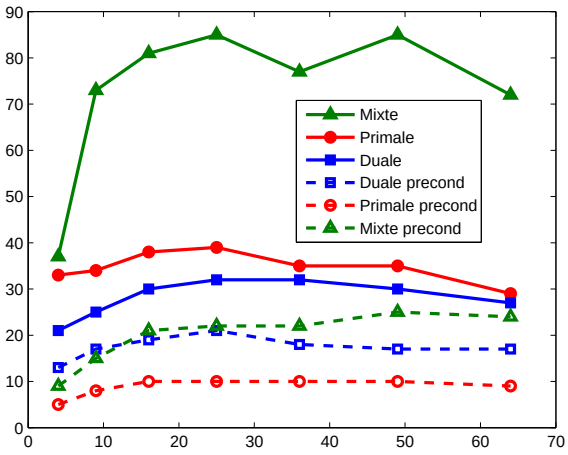
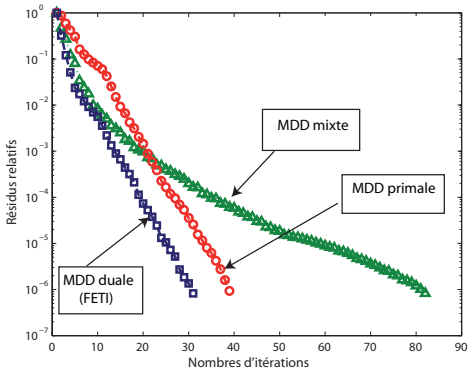


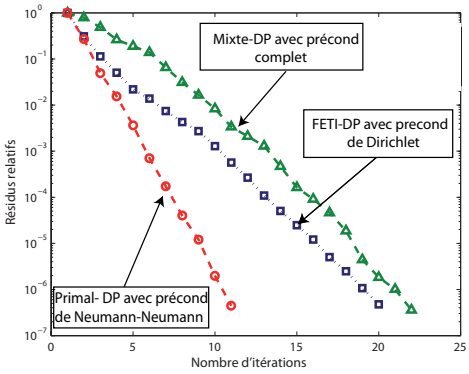
FIGURE 7.6 – Nombre d'itérations nécessaire pour la résolution du système linéaire par les trois MDD d'un problème elliptique avec préconditionnement pour une partition "quadrilée" en 16 sous-domaines et une précision de 10^{-6}.

La Figure 7.7 présente pour le cas-test considéré l'évolution du résidu au cours des itérations de GMRES pour les 3 MDD avec ou sans préconditionnement. On y observe, dans le cas sans préconditionnement, comme dans le cas d'une partition en bandes (voir Figure 7.4), que l'allure de la convergence de l'approche mixte possède des propriétés intéressantes : au début du processus, elle est très similaire à l'approche duale qui décroît rapidement ; ensuite elle entame une décroissance plus lente pour obtenir plus tardivement une convergence. Dans l'approche primale, même si dans les premières itérations on constate une petite oscillation de la convergence, la convergence du processus s'accélère par la suite de façon uniforme jusqu'à atteindre le critère d'arrêt (résidu relatif $\leq 10^{-6}$) en un nombre d'itérations de moitié inférieur à celui de l'approche mixte. La méthode duale (FETI) étant la plus performante ici.

Lorsqu'un préconditionneur complet est utilisé dans les 3 méthodes, on observe dans la Figure 7.7, qu'étant donné que l'évolution du résidu est intimement liée au spectre des opérateurs, la méthode primale avec préconditionneur de Neumann-Neumann converge de façon remarquable et donc possède de bonnes propriétés spectrales. L'approche FETI-DP avec préconditionneur de Dirichlet et l'approche mixte avec péconditionneur complet ont



Sans préconditionnement.



Avec préconditionnement.

FIGURE 7.7 – Diminution des résidus relatifs du GMRES(50) du problème d'interface des 3 MDD (primale, duale et mixte) préconditionnées appliquées à un problème elliptique pour une partition "quadrillée" de Ω en 16 sous-domaines.

des propriétés spectrales et donc une courbe de convergence similaires, avec un nombre d'itérations à la convergence deux fois supérieur à celui de l'approche primale.

Chapitre 8

Stratégies de préconditionnement pour le système de Stokes

On va adapter dans ce chapitre les différentes techniques de préconditionnnement décrites précédemment pour les problèmes elliptiques au système de Stokes.

8.1 Stratégie de préconditionnement pour la MDD mixte

Afin de construire un préconditionneur pour la MDD mixte développée au chapitre 5 pour le problème de Stokes, on suivra la procédure utilisée pour les problèmes coercifs introduite au chapitre précédent. Cependant, certaines modifications devront être apportées pour le système de Stokes. Pour simplifier la compréhension de la technique de préconditionnement, on en fera une présentation dans ce paragraphe pour un partitionnement de Ω en deux sous-domaines uniquement, qui reste valable cependant pour une décomposition en plusieurs sous-domaines. Dans ce qui va suivre, on adoptera les typographies d'indices vues précédemment à savoir I pour désigner l'intérieur du sous-domaine et Γ pour désigner l'interface.

En considérant une partition de Ω en deux-sous domaines, le problème de Stokes revient

dans la MDD mixte à trouver les multiplicateurs (Φ, ψ) qui vérifient le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc} A_{II}^{(1)} & B_{II}^{(1)} & A_{I\Gamma}^{(1)} & B_{I\Gamma}^{(1)} \\ B_{II}^{(1)^t} & 0 & \tilde{B}_{I\Gamma}^{(1)} & 0 \\ A_{I\Gamma}^{(1)^t} & \tilde{B}_{I\Gamma}^{(1)^t} & A_{\Gamma\Gamma}^{1} + T_u^{(1)} & B_{\Gamma\Gamma}^{(1)} \\ B_{I\Gamma}^{(1)^t} & 0 & \tilde{B}_{\Gamma\Gamma}^{(1)} & -T_p^{(1)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{u}_I^{(1)} \\ p_I^{(1)} \\ \mathbf{u}_\Gamma^{(1)} \\ p_\Gamma^{(1)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} F_I^{(1)} \\ 0 \\ F_\Gamma^{(1)} + \Phi^{(1)} \\ \psi^{(1)} \end{array} \right), \\ \\ \left(\begin{array}{cccc} A_{II}^{(2)} & B_{II}^{(2)} & A_{I\Gamma}^{(2)} & B_{I\Gamma}^{(2)} \\ B_{II}^{(2)^t} & 0 & \tilde{B}_{I\Gamma}^{(2)} & 0 \\ A_{I\Gamma}^{(2)^t} & \tilde{B}_{I\Gamma}^{(2)^t} & A_{\Gamma\Gamma}^{2} + T_u^{(2)} & B_{\Gamma\Gamma}^{(2)} \\ B_{I\Gamma}^{(2)^t} & 0 & \tilde{B}_{\Gamma\Gamma}^{(2)} & -T_p^{(2)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{u}_I^{(2)} \\ p_I^{(2)} \\ \mathbf{u}_\Gamma^{(2)} \\ p_\Gamma^{(2)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} F_I^{(2)} \\ 0 \\ F_\Gamma^{(2)} + \Phi^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{array} \right) \end{array} \right. \tag{8.1}$$

couplé aux conditions de raccord :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} \Phi^{(1)} \\ \psi^{(1)} \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{c} \Phi^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} T_u^{(1)} + T_u^{(2)} & 0 \\ 0 & -T_p^{(1)} - T_p^{(2)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{u}^{(2)} \\ p^{(2)} \end{array} \right), \\ \\ \left(\begin{array}{c} \Phi^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{c} \Phi^{(1)} \\ \psi^{(1)} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} T_u^{(1)} + T_u^{(2)} & 0 \\ 0 & -T_p^{(1)} - T_p^{(2)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{u}^{(1)} \\ p^{(1)} \end{array} \right), \end{array} \right. \tag{8.2}$$

En notant par $S^{(i)}$ les compléments de Schur définis par :

$$S^{(i)} = \left(\begin{array}{cc} A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} & B_{\Gamma\Gamma}^{(i)} \\ \tilde{B}_{\Gamma\Gamma}^{(i)} & 0 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} A_{I\Gamma}^{(i)} & B_{I\Gamma}^{(i)} \\ \tilde{B}_{I\Gamma}^{(i)} & 0 \end{array} \right)^T \left(\begin{array}{cc} A_{II}^{(i)} & B_{II}^{(i)} \\ B_{II}^{(i)^T} & 0 \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{cc} A_{I\Gamma}^{(i)} & B_{I\Gamma}^{(i)} \\ \tilde{B}_{I\Gamma}^{(i)} & 0 \end{array} \right), \tag{8.3}$$

et en éliminant les variables intérieures $\left(\mathbf{u}_I^{(i)}, p_I^{(i)}\right)$ en faveur des variables définies sur les interfaces $\left(\mathbf{u}_\Gamma^{(i)}, p_\Gamma^{(i)}\right)$ dans le système (8.1), on obtient le système d'équations linéaires pour les variables $(\Phi^{(i)}, \psi^{(i)})$ suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cc} S_{11}^{(1)} + T_u^{(1)} & S_{12}^{(1)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} - T_p^{(1)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{u}_\Gamma^{(1)} \\ p_\Gamma^{(1)} \end{array} \right) = \mathcal{F}_\Gamma^{(1)} + \left(\begin{array}{c} \Phi^{(1)} \\ \psi^{(1)} \end{array} \right), \\ \\ \left(\begin{array}{cc} S_{11}^{(2)} + T_u^{(2)} & S_{12}^{(2)} \\ S_{21}^{(2)} & S_{22}^{(2)} - T_p^{(2)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{u}_\Gamma^{(2)} \\ p_\Gamma^{(2)} \end{array} \right) = \mathcal{F}_\Gamma^{(2)} + \left(\begin{array}{c} \Phi^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{array} \right), \end{array} \right. \tag{8.4}$$

où l'on a noté les blocs des matrices de complément de Schur $S^{(i)}$ de la manière :

$$S^{(i)} = \left(\begin{array}{cc} S_{11}^{(i)} & S_{12}^{(i)} \\ S_{21}^{(i)} & S_{22}^{(i)} \end{array} \right), \tag{8.5}$$

et où les seconds membres $\mathcal{F}_\Gamma^{(i)}$ sont donnés par :

$$\mathcal{F}_\Gamma^{(i)} = F_\Gamma^{(i)} - \begin{pmatrix} A_{I\Gamma}^{(i)} & B_{I\Gamma}^{(i)} \\ \tilde{B}_{I\Gamma}^{(i)} & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_{II}^{(i)} & B_{II}^{(i)} \\ B_{II}^{(i)^T} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_I^{(i)} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8.6}$$

En combinant les équations du problème réduit (8.4) avec celles des équations de raccord (8.2), on obtient un système relatif aux inconnues d'interfaces $\left(\Phi^{(i)}, \psi^{(i)}\right)$ dont le membre de droite est donné par :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \mathcal{X} \\ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \mathcal{Y} & \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^{(1)} \\ \psi^{(1)} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Phi^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \tag{8.7}$$

où les matrice $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ sont définies par les relations :

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \begin{pmatrix} T_u^{(1)} + T_u^{(2)} & 0 \\ 0 & -T_p^{(1)} - T_p^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11}^{(1)} + T_u^{(1)} & S_{12}^{(1)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} - T_p^{(1)} \end{pmatrix}^{-1}, \\ \mathcal{Y} &= \begin{pmatrix} T_u^{(1)} + T_u^{(2)} & 0 \\ 0 & -T_p^{(1)} - T_p^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11}^{(2)} + T_u^{(2)} & S_{12}^{(2)} \\ S_{21}^{(2)} & S_{22}^{(2)} - T_p^{(2)} \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Préconditionner la matrice d'itération de (8.7) revient à choisir $T_u^{(1)}, T_u^{(2)}, T_p^{(1)}$ et $T_p^{(2)}$ de telle sorte que :

$$\mathcal{X} \simeq \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y} \simeq \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{8.9}$$

Un bon préconditionneur des méthodes mixtes consisterait alors à prendre les opérateurs locaux d'interfaces $T_u^{(i)}$ comme étant les blocs diagonaux $S_{11}^{(i)}$ de la matrice du complément de Schur d'interface $S^{(i)}$ et pour T_p les blocs diagonaux $S_{22}^{(i)}$ avec un signe inversé :

$$\begin{aligned} T_u^{(1)} &= S_{11}^{(2)} \quad T_u^{(2)} = S_{11}^{(1)}, \\ T_p^{(1)} &= -S_{22}^{(2)} \quad T_p^{(2)} = -S_{22}^{(1)}. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Cette manière de faire le préconditionnement de la MDD mixte pour le système de Stokes est une adaptation du cas d'un problème elliptique (chapitre 7, paragraphe 3) : on ne prendra pas comme dans (7.30) le complément de Schur extérieur complet du sous-domaine voisin, mais seulement les blocs diagonaux $S_{11}^{(i)}, S_{22}^{(i)}$ de ce complément de Schur. Ce choix est imposé par le fait que, dans la MDD mixte construite pour le système

de Stokes, l'augmentation des matrices de rigidité locales c'est faite séparément pour la vitesse et la pression afin de garantir la condition inf-sup au niveau local. Il est alors logique de s'attendre, contrairement au cas d'un préconditionnement de la MDD mixte pour un problème elliptique dans le cas d'une décomposition en 2 sous-domaines, à ce qu'on obtienne une convergence en plus d'une itération dans le cas du système de Stokes vu que le choix (8.10) ne donne pas une matrice d'itération (8.7) égale à la matrice unité.

Pour le cas d'une décomposition en plusieurs sous-domaines, en adoptant la stratégie (8.10), le calcul du préconditionneur est cher : on a à calculer le complément de schur pour chaque interface, c'est à dire on aura un nombre d'inversions de systèmes locaux égale à $2\times$ nombre d'interfaces). Sur chaque sous-domaine, la contribution locale du préconditionneur sera la somme des compléments de schur des interfaces des sous-domaines voisins.

De plus, cette stratégie n'est pas bien adaptée au calcul parallèle car un préconditionneur doit autant que possible consister en un assemblage de contributions locales. Or en faisant le choix (8.10) les contributions viennent des sous-domaines voisins. On verra dans le paragraphe suivant, comment rendre le calcul du préconditionneur parralèlisable tout en allégeant son calcul.

Remarque 8.1.1. *Dans la présentation faite ci-dessus, pour des raisons de clarté, on a pas tenu compte du couplage entre les deux sous-problèmes induit par la contrainte de moyenne nulle de la pression sur tout le domaine. Cependant, cette contrainte sera ajoutée, dans le cas d'une décomposition en plusieurs sous-domaines, au problème relatif aux point-multiples à l'aide d'un multiplicateur scalaire.*

8.2 Strip-preconditioner : Préconditionneur allégé des MDD mixtes

Le but de ce paragraphe est de rendre le calcul du préconditionneur des MDD mixtes induit par le choix (8.10) des matrices d'augmentation $T_u^{(i)}, T_p^{(i)}$, parallélisable. Comme nous allons le détailler un peu plus loin, cela consiste à considérer, lors du calcul de ce nouveau préconditionneur, uniquement une "bande" proche de l'ensemble des interfaces

entre sous-domaines. Cette manière de faire, nécessitant beaucoup moins de place mémoire et de temps de calcul, va "alléger" le calcul du préconditionneur et le rendre parralélisable dans le sens où un seul processeur lui sera dédié. Nous appellerons par la suite ce nouveau préconditionneur des MDD mixte "préconditionneur allégé" où "strip-preconditioner" comme dans [52].

L'idée dans le calcul du "préconditionneur allégé" des MDD mixte (aussi bien pour les problèmes elliptiques que pour le système de Stokes) est d'approximer le complément de Schur $S^{(i)}$ du sous-domaine voisin, lors du calcul des contributions locales de ce préconditionneur, par le complément de Schur d'**une partie de ce sous-domaine**. En effet, en introduisant une "bande" (Strip en Anglais) autour de l'interface, ne seront alors considérés lors du calcul du complément de Schur $S^{(i)}$ que les degrés de liberté portés par les noeuds du maillage situés sur cette bande, voir Figure 7.1.

Lorsque la largeur de la bande est étroite, le coût de calcul et les besoins en mémoire sont faibles et le nombre d'itérations est relativement élevé par rapport à l'utilisation d'un "préconditionneur complet" (i.e. préconditionneur calculé en utilisant les compléments de Schur de tout le sous-domaine voisin). Lorsque la bande est large, l'inverse est vérifié.

8.3 Validation numérique du préconditionneur complet et allégé de la MDD mixte

Dans ce qui suit, on testera les deux stratégies de précoditionnement de la MDD mixte pour le système de Stokes introduites dans les deux paragraphes précédents. Le cas-test considéré est celui de Bercovier-Engelman [5] et le schéma d'éléments finis celui de Tylor-Hood d'ordre d'approximation polynômiale 2 pour la vitesse. Un partitionnement quadrillé du domaine Ω en 16 sous-domaines dont les caractéristiques, pour différents pas de maillage h, sont données au tableau 8.1 sera utilisé pour comparer l'efficacité de la MDD mixte avec et sans préconditionnement (complet ou allégé).
Le tableau 8.2, résume pour différentes largeurs de bande mesurées en fonction du pas de maillage h, le nombre de degrés de liberté associé à cette bande pour un partitionnement de Ω en 16 sous-domaines.

h	Nbre ddl **u**	Nbre ddl p	Taille des pbmes des sous-domaines	Taille du pbme d'interface (Mixte)
$1/20$	5794	747	350	1440
$1/40$	22178	2815	1350	2710
$1/60$	49530	6254	3000	3940

TABLE 8.1 – Nombre de ddl pour différents pas de maillage.

h	Taille du pbme d'interface	$2 \times h$	$3 \times h$	$4 \times h$	$5 \times h$	Nbre total des ddl de Ω
$1/20$	1440	4643	5790	6102	6189	6541
$1/40$	2710	10820	15235	19268	21997	24993
$1/60$	3940	16613	24103	39039	44225	55784

TABLE 8.2 – Nombre de ddl associés à différentes largeurs de bande à prendre en considération lors du calcul des préconditionneurs allégés pour différents pas de maillage.

La Figure 8.1 présente, pour le cas-test de Bercovier-Engelman considéré, l'évolution des résidus au cours des itérations du GMRES(50) pour la MDD mixte appliquée au système de Stokes, d'abord sans préconditionnement, ensuite avec un préconditionneur complet et avec un préconditionneur allégé. On observe, pour le cas sans préconditionneur, que l'allure de la convergence se comporte de façon similaire au cas d'un problème elliptique déjà traité dans le chapitre 7 : une décroissance rapide au cours des premières itérations (pour un résidu relatif $\leq 10^{-3}$) semblable à celle avec préconditionnement ; ensuite une décroissance plus lente dans les itérations suivantes.

8.4 Comparaison avec une méthode FETI-DP préconditionnée

Dans ce paragraphe, nous allons coupler à la méthode FETI-DP, introduite au chapitre 6, le préconditionneur de Dirichlet. Dans le tableau 8.3 un comparatif de la taille du problème d'interface pour chacune des deux méthodes (FETI-DP et MDD mixte), lorsqu'elles sont appliquées au système de Stokes, pour différents pas de maillage.

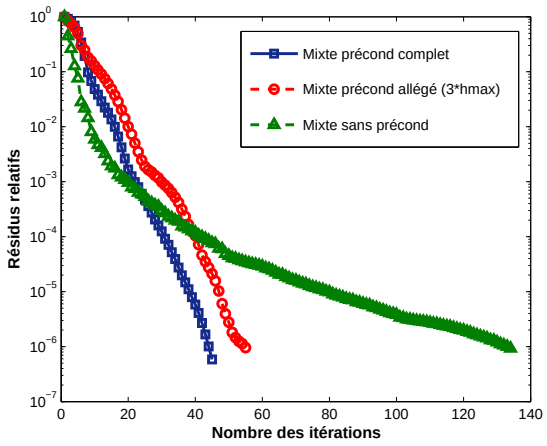


FIGURE 8.1 – Comparatif de la diminution des résidus relatifs de la MDD mixte appliquée au problème de Stokes sans préconditionnment, avec un préconditionneur complet et avec un préconditionneur allégé pour une largeur de bande de longueur $3 \times h$, avec un pas de maillage $h = 1/60$.

Il est bien établi que les algorithmes FETI-DP convergent mal quand ils ne sont pas couplés à une technique de préconditionnement appropriée (voir par exemple [30, 40]). Les résultats décrits dans le tableau 6.3 l'illustrent parfaitement. Le tableau 8.4 résume l'amélioration spectaculaire résultant de cette procédure de préconditionnement de type Dirichlet pour la méthode FETI-DP au détriment néanmoins d'une mauvaise précision spécialement concernant la pression. On remarque, à présent, que la méthode FETI-DP préconditionnée est clairement plus efficace que la DDM mixte, même si cette dernière est

h	Nbre ddl **u**	Nbre ddl p	Taille des pbmes des sous-domaines	Taille du pbme d'interface (FETI)	Taille du pbme d'interface (Mixte)
$1/20$	5794	747	350	720	1440
$1/40$	22178	2815	1350	1355	2710
$1/60$	49530	6254	3000	1970	3940

TABLE 8.3 – Nombre de ddl résultant d'une approximation par le schéma d'EF de Taylor-Hood (2) pour le système de Stokes pour différents pas de maillage.

h	Numb. of Iter.	Rel. Err. $\mathbf{u}$	Rel. Err. p
$1/10$	22	$8.06\ 10^{-6}$	$7.94\ 10^{-4}$
$1/20$	32	$4.52\ 10^{-5}$	$4.52\ 10^{-3}$
$1/30$	36	$7.95\ 10^{-5}$	$7.91\ 10^{-3}$
$1/40$	36	$7.55\ 10^{-5}$	$7.06\ 10^{-3}$
$1/50$	38	$1.74\ 10^{-5}$	$1.73\ 10^{-2}$
$1/60$	42	$2.50\ 10^{-5}$	$2.53\ 10^{-4}$

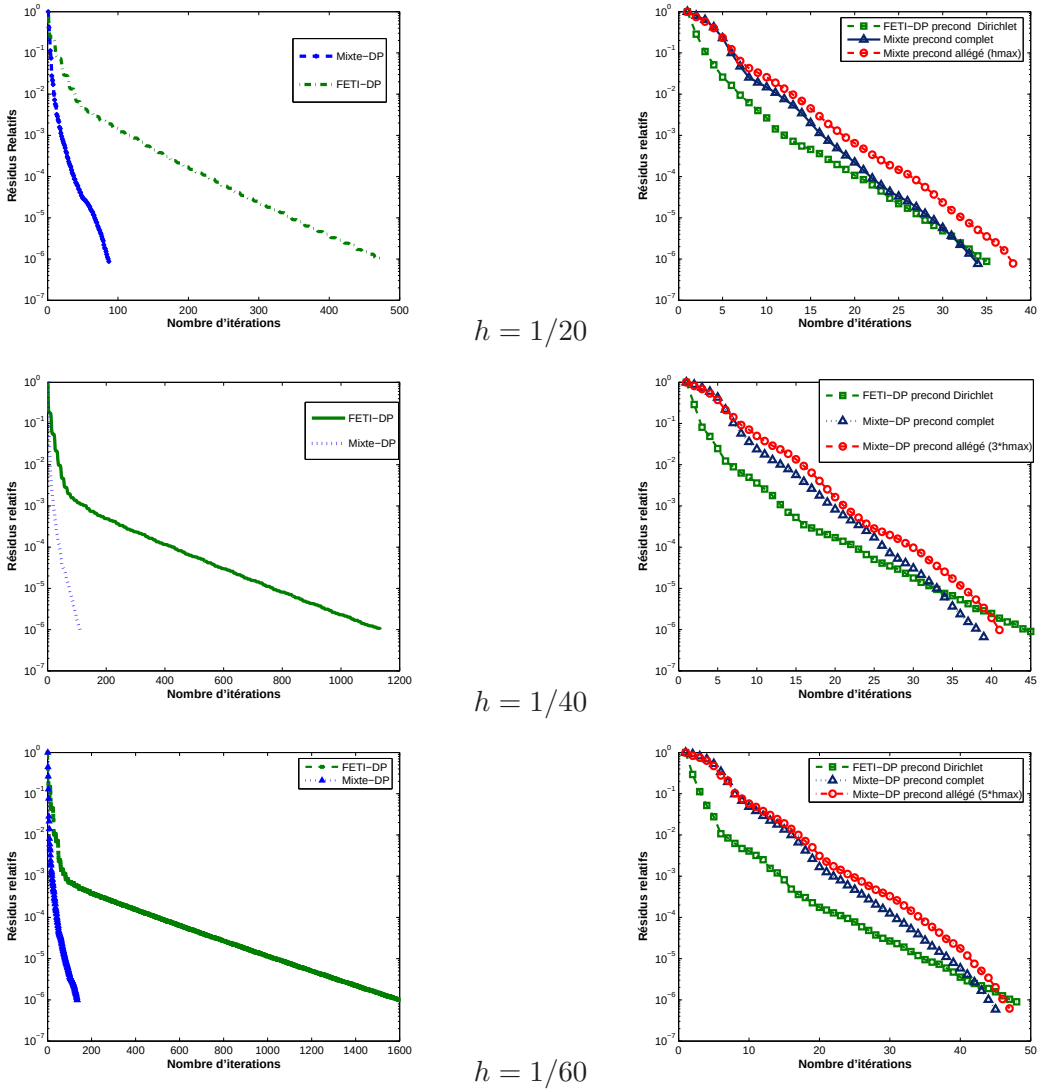
TABLE 8.4 – Réduction spectaculaire du nombre d'itérations de la méthode FETI-DP avec préconditionneur de Dirichlet.

h	Mixed-DP	Prec. Mixed-DP	FETI-DP	Prec. FETI-DP
$1/10$	48	22	111	22
$1/20$	80	23	366	32
$1/30$	85	26	675	36

TABLE 8.5 – Convergence de la méthode FETI-DP et de la MDD mixte avec et sans préconditionnement pour différents pas de maillage.

plus fiable car elle est fondée sur une base théorique solide.

Cependant, pour faire une comparaison de ces deux méthodes sur la même base, on comparera la méthode FETI-DP avec la MDD mixte préconditionnée. Dans le tableau 8.5 on donne le nombre d'itérations utilisées par les quatre méthodes : FETI-DP , MDD mixtes sans et avec préconditionnement, pour trois maillages différents. On remarquera alors clairement que l'avantage de la MDD mixte est restauré à l'aide d'un préconditionneur adapté. Cette même constatation est apparente dans le figure 8.2 qui trace la diminution des résidus du problème d'interface pour les méthodes FETI-DP et mixte.



$h = 1/20$

$h = 1/40$

$h = 1/60$

Sans préconditionnement. Avec préconditionnement.

FIGURE 8.2 – Comparatif de la diminution des résidus relatifs du GMRES(50) du problème d'interface entre la MDD mixte et la méthode FETI-DP préconditionnées pour une partition "quadrillée" de Ω en 16 sous-domaines pour différents pas de maillage.

Conclusion

Les méthodes de décomposition de domaine sont des méthodes itératives couplées à une approche par sous-domaines. Elles représentent non pas une alternative mais un choix incontournable pour résoudre les problèmes de grande taille. Ces méthodes sont plus efficaces qu'une méthode itérative appliquée au problème global, car elles allient des méthodes directes et une méthode itérative pour résoudre un problème d'interface, mieux conditionné que le problème global.

Notre étude a porté sur l'élaboration d'une méthode de décomposition de domaine (MDD) sans recouvrement multi-champs (déplacement/pression) dédiée au système discret de Stokes résultant d'une approximation par une méthode d'éléments finis à pression continue. L'approche choisie a été celle des MDD mixtes, où le raccord au niveau des interfaces des sous-domaines s'écrit à l'aide de deux types de multiplicateurs. Le premier multiplicateur exprime une combinaison entre la vitesse et la composante normale du tenseur des contraintes du fluide. Le deuxième permet un raccord primal de la pression du fluide au niveau des interfaces. A notre connaissance, cette approche n'a pas été explorée auparavant et a pour avantage la suppression de la contrainte de moyenne nulle de la pression relative aux problèmes locaux.

Dans un premier temps, une démonstration rigoureuse de la stabilité de cette méthode a été établie, aussi bien au niveau de l'inversion des problèmes locaux qu'au niveau du problème associé aux point-multiples. A partir de cette propriété de stabilité, permettant un contrôle strict de la solution à l'aide des données, nous avons pu établir, en utilisant une argumentation développée par Collino & al [16], la convergence du procédé itératif construit autour des inconnues d'interfaces.

Dans un deuxième temps, nous avons étudié la mise en oeuvre de cette méthode et proposé un code de calcul parfaitement parallèlisable et adaptable à différents partitionnements du domaine géométrique. Plusieurs tests numériques, réalisés autour de cas-tests relatifs au système de Stokes, sans préconditionnement du problème condensé à l'interface, ont montré clairement que la méthode de décomposition de domaine mixte multi-champs que nous avons développé est plus efficace que la méthode FETI. Cet avantage de la MDD mixte sur la méthode FETI sans préconditionnement est dû aux conditions de raccords au niveau des interfaces dans la MDD mixte, plus respectueuses de la physique des problèmes multi-champs.

L'étape suivante de notre étude a été de rendre la méthode extensible. A cet effet, différentes stratégies de préconditionnement ont été étudiées. Pour la MDD mixte nous avons adapté la technique de préconditionnement développée pour des problèmes elliptiques dans [57] et [30] consistant à prendre les opérateurs locaux d'interfaces $T^{(i)}$, qui interviennent dans la définition des nouvelles variables d'interfaces, comme étant les blocs diagonaux des compléments de Schur des sous-domaines voisins. Ce choix, motivé par le souci de garantir la condition inf-sup au niveau des problèmes locaux, s'est avéré très performant dans les différents tests numériques réalisés où l'on a constaté un gain de **60 %** dans le nombre d'itérations nécessaire à la convergence par rapport à la même méthode sans préconditionnement.

Aussi, afin de valider les performances de cette stratégie de préconditionnement pour la MDD mixte dédiée au système de Stokes, nous l'avons comparée à une méthode FETI-DP couplé au préconditionneur de Dirichlet. La technique FETI-DP pour le système discret de Stokes, construite d'une manière formelle comme il est habituel de le faire pour un problème elliptique coercif, semble ne pas avoir déjà été considérée pour des approximations par éléments finis à pression continue du système de Stokes et constitue à notre avis un travail original. Cette étude comparative a montré l'avantage numérique de la MDD mixte préconditionnée sur celle de la FETI-DP avec préconditionneur de Dirichlet même si dans la première le calcul du préconditionneur n'est pas parallèlisable. Nous avons à la fin introduit un préconditionneur allégé " strip-preconditioner" pour pallier à cette lacune.

Tous les tests réalisés l'ont été sur une machine mono-processeur ; il serait intéressant

de refaire ces tests sur des machines parallèles et aussi de developer un mailleur générant des maillages ne comportant pas de points singuliers afin de pouvoir tester la MDD mixte pour le schéma d'éléments finis de Scott-Vogelius.

Bibliographie

[1] M. Ainsworth, S. Sherwin, Domain decomposition preconditioners for p and hp finite element approximation of Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **175** (1999) 243–266.

[2] A. Bendali, Y. Boubendir, Méthodes de décomposition de domaine et éléments finis nodaux pour la résolution de l'équation d'Helmholtz. *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I* **339** (2004) 229–234.

[3] A. Bendali, Y. Boubendir, Non-overlapping domain decomposition method for a nodal finite element method. *Numerische Mathematik* **103** (2006) 515–537.

[4] H. Benhassine, A. Bendali, A non-overlapping domain decomposition method for continuous-pressure mixed finite element approximation of the Stokes problem. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis* **45** (2011) 675–696.

[5] M. Bercovier, M. Engelman, A finite Element for the Numerical Solution of Viscous Incompressible Flows. *J. of Comp. Physics* **30** (1979) 181–201.

[6] C. Bernardi, V. Girault, Un résultat de trace pour les éléments finis de Crouzeix-Raviart, application à la discrétisation des équations de Darcy, *C.R. Acad. Sci.Paris*, sér 1 **344** (2007), 271–276.

[7] Y. Boubendir, *Techniques de décompositions de domaine et méthode d'équations intégrales*. PhD Thesis, INSA, Toulouse (2002).

[8] Y. Boubendir, An analysis of the BEM-FEM non-overlapping domain decomposition method for a scattering problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **204** (2007) 282– 291

[9] S. C. Brenner, L. R. Scott, *The mathematical theory of finite element methods*. Springer-Verlag, New-York (2002).

[10] S. C. Brenner, L. Sung, BDDC and FETI-DP without matrices or vectors. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **196** (2007) 1429-1435.

[11] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag, New-York (1991).

[12] C. Calgaro, J. Laminie, On the domain decomposition method for the Stokes Problem with continuous pressure. *Numer. Methods Partial Differential Equations* **16** (2000) 84–106.

[13] P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, Amsterdam (1978).

[14] T. Chacón Rebollo, E. Chacón Vera, A non-overlapping domain decomposition method for the Stokes equations via a penalty term on the interface. *C. R. Acad. Sci. Paris ser.I* **334** (2002) 221–226.

[15] T. Chacón Rebollo, E. Chacón Vera, Study of a non-overlapping domain decomposition method : Poisson and Stokes problems. *Applied Numerical Mathematics* **48** (2004) 169–194.

[16] F. Collino, S. Ghanemi, P. Joly, Domain decomposition method for harmonic wave propagation : a general presentation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **184** (2000) 171–211.

[17] J. M. Cros, *Résolution de problèmes aux valeurs propres en calcul des structures par utilisation du calcul parallèle*. Thèse de doctorat - École Normale Supérieure de Cachan (1997).

[18] J. M. Cros, A preconditioner for the Schur complement domain decomposition method *Fourteenth International Conference on Domain Decomposition Methods.* (2003) 373 – 380.

[19] B. Després, Domain decomposition method and the Helmholtz problem. *Mathematical and Numerical Aspect of Wave Propagation Phenomena*, SIAM Philadelphia (1991) 44–52.

[20] M. Discacciati, A. Quarteroni, A. Valli, Robin-Robin domain decomposition methods for the Stokes-Darcy Coupling. *SIAM J. Numer. Anal.* **45** (2007) 1246–1268.

[21] C. Farhat, F. X. Roux, A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **32** (1991) 1205–1227.

[22] C. Farhat, F. X. Roux. The dual Schur complement method with well-posed local Neumann problems, *Contemporary Mathematics.* **157** (1994) 193–201.

[23] C. Farhat, M. Lesoinne, P. Le Tallec, K. Pierson, D. Rixen, FETI-DP : a dual-primal unified FETI method-part I : A faster alternative to the two-level FETI method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **50** (2001) 1523–1544.

[24] Y. Fragakis, M. Papadrakakis, A unified framework for formulating domain decomposition methods in structural mechanics. *Technical report, Institute of Structural Analysis and Seismic Research*, National Technical University of Athens, (2002).

[25] S. Ghanemi, A domain decomposition method for Helmholtz scattering problems. *Ninth Int. Conf. on Domain Decomposition Methods*, (1997), 105–112.

[26] V. Girault, P.A. Raviart, *Finite Element Methods For Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1986).

[27] V. Girault, B. Rivière, M. F. Wheeler, A discontinuous Galerkin method with non-overlapping domain decomposition for the Stokes and Navier-Stokes problems. *Mathematics of Computation* **74** (2004) 53–84.

[28] R. Glowinski, P. L. Tallec, Augmented lagrangian interpretation of the non-overlapping Schwartz alternating method, *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations.* (1990) 224–231.

[29] P. Gosselet, *Méthodes de décomposition de domaine et méthodes d'accélération pour les problèmes multichamps en mécanique non-linéaire*. Thèse de doctorat - Université de Paris 6 (2003).

[30] P. Gosselet, C. Rey, Non-overlapping Domain Decomposition Methods in Structural Mechanics, *Arch. Comput. Meth. Engng.* **13** (2006) 515–572.

[31] M. D. Gunzburger, *Finite element methods for viscous incompressible fluids : A guide to theory, practice and algorithms*. Academic Press, INC, London (1989).

[32] D. Rh. Gwynllyw, T. N. Phillips, On the enforcement of the zero mean pressure condition in the spectral element approximation of the Stokes Problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **195** (2006) 1027–1049.

[33] H. H. Kim, C. Lee, A Neumann-Dirichlet preconditioner for a FETI-DP formulation of the two dimensional Stokes problem with mortar methods. *SIAM J. Sci. Comput*. **28** (2006) 1133–1152.

[34] H. H. Kim, C. Lee, A FETI-DP formulation for the Stokes problem without primal pressure components, *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XIX Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, **78**, Part 3, (2011), 415-422.

[35] A. Klawonn, L.F. Pavarino, Overlapping Schwarz methods for elasticity and Stokes problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. **165** (1998) 233–245.

[36] A. Klawonn, O. Widlund, FETI and Neumann-Neumann iterative substructuring methods : connections and new results. *Comm. Pure and Appl. Math.* **LIV**, (2001) 57–90.

[37] A. Klawonn, O. Rheinbach, Robust FETI-DP methods for heterogeneous three dimensional elasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* **196**, Issue 8, (2007) 1400–1414.

[38] A. Klawonn, O. Rheinbach, O. B. Widlund, An Analysis of a FETI-DP Algorithm on Irregular Subdomains in the Plane. *SIAM J. on Numerical Analysis.* **46**, Issue 5, (2008) 2484–2504 .

[39] P. Le Tallec, A. Patra, Non-overlapping domain decomposition methods for adaptive hp approximations for the Stokes problem with discontinuous pressure fields. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. **145** (1997) 361–379.

[40] J. Li, A Dual-Primal FETI methods for incompressible Stokes equations. *Numerische Mathematik* **102** (2005) 257–275.

[41] P. L. Lions, On the Schwarz alternating method III : A variant for non-overlapping subdomains. *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, SIAM Philadelphia* (1990) 202–223.

[42] G. Lube, L. Müller, F.C. Otto, A nonoverlapping domain decomposition method for stabilised finite element approximations of the Oseen equations. *Journal of Computational And Applied Mathematics* **132** (2001) 211–236.

[43] F. Magoules, F. X. Roux, Lagrangian formulation of domain decomposition methods : A unified theory. *Applied Mathematical Modelling* **30** (2006) 593–615.

[44] J. Mandel, Balancing domain decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **9**, Issue 3, (1993) 233–241.

[45] J. Mandel, C. R. Dohrmann, Convergence of a balancing domain decomposition by constraints and energy minimization, *Numer. Linear Algebra Appl.* **10** (2003) 639–659.

[46] J. Mandel, R. Tezaur, Convergence of a substructuring method with Lagrange multipliers. *Numerische Mathematik.* **73**, (1996) 473–487.

[47] J. Mandel, R. Tezaur, On the convergence of dual-primal substructuring method, *Numerische Mathematik.* **88** (2001) 543–558.

[48] L. D. Marini, A. Quarteroni, Relaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements. *Numerische Mathematik* **55** (1989) 575–589.

[49] F. C. Otto, G. Lube, A nonoverlapping domain decomposition method for the Oseen equations. *Mathematical Model and Methods in Applied Sciences* **8** (1998) 1091–1117.

[50] F. C. Otto, G. Lube, L. Müller, An iterative substructuring method for div-stable finite element approximation of the Oseen problem. *Computing* **67** (2001) 91–117.

[51] L. F. Pavarino, O. B. Widlund, Balancing Neumann-Neumann methods for incompressible Stokes equations. *Comm. Pure and Appl. Math.* **55** (2002) 302–335.

[52] R. R. Paz, M. A. Storti, An interface strip preconditioner for domain decomposition methods : application to hydrology. *Int. J. Numer. Meth. Engng* **00** (2004) 1–22.

[53] J. Pommier, Y. Renard. Getfem++, an open source generic C++ library for finite element methods. http ://download.gna.org/getfem/html/homepage/

[54] A. Quarteroni, A. Valli, *Domain decomposition methods for partial differential equations*. Oxford University Press Inc, New York (1999).

[55] E. M. Ronquist, *A domain decomposition solver for the steady Navier-Stokes equations*. Available at `http ://www.math.ntnu.no/ronquist/publications/icosahom95.ps`.

[56] F. X. Roux, *Méthode de décomposition de domaine à l'aide de multiplicateurs de Lagrange et application à la résolution en parallèle des équations de l'élasticité linéaire.* Thèse de doctorat - Université Paris 6, (1989).

[57] F. X. Roux, F. Magoules, S. Salmon, L. Series, Optimization of interface operator based on algebraic approach. *Fourteenth International Conference on Domain Decomposition Methods* (2003) 297–304.

[58] F.X. Roux, F. Magoules, L. Series, Y. Boubendir, Approximation of Optimal Interface Boundary Conditions for Two-Lagrange Multiplier FETI Method. *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, **40**, Part V, (2005), 283–290.

[59] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*.PWS Publishing Company, Boston (1996).

[60] Y. Saad, M. H. Schultz. GMRes : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymetric linear systems, *SIAM J. Sci Comput*, **7**, (1986) 856–869.

[61] B. Smith, P. Bjørstad, W. Gropp, *Domain Decomposition - Parallel multilevel methods for elliptic partial differentiel equations*. Cambridge University Press (1986).

[62] P. L. Tallec, Domain decomposition methods in computational mechanics, *Computational Mechanics Advances.* **1**, no. 2, (1994) 121–220, North-Holland.

[63] P. L. Tallec, J. Mandel, and M. Vidrascu. Generalised Neumann-Neumann preconditioners for iterative substructuring. *Procceding of the ninth conference on Domain Decomposition.* (1996) 413–425.

[64] P. L. Tallec, J. Mandel, and M. Vidrascu. A Neumann-Neumann domain decomposition algorithm for solving plate and shell problems. *SIAM J. Numer. Math.* **35** (1998) 836–867.

[65] A. Toselli, O. Widlund, *Domain Decomposition Methods - Algorithms and Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2005).

[66] B. Verrecke, H. Bavestrello, D. Dureisseix, An extension of the FETI domain decomposition method for incompressible and nearly incompressible problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **192** (2003) 3409–3429.