impliquent alors que l'on a :

$$E_\mu(0) \leqslant c\mu \tag{1}$$

On en déduit :

$$E_\mu(T) \leqslant c\mu \tag{3.19}$$

On pose :

$$\mu^{-1} q_\mu^{k\ell} = q_\mu^{k\ell} + \theta_\mu^{k\ell} \quad \text{avec } \theta_\mu^{k\ell} \longrightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}$$

et

$$\mu^{-1} q_\mu^{k\ell} \longrightarrow q_{k\ell}^* \quad , \; q_{k\ell}^* \text{ sont donnés par } (3.14)$$

$$\mu^{-1} q_\mu^{k\ell} \mu \left\| \frac{\partial u_\mu}{\partial z_k} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \left\| \frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} =$$

$$= \left(q_{k\ell}^* + \theta_\mu^{k\ell}\right) \mu \left\| \frac{\partial u_\mu}{\partial z_k} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \left\| \frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} =$$

$$= \left(q_{\ell\ell}^* + \theta_\mu^{\ell\ell}\right) \mu \left\| \frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell} \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}$$

On choisit maintenant μ tel que :

$$\theta_\mu^{\ell\ell} \succ -\frac{q_{\ell\ell}^*}{2}$$

il vient alors :

$$q_{\ell\ell}^* + \theta_\mu^{\ell\ell} \succ \frac{q_{\ell\ell}^*}{2}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \mu \left\| u'_\mu \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant c\mu \\ \\ \mu \left\| \dfrac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell} \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant c\mu \end{cases}$$

On déduit de la coercitivité des cofficients $q^*_{k\ell}$, de (3.16) , (3.18) , et $E_\mu(T) = E_\mu(0)$ que :

$$\begin{cases} \left\| u_\mu \right\|_{L^\infty\left(0,T,H^1_0(]0,\ell[\times]0,L[)\right)} \leqslant c \\ \\ \left\| u'_\mu \right\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(]0,\ell[\times]0,L[))} \leqslant c \end{cases}$$

ce qui implique les convergences :

$$(3.20) \qquad \begin{cases} u_\mu \underset{\mu\to 0}{\rightharpoonup} u & \text{dans } L^\infty(0,T,H^1_0(]0,\ell[\times]0,L[)) \text{ faible}* \\ \\ u'_\mu \underset{\mu\to 0}{\rightharpoonup} u' & \text{dans } L^\infty(0,T,L^2(]0,\ell[\times]0,L[)) \text{ faible}* \end{cases}$$

D'autre part (3.16) et (3.17) , nous donnent :

$$\begin{cases} \mu^{-1} u^0_\mu \rightharpoonup u^0 & \text{dans } H^1_0(]0,\ell[\times]0,L[) \text{ faible}* \\ \\ \mu^{-1} u^{1,*}_\mu \rightharpoonup u^1 & \text{dans } L^2(]0,\ell[\times]0,L[) \text{ faible}* \end{cases}$$

d'où (3.11)et (3.12) sont obtenus.

Il reste à montrer que (3.13) a lieu.

Soient $\varphi \in \mathfrak{D}(]0,\ell[\times]0,L[)$, $v \in \mathfrak{D}(]0,T[)$.

Multiplions la première équation de (1.19) par φv et integrons par parties sur $(]0,\ell[\times]0,L[)\times]0,T[$, on obtient alors :

(3.21)

$$(6-2\mu)\int_0^T \left(\int_0^L \left(\int_0^\ell u_\mu \varphi v'' dz_2\right) dz_3\right) dt + \int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \mu^{-1} q^{k\ell}_\mu \frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell}\frac{\partial \varphi}{\partial z_k} v dz dt = 0$$

Passant à la limite, on trouve :

$$6\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell \mu\varphi v'' dz_2dz_3dt+\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell q^*_{k\ell}\frac{\partial u}{\partial z_\ell}\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}vdzdt \quad = \quad 0$$

En integrant une deuxième fois par parties, on déduit la première équation de (3.13) grâce à la deuxième équation de système (1.19) et à la première convegence de (3.12), la deuxième équation de (3.13) est satisfaite.

Montrons maintenant que les deux dernières équations de (3.13) sont satisfaites. Pour ce faire, multiplions la première équation du système (1.19) par $\varphi.v$ avec :

$$\varphi \quad \in \quad \mathfrak{D}\left(]0,\ell[\times]0,L[\right)\times]0,T[) \text{ et } v\in\mathfrak{D}(]0,T[),\ v\left(T\right)=0,\ v'\left(T\right)=0$$

et intégrons par parties deux fois par rapport à t ,il vient alors :

$$\Big[\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell (6-2\mu)\,u_\mu\varphi v'' dz_2dz_3dt+\int_0^L\int_0^\ell (6-2\mu)\,u_\mu\left(0\right)v'\left(0\right)\varphi dz_2dz_3$$

$$-\int_0^L\int_0^\ell (6-2\mu)\,u'_\mu\left(0\right)v\left(0\right)\varphi dz_2)dz_3+\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell \mu^{-1}q^{k\ell}_\mu\frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell}\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}vdzdt\Big]=0$$

Le passage à la limite, donne:

$$\begin{cases} \Big[\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell 6uv''\varphi dz_2dz_3dt+\int_0^L\int_0^\ell u^0\varphi v'\left(0\right)dz_2dz_3 \\ \\ -\int_0^L\int_0^\ell u^1\varphi v\left(0\right)dz_2dz_3+\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell q^*_{kl}\frac{\partial u}{\partial z_\ell}\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}vdzdt\Big]=0 \end{cases}$$

en integrant par parties et en utilisant $(3.13)_1$,(3.20) et (3.21) ,on trouve :

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\int_0^T \int_0^L \int_0^\ell 6u''v\varphi dz_2 dz_3 dt + 6\int_0^L \int_0^\ell \left(uv'\right|_0^T \varphi dz_2 dz_3 \right. \\ -6\int_0^L \int_0^\ell \left(u'v\right|_0^T \varphi dz_2 dz_3 + \int_0^L \left(\int_0^\ell u^0 v'(0)\varphi dz_2\right) dz_3 \\ \left. -\int_0^L \left(\int_0^\ell u^1 v(0)\varphi dz_2\right) dz_3 - \int_0^T \int_0^L \int_0^\ell q_{kl}^* \frac{\partial^2 u}{\partial z_\ell \partial z_k}\varphi v dz dt\right] = 0 \end{array}\right.$$

grâce à $(3.13)_1$, il vient :

$$\left\{\begin{array}{l} \left[v'(0)\int_0^L \left(\int_0^\ell u^0\varphi dz_2\right) dz_3 - v(0)\int_0^L \left(\int_0^\ell u^1\varphi dz_2\right) dz_3 \right. \\ \left. +6v(0)\int_0^L \left(\int_0^\ell u'(0)\varphi dz_2\right) dz_3 - 6v'(0)\int_0^L \left(\int_0^\ell u(0)\varphi dz_2\right) dz_3\right] = 0 \end{array}\right.$$

En choisit v tel que $v(0) \neq 0$,et $v'(0) = 0$ il vient :

$$u'(0) = \frac{u^1}{6}$$

En suite , on choisit v tel que $v(0) = 0$ et $v'(0) \neq 0$, alors :

$$u(0) = \frac{u^0}{6}$$

Ceci achève la preuve du théorème $(3-3)$ ■

3–3 Convergence de la suite des contrôles :

Maintenant nous allons étudier la convergence du contrôle $v_\mu = -\varphi_\mu$ du système (3.3) avec φ_μ donnée par (2.16)

Pour ce faire, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme (3-3) : *On suppose que les données initiales* $\varphi_\mu^0, \varphi_\mu^{1,*}$ *du système* (2.16) *vérifient :*

$$\varphi_\mu^0 \in L^2\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \quad ; \quad \varphi_\mu^{1,*} \in H^{-1}\left(]0,\ell[\times]0,L[\right)$$

Alors il existe deux constantes c_1 *et* c_2 *, positives et indépendantes de* μ*, telles que :*

$$c_1\left\{\left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \mu^{-2}\ \left\|\varphi_\mu^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)}\right\} \leqslant$$

$$\left\|\varphi_\mu\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(]0,\ell[\times]0,L[))} \leqslant c_2\left\{\left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \mu^{-2}\ \left\|\varphi_\mu^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)}\right\}$$

Preuve. :

On commence par régulariser le système (2.16) .

Pour ce faire, introduisons τ_μ, solution du système :

$$(3.22) \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{k\ell}\dfrac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell}\right) = -\varphi_\mu^{1,*} & \text{dans} \quad (]0,\ell[\times]0,L[) \\ \\ \tau_\mu = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \end{cases}$$

Et soit γ_μ la fonction définie par :

$$\gamma_\mu(z,t) \quad = \quad \int_0^t \varphi_\mu(z,s)\,ds + \tau_\mu(z_2,z_3)$$

On vérifie comme pour (2.22) que γ_μ est solution de :

$$(3.23)\qquad \begin{cases} \left|Y_\mu^*\right|\gamma_\mu'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{k\ell}\dfrac{\partial\gamma_\mu}{\partial z_\ell}\right) = 0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\\ \gamma_\mu = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \\ \gamma_\mu(0) = \tau_\mu & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ \gamma_\mu'(0) = \varphi_\mu^{0,*} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\end{cases}$$

$\forall t\in[0,T]$, $(3,10)$ l'égualite de l'energie (3.10) donne :

(3.24)

$$\left|Y_\mu^*\right|\left\|\gamma_\mu'\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + q_\mu^{k\ell}\left\|\tfrac{\partial\gamma_\mu}{\partial z_\ell}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\|\tfrac{\partial\gamma_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} =$$

$$= \left|Y_\mu^*\right|\left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + q_\mu^{k\ell}\left\|\tfrac{\partial\tau_\mu}{\partial z_\ell}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\|\tfrac{\partial\tau_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} = C \quad \text{(constante positive)}$$

Grâce à $(3.22)_1$, il vient :

$$\int_0^L\int_0^\ell \mu^{-1}q_\mu^{k\ell}\mu\left(\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_\ell}\right)\left(\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_k}\right) = -\left\langle\varphi_\mu^{1,*},\tau_\mu\right\rangle$$

$\langle\ ,\ \rangle$désigne le produit de dualité entre $H^{-1}\left(]0,\ell[\times]0,L[\right)$ et $H_0^1\left(]0,\ell[\times]0,L[\right)$.

En appliquant, les inégalités de Young et Poincaré, on obtient :

(3.25)

$$\mu\int_0^L\int_0^\ell \mu^{-1}q_\mu^{k\ell}\left(\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_\ell}\right)^2 dz_2dz_3 \leqslant c'\left\|\frac{\varphi_\mu^{1,*}}{2c}\right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)} + \frac{c}{2}\left\|\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_\ell}\right\|^2_{H_0^1(]0,\ell[\times]0,L[).}$$

D'autre part on a grâce à (3.18) et (3.19) on a :

$$\int_0^L \int_0^\ell \mu^{-1} q_\mu^{k\ell} \left(\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell}\right)^2 dz_2 dz_3 \quad \geqslant \quad c \left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}$$

Si on choisit μ tel que $c = \dfrac{c_2 \mu}{2c'}$; l'inégualité (3.25) devient :

$$\frac{c_2 \mu}{4} \left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant \frac{c'^2 \mu}{c_2 \mu} \left\| \varphi_\mu^{1,*} \right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)} \tag{3.26}$$

Combinant (3.24) et (3.26) , il vient :

$$\left| Y_\mu^* \right| \left\| \gamma'_\mu \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \quad \leqslant \quad c \left(\left| Y_\mu^* \right| \left\| \varphi_\mu^{0,*} \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \frac{1}{\mu} \left\| \varphi_\mu^{1,*} \right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)} \right)$$

comme $\gamma'_\mu = \varphi_\mu$

Alors :

$$\left\| \varphi_\mu \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \quad \leqslant \quad c \left(\left\| \varphi_\mu^{0,*} \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \mu^{-2} \left\| \varphi_\mu^{1,*} \right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)} \right)$$

Montrons maintenant l'inégualité inverse :

$$c_1 \left(\left\| \varphi_\mu^{0,*} \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \mu^{-2} \left\| \varphi_\mu^{1,*} \right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)} \right) \quad \leqslant \quad \left\| \varphi_\mu \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}$$

Pour ce faire, considérons :

$$\rho(t) \quad = \quad t^2 \left(T - t\right)^2$$

La multiplication de la première équation de (3.23) par $\rho.\gamma_\mu$ et une intégration par parties , donnent :

$$\int_0^T \int_0^L \int_0^\ell q_{k\ell}^* \frac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_k} \frac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_\ell} dz_2 dz_3 dt =$$

$$= \left|Y_\mu^*\right| \left[\int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \rho(t) \left(\gamma_\mu'\right)^2 dz_2 dz_3 dt + \int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \rho'(t) \gamma_\mu \gamma_\mu' dz_2 dz_3 dt \right]$$

Compte tenu de (3.24) , il découle de (3.25) :

(3.27)
$$\left[\left|Y_\mu^*\right| \left\|\varphi_\mu^{0,*}\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + q_\mu^{k\ell} \left\|\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \left\|\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \right] \int_0^T \rho(t) dt =$$

$$= 2\left|Y_\mu^*\right| \int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \rho(t) \left(\gamma_\mu'\right)^2 dz_2 dz_3 dt + \left|Y_\mu^*\right| \int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \rho'(t) \gamma_\mu \gamma_\mu' dz_2 dz_3 dt$$

Appliquant une inégalité de Young au second terme du membre de droite de (3.27), on obtient part tout $\mu \succ 0$:

(3.28)
$$\int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \rho'(t) \gamma_\mu \gamma_\mu' dz_2 dz_3 dt \leqslant \alpha \int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \rho(t) \gamma_\mu^2 dz_2 dz_3 dt +$$
$$+ c(\alpha) \int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \left(\gamma_\mu'\right)^2 dz_2 dz_3 dt$$

où :

$$c(\alpha) = \frac{1}{4\alpha} \left\|\frac{\rho'^2}{\rho}\right\|_{L^\infty]0,T[}$$

D'autre part, si c_p désigne la constante de Poincarré, alors on a :

(3.29)
$$\int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \rho(t) \gamma_\mu^2 dz_2 dz_3 dt \leqslant c_p^2 \int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \rho(t) \frac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_k} \frac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_\ell} dz_2 dz_3 dt$$

Compte tenu de (3.24) et (3.25), il découle de (3.29) :

$$\int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \rho(t)\gamma_\mu^2 dz_2 dz_3 dt \leqslant c_p^2 \frac{2}{c} \left[\left\| \varphi_\mu^0 \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \right.$$

(3.30)

$$\left. + \mu^{-1} q_{k\ell}^* \left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_k} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \right]$$

Ensuite remplaçants (3.28) et (3.30) dans (3.27) , on obtient :

$$\left(\int_0^T \rho(t) dt \right) \left[\left| Y_\mu^* \right| \left\| \varphi_\mu^0 \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} - \left| Y_\mu^* \right| c_p^2 \tfrac{2}{c} 6\alpha \left\| \varphi_\mu^0 \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \right.$$

$$+ q_\mu^{k\ell} \left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_k} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} -$$

$$\left. - 6\mu^{-1} q_\mu^{k\ell} \alpha \left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_k} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \right]$$

$$\leqslant \left[\left| Y_\mu^* \right| \left\| \rho \right\|_{L^\infty]0,T[} + c(\alpha) \left| Y_\mu^* \right| \right] \left\| \gamma_\mu' \right\|^2_{L^2(0,T;L^2(]0,\ell[\times]0,L[))}$$

Grâce à la convergence de $\mu^{-1} q_\mu^{k\ell}$ vers $q_{k\ell}^*$:

$$\left\| \varphi_\mu^{0,*} \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + q_{k\ell}^* \left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_k} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant c' \left\| \varphi_\mu \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \tag{3.31}$$

D'autre part la formulation $\int_0^L \int_0^\ell \mu^{-1} q_\mu^{k\ell} \mu \left(\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \right) \left(\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_k} \right) = - \left\langle \varphi_\mu^{1,*}, \tau_\mu \right\rangle$ donne l'estimation :

$$\left| \left\langle \varphi_\mu^{1,*}, u \right\rangle \right| \leqslant c\mu \left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_k} \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \mu \left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \right\| \left\| u \right\|_{H_0^1(]0,\ell[\times]0,L[)}.$$

par conséquent :

$$\left\|\varphi_\mu^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant c\mu \left\|\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell}\right\|$$

Et enfin en reportant (3.31) dans (3.30) , il vient :

$$c_2\left\{\left\|\varphi_\mu^{0,*}\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \mu^{-2}\left\|\varphi_\mu^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)}\right\} \leqslant \left\|\varphi_\mu\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}$$

Ceci achève la preuve du lemme $(3-3)$.

A présent nous sommes en mesure de démontrer le théorème de contrôlabilité exacte.

■

Théorème (3-4) : *Soit φ_μ solution du problème* (2.16) *,Alors :*

$$\text{(3.32)} \qquad \begin{cases} \mu^{-1}\varphi_\mu^{0,*} \rightharpoonup \varphi^{0,*} & \text{dans } L^2(]0,\ell[\times]0,L[) \text{ faible} \\ \\ \mu^{-1}\varphi_\mu^{1,*} \rightharpoonup \varphi^{1,*} & \text{dans } H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[) \text{ faible}* \end{cases}$$

$$\text{(3.33)} \qquad \mu^{-1}\varphi_\mu \rightharpoonup \varphi \qquad \text{dans } L^2(]0,\ell[\times]0,L[) \text{ faible}$$

où φ est la solution du système :

$$\begin{cases} 6\varphi'' - q^*_{k\ell}\dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z_\ell}\right) = 0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \\ \varphi(0) = \varphi^0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ \varphi'(0) = \dfrac{\varphi_\mu^{1,*}}{6} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\end{cases}$$

Preuve. : Tout d'abord, on a les estimations suivantes :

$$\left\|\varphi_\mu^{0,*},\varphi_\mu^{1,*}\right\| \leqslant c\left|Y_\mu^*\right|\left\|\Lambda_{\varepsilon\mu}\left(\varphi_\mu^{0,*},\varphi_\mu^{1,*}\right)\right\|_{F'}$$

$$\left\|\varphi_\mu^{0,*},\varphi_\mu^{1,*}\right\| \leqslant c\mu\left(\frac{\left\|u_\mu^1\right\|}{\left|Y_\mu^*\right|};-\frac{\left\|u_\mu^0\right\|}{\left|Y_\mu^*\right|}\right)\leqslant c\mu$$

ce qui par le lemme $(2-1)$ donne :

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_\mu^{0,*}\right\|^2+\mu^{-2}\left\|\varphi_\mu^{1,*}\right\|^2 &\leqslant \left|Y_\mu^*\right|\left\langle\Lambda_{\varepsilon\mu}\left(\varphi_\mu^{0,*},\varphi_\mu^{1,*}\right),\left(\varphi_\mu^{0,*},\varphi_\mu^{1,*}\right)\right\rangle\\ &\leqslant \left|Y_\mu^*\right|\left\|\Lambda_{\varepsilon\mu}\left(\varphi_\mu^{0,*},\varphi_\mu^{1,*}\right)\right\|_{F'}\left\|\left(\varphi_\mu^{0,*},\varphi_\mu^{1,*}\right)\right\|_F\\ &\leqslant c\mu^2\end{aligned}$$

alors, on a :

$$\left\|\varphi_\mu^{0,*}\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant c\left\{\left\|\varphi_\mu^{0,*}\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}+\mu^{-2}\left\|\varphi_\mu^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)}\right\}\leqslant c\mu^2$$

et aussi :

$$\left\|\varphi_\mu\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant c\mu$$

Par conséquent :

$$\left\|\mu^{-1}\varphi_{\mu}^{0,*}\right\| \leqslant c$$

$$\left\|\mu^{-2}\varphi_{\mu}^{1,*}\right\| \leqslant c$$

$$\left\|\mu^{-1}\varphi_{\mu}\right\| \leqslant c$$

On en déduit les convergences (3.32) et (3.33) .

Comme les données initiales sont peu régulières, avant de passer à la limite dans le système (2.16) .On régularise le problème en posant :

$$\gamma_{\mu}(z,t) = \int_0^t \varphi_{\mu}(z,s)\,ds + \tau_{\mu}(z_2,z_3) \tag{3.34}$$

où τ_{μ} est solution de :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_{k\ell}^{*}\dfrac{\partial \tau_{\mu}}{\partial z_{\ell}}\right) = -\varphi_{\mu}^{1,*} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ \\ \tau_{\mu} = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \end{cases}$$

En procédant comme dans la preuve du théorème $(2-4)$, on vérifie sans peine que γ_{μ} est solution du système :

$$\begin{cases} \left|Y_{\mu}^{*}\right|\gamma_{\mu}'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_{\mu}^{k\ell}\dfrac{\partial \gamma_{\mu}}{\partial z_{\ell}}\right) = 0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\\ \\ \gamma_{\mu} = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \\ \\ \gamma_{\mu}(0) = \tau_{\mu} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ \\ \gamma_{\mu}'(0) = \varphi_{\mu}^{0,*} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\end{cases} \tag{3.35}$$

on a facilement l'estimation :

$$\|\tau_\mu\|_{H^1(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant c\mu$$

de sorte que :

$$\mu^{-1}\tau_\mu \rightharpoonup \tau \qquad \text{dans } H^1(]0,\ell[\times]0,L[) \text{ faible}$$

On en déduit l'estimation :

$$\left\|\gamma_\mu\right\|^2_{H^1(]0,\ell[\times]0,L[)} \leqslant c\mu^2$$

et les convergences

$$\mu^{-1}\gamma_\mu \rightharpoonup \gamma \quad \text{dans } L^\infty\left(0,T,H^1(]0,\ell[\times]0,L[)\right) \text{ faible } *$$

$$\mu^{-1}\gamma'_\mu \rightharpoonup \gamma' \quad \text{dans } L^\infty\left(0,T,L^2(]0,\ell[\times]0,L[)\right) \text{ faible } *$$

D'autre part :

$$\mu^{-1}\gamma''_\mu - \mu\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\mu^{-1}q^{k\ell}_\mu\frac{\partial\gamma_\mu}{\partial z_\ell}\right) = 0$$

En passant à la limite, on obtient :

$$
(3.36) \qquad \begin{cases} 6\gamma'' - q^*_{k\ell}\dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(\dfrac{\partial \gamma}{\partial z_\ell}\right) = 0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\\ \\ \gamma = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \\ \\ \gamma\left(0\right) = \tau & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ \\ \gamma^{'}\left(0\right) = \varphi^0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\end{cases}
$$

où τ est solution du système. :

$$
\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q^*_{k\ell}\dfrac{\partial \tau}{\partial z_\ell}\right) = -\varphi^{1,*} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ \\ \tau_\mu = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \end{cases}
$$

Comme :

$$
\begin{aligned} \gamma \ \in \ & c\left([0,T], H^1_0(]0,\ell[\times]0,L[)\right) \cap c^1\left([0,T], L^2(]0,\ell[\times]0,L[)\right) \\ & \cap c^2\left([0,T], H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)\right) \end{aligned}
$$

On verifie sans peine que :

$$
\gamma^{'}_\mu = \varphi_\mu
$$

$$
\gamma^{'} = \varphi
$$

et (3.36) n'est autre que le système :

$$\begin{cases} 6\varphi'' - q^*_{k\ell}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_k \partial z_\ell} = 0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\\ \\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right) \\ \\ \varphi(0) = \varphi^0 & \textit{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ \\ \varphi'(0) = \dfrac{\varphi^{1,*}}{6} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\end{cases}$$

Ceci achève la preuve du théorème (3.4) . ■

Maintenant revenons à l'étude du système (3.3) :

Théorème (3-5): *Lorsque $\mu \longrightarrow O$, on a :*

$$\text{(3.37)} \qquad \begin{cases} \mu^{-1}u^{0,*}_\mu \rightharpoonup u^0 & \text{dans } H^1_0(]0,\ell[\times]0,L[) \text{ faible} \\ \\ \mu^{-1}u^{1,*}_\mu \rightharpoonup u^1 & \text{dans} L^2(]0,\ell[\times]0,L[) \text{ faible} \end{cases}$$

et

$$\text{(3.38)} \qquad \begin{cases} u_\mu \rightharpoonup u & \text{dans } L^\infty\left(0,T,H^1_0(]0,\ell[\times]0,L[)\right) \\ \\ u'_\mu \rightharpoonup u' & \text{dans } \quad L^\infty\left(0,T,L^2(]0,\ell[\times]0,L[)\right) \end{cases}$$

avec $\mu^{-1}v_\mu \rightharpoonup v$ *dans* $L^2\left(0,T,L^2(]0,\ell[\times]0,L[)\right)$

où v est le contrôle exact du système limite :

$$
(3.39) \qquad \begin{cases} 6u'' - q_\mu^{k\ell} \dfrac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_\ell} = v & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\right) \\ u_\mu(0) = \dfrac{u^0}{6} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\\ u'(0) = \dfrac{u^1}{6} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\end{cases}
$$

Preuve. En utilisant les Théorèmes $(3-3)$ et $(3-4)$, on remarque qu'il ne reste plus qu'a montrer que v est le contrôle exact de (3.39)

i.e :

$$
(3.40) \qquad u(T) = u'(T) = 0
$$

On multiplie (3.6) par μ^{-1},puis grâce à $(3.37)_1$ et aux estimations (3.32) et (3.33) , on a :

$$
(3.41) \qquad \begin{array}{l} \Psi_\mu \rightharpoonup \Psi \text{ dans } \ L^\infty\left(0,T,H_0^1(]0,\ell[\times]0,L[)\right) \\ \Psi_\mu^1 \rightharpoonup \Psi' \text{ dans } \ L^\infty\left(0,T,L^2(]0,\ell[\times]0,L[)\right) \end{array}
$$

On peut donc passer à la limite dans (3.6) de la même façon que dans la preuve du Théorème $(3-3)$.

On obtient ainssi :

$$\begin{cases} 6\psi'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q^{kl}\dfrac{\partial \psi}{\partial z_l}\right) = -\varphi & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \psi = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times]0,T[\\ \psi(T) = 0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \psi'(T) = 0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

où φ est donnée par (3.33) . Pae ailleurs (3.41) et (3.6) impliquent que $u = \Psi$.

Comme $\Psi(T) = \Psi'(T) = 0$,on a (3.40) .

En appliquant HUM au système (3.39) , on construit l'isomorphisme :

$$\wedge : L^2(]0,l[\times]0,L[) \times H^{-1}(]0,l[\times]0,L[) \longrightarrow L^2(]0,l[\times]0,L[) \times H_0^1(]0,l[\times]0,L[)$$
$$\wedge : (\varphi^0, \varphi^{1,*}) \longrightarrow \left(\frac{u^1}{6}, -\frac{u^0}{6}\right)$$

et donc de déterminer v de façon unique .

Alors :

$$u_\mu \rightharpoonup u \qquad \text{dans } L^\infty\left(0,T,H_0^1(]0,\ell[\times]0,L[)\right)$$

et

$$\mu^{-1}v_\mu \rightharpoonup v \quad \text{dans } L^2\left(0,T,L^2(]0,\ell[\times]0,L[)\right)$$

■

Chapitre4 :

Cas des données initiales moins régulières.

4-1 Homogeneisations et convergence des contrôles

Dans le problème que nous venons de résoudre, les donnée sinitiales $u^0_{\varepsilon\mu}$ et $u^1_{\varepsilon\mu}$ du système (1.5) étaient prises respectivement dans $V_{\varepsilon\mu}$ et $L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)$. Maintenant, nous allons les choisir dans $L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)$ et $V'_{\varepsilon\mu}$ respectivement. Il y a dans ce cas un transfert de régularité ; $\varphi^0_{\varepsilon\mu}$ et $\varphi^1_{\varepsilon\mu}$ sont plus régulières maintenant. De ce fait, les résultats de convergence liés aux suites $\left\{\varphi_{\varepsilon\mu}\right\}$ et $\{u_{\varepsilon\mu}\}$ sont échangés.

On considère le système :

$$
(4.1) \qquad \begin{cases}
z''_{\varepsilon\mu} + A_{\varepsilon\mu} z_{\varepsilon\mu} = v_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \times]0,T[\\[2ex]
z_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu} \times]0,T[\\[2ex]
\dfrac{\partial z_{\varepsilon\mu}}{\partial v_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu} \times]0,T[\\[2ex]
z_{\varepsilon\mu}(0) = z^0_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \\[2ex]
z'_{\varepsilon\mu}(0) = z^1_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}
\end{cases}
$$

On suppose encore que les hypothèses (1.2), (1.3) et (1.4) sont satisfaites.

$$
A_{\varepsilon\mu} = -\varepsilon^{-2} a_{11} \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1^2} - \varepsilon^{-1} a_{i\ell} \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1 \partial z_\ell} - \varepsilon^{-1} a_{k1} \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k \partial z_1} - a_{k\ell} \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k \partial z_\ell}
$$

et les données initiales sont :

$$
(2) \qquad \begin{aligned} z^0_{\varepsilon\mu} &\in L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right) \\ z^1_{\varepsilon\mu} &\in V'_{\varepsilon\mu} \end{aligned} \tag{4.2}
$$

On suppose que $v_{\varepsilon\mu} \in \left[H^1\left(0,T,L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)\right)\right]'$.

Sous les hypothèses données, et pour ε fixe et $T \succ 0$, il éxiste un contrôle telle que la solution $z_{\varepsilon\mu}$ de (4.1) verifie :

$$
z_{\varepsilon\mu}(T) = z'_{\varepsilon\mu}(T) = 0
$$

Nous montrons d'abord qu'un tel contrôle existe.

Ce contrôle est construit par H.U.M comme suit :

On défine $\varphi_{\varepsilon\mu}$ par :

$$
(4.3) \qquad \begin{cases} \varphi''_{\varepsilon\mu} + A_{\varepsilon\mu}\varphi_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\ \varphi_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\ \dfrac{\partial\varphi_{\varepsilon\mu}}{\partial v_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\ \varphi_{\varepsilon\mu}(0) = \varphi^0_{\varepsilon\mu} \in V_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \\ \varphi'_{\varepsilon\mu}(0) = \varphi^1_{\varepsilon\mu} \in L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right) & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \end{cases}
$$

et soit $\Psi_{\varepsilon\mu}$ solution du système :

$$
(4.4) \qquad \begin{cases} \Psi''_{\varepsilon\mu} + A_{\varepsilon\mu}\Psi_{\varepsilon\mu} = -\varphi''_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\ \Psi_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\ \dfrac{\partial\Psi_{\varepsilon\mu}}{\partial v_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\ \Psi_{\varepsilon\mu}(T) = \Psi'_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \end{cases}
$$

la dérivé $\varphi"_{\varepsilon\mu}$ n'est pas prise au sens des distributions :

On définie $\varphi"_{\varepsilon\mu}$ par :

$$
(4.5) \qquad \left\langle -\varphi"_{\varepsilon\mu}, \Phi \right\rangle = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\mu}} \varphi'_{\varepsilon\mu}\Phi' dxdt \qquad \forall\Phi \in H^1\left(0,T,L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)\right)
$$

donc :

$$
-\varphi"_{\varepsilon\mu} \in \left[H^1\left(0,T,L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)\right)\right]'
$$

Posons :

$$
F_{\varepsilon\mu} = V_{\varepsilon\mu} \times L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)
$$

et

$$\Lambda_{\varepsilon\mu} \quad = \quad \pounds\left(F_{\varepsilon\mu}, F_{\varepsilon\mu}^{'}\right)$$

L'opérateur $\Lambda_{\varepsilon\mu}$ est définie par

$$\wedge_{\varepsilon\mu}\left(\varphi_{\varepsilon\mu}^{0}, \varphi_{\varepsilon\mu}^{1}\right) = \left(\psi_{\varepsilon\mu}^{\prime}(0), -\psi_{\varepsilon\mu}(0)\right) \tag{4.6}$$

Avec la définition précédente ; on vérifie que :

$$\left\langle \wedge_{\varepsilon\mu}\left(\varphi_{\varepsilon\mu}^{0}, \varphi_{\varepsilon\mu}^{1}\right), \left(\varphi_{\varepsilon\mu}^{0}, \varphi_{\varepsilon\mu}^{1}\right)\right\rangle \quad = \quad \int_{0}^{T}\int_{\Omega_{\varepsilon\mu}}\left(\varphi_{\varepsilon\mu}^{\prime}\right)^{2} dxdt$$

et on definit une norme sur $F_{\varepsilon\mu}$ par :

$$\left\|\varphi^{0}, \varphi^{1}\right\|_{F_{\varepsilon\mu}}^{2} \quad = \quad \int_{0}^{T}\int_{\Omega_{\varepsilon\mu}^{*}}\left(\varphi^{\prime}\right)^{2} dxdt = \left\|\varphi^{\prime}\right\|_{L^{2}\left(\Omega_{\varepsilon\mu}^{*}\right)}^{2}$$

En utilisant les résultas de Lions [11], adapté au domaine perferé, nous avons les estimations suivantes :

(4.7)

$$c_1\left(\left\|\varphi^0_{\varepsilon\mu}\right\|_{V_{\varepsilon\mu}}+\left\|\varphi^1_{\varepsilon\mu}\right\|_{L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)}\right)\leqslant\int_0^T\int_{\Omega_{\varepsilon\mu}}\left(\varphi'\right)^2dxdt\leqslant c_2\left(\left\|\varphi^0_{\varepsilon\mu}\right\|_{V_{\varepsilon\mu}}+\left\|\varphi^1_{\varepsilon\mu}\right\|_{L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)}\right)$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes indépendantes de ε.

Cette estimation motre que $\int_0^T\int_{\Omega_{\varepsilon\mu}}\left(\varphi'\right)^2dxdt$ est effectivement équivalente à la norme de $\left(\varphi^0_{\varepsilon\mu},\ \varphi^1_{\varepsilon\mu}\right)$ dans $F_{\varepsilon\mu}$

Il s'en suit que $\Lambda_{\varepsilon\mu}$ est un isomorphisme entre $F_{\varepsilon\mu}$ et $F'_{\varepsilon\mu}$. Par conséquent, l'équation

(4.8)
$$\wedge_{\varepsilon\mu}\left(\varphi^0_{\varepsilon\mu},\varphi^1_{\varepsilon\mu}\right)=\left(z^1_{\varepsilon\mu},-z^0_{\varepsilon\mu}\right)$$

possède une unique solution et compte tenue de la définition de $\Lambda_{\varepsilon\mu}$, on a donc :

$$\Psi'_{\varepsilon\mu}(0) = z^1_{\varepsilon\mu}$$

$$\Psi_{\varepsilon\mu}(0) = z^0_{\varepsilon\mu}$$

Posons :

(4.9)
$$v_{\varepsilon\mu}=-\varphi''_{\varepsilon\mu}$$

où $\varphi_{\varepsilon\mu}$ solution de (4.3) avec $\left(\varphi^0_{\varepsilon\mu},\ \varphi^1_{\varepsilon\mu}\right)$ donnée par (4.8) et (4.9) , on voit que $\Psi_{\varepsilon\mu}$ est la solution de (4.1) , hors ce système n'admettant qu'une solution unique

A savoir $z_{\varepsilon\mu}$:

$$z_{\varepsilon\mu} = \Psi_{\varepsilon\mu} \tag{4.10}$$

Par conséquent :

$$z_{\varepsilon\mu}(T) \quad = \quad z'_{\varepsilon\mu}(T) = 0$$

Remarque (4-1)

Le contrôle $v_{\varepsilon\mu}$ dans cette situation est encore dans un espace faible.

Maintenant φ^0 et φ^1 appartiennent respectivement à $L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)$ et $V_{\varepsilon\mu}$ donc le théorème d'homogénéisation (2.3) est appliquable au système (4.3).

Mais pour passer à la limite dans (4.1) , nous avons besoin d'un théorème analogue au théorème $(3-1)$.

Théorème (4-2)

Soit $v_{\varepsilon\mu} = -\varphi''_{\varepsilon\mu}$ *le contrôle exact donné par H.U.M pour les ystème* (4.1).
Supposons que :

$$(4.11)\qquad \begin{cases} i) \quad \tilde{z}^0_{\varepsilon\mu} \to z^0_\mu & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ ii) \quad \left\| z^1_{\varepsilon\mu} \right\|_{V'_{\varepsilon\mu}} \leq c & (c \text{ indépendante de } \varepsilon) \end{cases}$$

alors :

$$\tilde{\varphi}'_{\varepsilon\mu} \to \varphi'_\mu \qquad \text{dans } L^2(\Omega \times]0,T[) \text{ faible}$$

et $v_{\varepsilon\mu} = -\left|Y^*_\mu\right| \varphi''_\mu$ *est le contrôle exact pour les ystème :*

$$(4.12)\qquad \begin{cases} \left|Y^*_\mu\right| z''_\mu - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q^{kl}_\mu \dfrac{\partial z_\mu}{\partial z_l}\right) = v_\mu & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ z_\mu = 0 & \text{sur } \partial(]0,l[\times]0,L[) \times]0,T[\\ z_\mu(0) = z^0_\mu & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ z'_\mu(0) = z^{1,*} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

où $z^{1,*}$ *est donné par* (3.12)

Ce théorème contient deux resultats de convergences : une pour la solution et l'autre pour le contrôle.

Preuve. : On commence par démontrer la convergence de la solution $z_{\varepsilon\mu}$. Pour démontrer ce théorème, comme on l'a déjà noté dans la remarque $(4-1)$.

On considère le problème :

$$
(4.13) \qquad \begin{cases}
\omega''_{\varepsilon\mu} + A_{\varepsilon\mu}\omega_{\varepsilon\mu} = G'_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\
\omega_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\
\dfrac{\partial\omega_{\varepsilon\mu}}{\partial v_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\
\omega_{\varepsilon\mu}(0) = \omega^0_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \\
\omega'_{\varepsilon\mu}(0) = \omega^1_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}
\end{cases}
$$

avec les conditions initiales $\left(\omega^0_{\varepsilon\mu},\ \omega^1_{\varepsilon\mu}\right)$ satisfaisant le lemme $(2-2)$ et où $G'_{\varepsilon\mu} \in \left[H^1\left(0,T;L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)\right)\right]'$

et est définie par :

$$
\left\langle G'_{\varepsilon\mu}, \Phi\right\rangle = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\mu}} G_{\varepsilon\mu}\Phi' dxdt \qquad \forall\Phi \in H^1\left(0,T,L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)\right)
$$

supposons que $G_{\varepsilon\mu} \in C\left([0,T];L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)\right)$ et :

$$(4.14)\qquad \begin{cases} i)\quad \tilde{G}_{\varepsilon\mu} \to G_\mu & \text{dans } L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu} \times [0,T]\right) \text{ faible} \\ ii)\quad \tilde{G}_{\varepsilon\mu}(0) \to G_\mu(0) & \text{dans } L^2\left(\Omega_{\varepsilon\mu}\right) \text{ faible} \end{cases}$$

quand $\varepsilon \to 0$. ■

On a le :

Théorème (4-3)

Sous les hypothèses $\left(\left\|\omega^1_{\varepsilon\mu}\right\|_{V'_{\varepsilon\mu}} \leqslant c\right)$, $\left(\tilde{\omega}^0_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \omega^0_\mu \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible}\right)$ *et* (4.14), *il existe une suite* $\{\omega_{\varepsilon\mu}\}$ *notée encore* $\{\omega_{\varepsilon\mu}\}$ *et une fonction* $\omega^{1,*}_\mu$ *tel que :*

$$\tilde{\omega}_{\varepsilon\mu} \to \omega_\mu \qquad \text{dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \text{ faible}$$

où ω_μ*est solution du système :*

$$(4.15)\qquad \begin{cases} \left|Y^*_\mu\right| \omega''_\mu - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q^{kl}_\mu \dfrac{\partial \omega_\mu}{\partial z_l}\right) = \left|Y^*_\mu\right| G'_\mu & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \omega_\mu = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times]0,T[\\ \omega_\mu(0) = \int_0^1 \omega^0_\mu dz_1 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \omega'_\mu(0) = \omega^{1,*} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

où

$$\omega^{1,*}_\mu = \frac{\partial}{\partial z_k}\left(q^{kl}_\mu \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_l}\right) + G_\mu\ (0)$$

Preuve. La démonstration de ce théorème est quasiment la même que celle du théorème $(2-4)$. Les conditions initiales $\omega^0_{\varepsilon\mu}$ et $\omega^1_{\varepsilon\mu}$ du système (4.13) sont dans des espaces faibles , donc on introduit

$$\gamma_{\varepsilon\mu} = \int_0^t \omega_{\varepsilon\mu}\, ds + \tau_{\varepsilon\mu} \tag{4.16}$$

pour régulariser le système

où $\tau_{\varepsilon\mu} \in V_{\varepsilon\mu}$ est defini par :

$$\begin{cases} A_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu} = -\omega^1_{\varepsilon\mu} + G_{\varepsilon\mu}(0) & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \\ \tau_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu} \\ \dfrac{\partial \tau_{\varepsilon\mu}}{\partial v_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \text{sur } \left(\partial\Omega^*_{\varepsilon\mu} \setminus \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu}\right) \end{cases} \tag{4.17}$$

Nous avons

$$\gamma'_{\varepsilon\mu} = \omega_{\varepsilon\mu} \; ; \; \gamma''_{\varepsilon\mu}(0) = \omega'_{\varepsilon\mu}$$

et

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon\mu}.\gamma_{\varepsilon\mu}(z,t) &= \int_0^t A_{\varepsilon\mu}.\omega_{\varepsilon\mu}\ (z,s)\, ds + A_{\varepsilon\mu}.\tau_{\varepsilon\mu}(z_2,z_3) \\ &= \int_0^t \left(G'_{\varepsilon\mu} - \omega''_{\varepsilon\mu}\right) ds + \left(-\omega^1_{\varepsilon\mu} + G_{\varepsilon\mu}(0)\right) \\ &= G_{\varepsilon\mu}(t) - G_{\varepsilon\mu}(0) - \omega'_{\varepsilon\mu}(t) + \omega'_{\varepsilon\mu}(0) - \omega^1_{\varepsilon\mu} + G_{\varepsilon\mu}(0) \\ &= G_{\varepsilon\mu}(t) - \omega'_{\varepsilon\mu}(t) \end{aligned}$$

d'où

$$A_{\varepsilon\mu}.\gamma_{\varepsilon\mu} + \gamma''_{\varepsilon\mu} = G_{\varepsilon\mu}$$

$(4.13)_2$ et $(4.17)_2$ donnent :

$$\gamma_{\varepsilon\mu} = 0 \qquad \text{sur } \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu}\times]0,T[$$

et , $(4.13)_3$ et $(4.17)_3$ donnent :

$$\frac{\partial\gamma_{\varepsilon\mu}}{\partial v_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 \qquad \text{sur } \left(\partial\Omega^{*}_{\varepsilon\mu} \setminus \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu}\right)\times]0,T[$$

et

$$\begin{aligned} \gamma'_{\varepsilon\mu}(0) &= \omega_{\varepsilon\mu}(0) = \omega^0_{\varepsilon\mu} \\ \gamma_{\varepsilon\mu}(0) &= \tau_{\varepsilon\mu} \end{aligned}$$

d'où $\gamma_{\varepsilon\mu}$ verifie le système :

$$(4.18) \qquad \begin{cases} \gamma''_{\varepsilon\mu} + A_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu} = G_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^{*}_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\ \gamma_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\\ \dfrac{\partial\gamma_{\varepsilon\mu}}{\partial v_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \text{sur } \left(\partial\Omega^{*}_{\varepsilon\mu} \setminus \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu}\right)\times]0,T[\\ \gamma_{\varepsilon\mu}(0) = \tau_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^{*}_{\varepsilon\mu} \\ \gamma'_{\varepsilon\mu}(0) = \omega^0_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^{*}_{\varepsilon\mu} \end{cases}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Les hypothèses (2.4) e t (4.14) sur $\omega^1_{\varepsilon\mu}$ resp $G_{\varepsilon\mu}$ montrent que si $Q_{\varepsilon\mu}$ est l'opérateur donné par le lemme $(2-1)$, alors :

$$Q_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu} \quad \rightarrow \quad \tau_\mu \qquad\qquad \text{dans } \; H^1_0(\Omega) \qquad \text{faible}$$

où τ_μ solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q^{kl}_\mu \dfrac{\partial \tau_\mu}{\partial z_l}\right) = -\omega^{1,*}_\mu + G_\mu \;(0) & \text{dans } \;]0,l[\times]0,L[\\ \\ \tau_\mu = 0 & \text{dans } \partial\,(]0,l[\times]0,L[) \end{cases}$$

Les même procédés de calcule effectués dans le chapitre 3 , nous permet d'appliquer le théorème $(1-4)$ à (4.18)

$$\begin{cases} P_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu} \rightarrow \gamma_\mu & \textit{dans } \; L^\infty(0,T;H^1(\Omega) \text{ faible}* \\ \\ P_{\varepsilon\mu}\gamma'_{\varepsilon\mu} \rightarrow \gamma'_\mu & \textit{dans } \; L^\infty(0,T;L^2(\Omega) \; \textit{faible}* \end{cases}$$

où γ_μ solution de :

$$\begin{cases} \left|Y^*_\mu\right|\gamma''_\mu - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q^{kl}_\mu \dfrac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_l}\right) = G_\mu & \text{dans } \;]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \gamma_\mu = 0 & \text{sur } \partial\,(]0,l[\times]0,L[)\times]0,T[\\ \gamma_\mu(0) = \tau_\mu & \text{dans } \;]0,l[\times]0,L[\\ \gamma'_\mu(0) = \dfrac{\int_0^1 \omega^0_\mu dz_1}{\left|Y^*_\mu\right|} & \text{dans } \;]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

Les même calcules que dans chapitre (3) ,avec $\gamma'_\mu = \omega_\mu$,nous donne :

$$\tilde{\omega}_{\varepsilon\mu} = \tilde{\gamma}'_{\varepsilon\mu} \to \left|Y^*_\mu\right| \gamma'_\mu$$

$$\tilde{\omega}_{\varepsilon\mu} \to \omega_\mu$$

d'où :

$$\omega_\mu = \left|Y^*_\mu\right| \gamma'_\mu$$

donc

$$\omega_\mu(0) = \left|Y^*_\mu\right| \gamma'_\mu(0) = \int_0^1 \omega^0_\mu dz_1$$

et

$$\omega'_\mu = \left|Y^*_\mu\right| \gamma''_\mu$$

donc

$$\omega'_\mu(0) = \left|Y^*_\mu\right| \gamma''_\mu(0) = \frac{\partial}{\partial z_k}\left(q^{kl}_\mu \frac{\partial \gamma_\mu(0)}{\partial z_l}\right) + G_\mu$$

$$\omega'_\mu(0) = \omega^{1,*}_\mu$$

$$\left|Y^*_\mu\right| \gamma''_\mu - \frac{\partial}{\partial z_k}\left(q^{kl}_\mu \frac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_l}\right) = G_\mu$$

en remplaçons $\left|Y_\mu^*\right| \gamma_\mu''$ par $\omega_\mu^{'}$, on a :

$$\omega_\mu^{'} - \frac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\frac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_l}\right) \quad = \quad G_\mu$$

et

$$\omega_\mu^{''} - \frac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\frac{\partial \gamma_\mu^{'}}{\partial z_l}\right) \quad = \quad G_\mu^{'}$$

multipliant par $\left|Y_\mu^*\right|$:

$$\left|Y_\mu^*\right| \omega_\mu^{''} - \frac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\frac{\partial \left|Y_\mu^*\right| \gamma_\mu^{'}}{\partial z_l}\right) \quad = \quad \left|Y_\mu^*\right| G_\mu^{'}$$

donc

$$\left|Y_\mu^*\right| \omega_\mu'' - \frac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\frac{\partial \omega_\mu}{\partial z_l}\right) \quad = \quad \left|Y_\mu^*\right| G_\mu^{'}$$

d'où le sysème (4.15) . ■

Preuve. du théorème $(4-2)$

On donne seulement un apperçu de la démonstration, les arguments sont les même que ceux du théorème $(2-3)$.

De (4.11), (4.8) et l'inégalité (4.7) , il vient :

$$\left\|\varphi^0_{\varepsilon\mu}\right\|_{V_{\varepsilon\mu}} + \left\|\varphi^1_{\varepsilon\mu}\right\|_{L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)} \leq c$$

ceci implique que :

$$(4.19) \qquad \begin{cases} i) \quad \tilde{\varphi}^0_{\varepsilon\mu} \to \varphi^0_\mu & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ ii) \quad \tilde{\varphi}^1_{\varepsilon\mu} \to \varphi^1_\mu & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{cases}$$

Maintenant le théorème d'homogéneisation (1.4) peut être appliqué au problème (4.3). Donc si $P_{\varepsilon\mu}$ est l'opérateur de prolongement donné par le lemme $(2-1)$

$$\begin{cases} P_{\varepsilon\mu}\varphi_{\varepsilon\mu} \to \phi_\mu & \textit{dans } L^\infty(0,T;H^1(\Omega) \text{ faible}* \\ P_{\varepsilon\mu}\varphi'_{\varepsilon\mu} \to \phi'_\mu & \textit{dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega) \textit{ faible}* \end{cases}$$

où ϕ_μ solution de :

$$\begin{cases} \left|Y^*_\mu\right|\phi_\mu + A_\mu\phi_\mu = 0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \phi_\mu = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times]0,T[\\ \phi_\mu(0) = \dfrac{\phi^0_\mu}{\left|Y^*_\mu\right|} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \phi'_\mu(0) = \dfrac{\phi^1_\mu}{\left|Y^*_\mu\right|} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

où :

$$A_\mu \quad = \quad -\frac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\frac{\partial}{\partial z_l}\right)$$

si on note $\varphi_\mu = \left|Y_\mu^*\right|\phi_\mu$, alors :

$$\tilde{\varphi}_{\varepsilon\mu}^{'} \to \varphi_\mu' \qquad \text{dans } \; L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right) \text{ faible} \tag{4.20}$$

Ce pendant :

$$\begin{cases} \left|Y_\mu^*\right|\varphi_\mu^{"} + A_\mu\varphi_\mu = 0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \varphi_\mu = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times]0,T[\\ \varphi_\mu(0) = \varphi_\mu^0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \varphi_\mu'(0) = \varphi_\mu^1 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases} \tag{4.21}$$

Revenons au système (4.1) .

En appliquant (4.3) avec $G_{\varepsilon\mu} = -\varphi_{\varepsilon\mu}^{"}$, il est clair que (4.20) implique (4.14) , d'où on obtient le système homogéneisé (4.12) .

Pour conclure, on verifie que $-\varphi_{\varepsilon\mu}^{"}$ est le contrôle exacte de (4.13) .

En utilisant le théorème $(4-3)$, pour passer à la limite dans le système (4.4) , on obtient le système limite :

$$\begin{cases} \left|Y_\mu^*\right| \Psi_\mu'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\dfrac{\partial \Psi_\mu}{\partial z_l}\right) = -\left|Y_\mu^*\right| \varphi_\mu^{"} & \text{dans } \Omega \times]0,T[\\ \\ \Psi_\mu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0,T[\\ \\ \Psi_\mu(T) = \Psi_\mu^{'}(T) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

En appliquant HUM à (4.12) , on peut construire un isomorphisme telle que :

$$\wedge_\mu\left(\varphi_\mu^0, \varphi_\mu^1\right) \quad = \quad \left(z_\mu^{1,*}, -z_\mu^0\right)$$

avec φ_μ donnée par (4.21) , alors $-\left|Y_\mu^*\right| \varphi_\mu^{"}$ est un contrôle éxacte.

Remarque :

$$z_{\varepsilon\mu}^1 \quad \rightarrow \quad z_\mu^1 \qquad\qquad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

et le théorème $(4-2)$ donne $\tilde{z}_\mu^{1,*} = z_\mu^1$ et $(\tilde{z}_{\varepsilon\mu} \rightarrow z_\mu$ dans $L^2(\Omega \times]0,T[)$ faible) ■

Chapitre5 :

Etude de la controlabilité exacte et de la convergence du système bidimentionnel dans le cas des données initiales moins régulières.

5-1 Etude de la contrôlabilité exacte du système (4.12) :

Dans tout ce qui suit, c désigne les différentes constantes positives indépendantes de μ.

On a le :

Théorème (5-1) :

Pourtout $T \succ 0$, il existe un contrôle :

$$v_\mu \in \left[H^1\left(0,T,L^2\left(]0,l[\times]0,L[\ \right)\right)\right]' \tag{5.1}$$

telque la solution z_μ de (4.12) satifasse la condition :

$$z_{\varepsilon\mu}(T) = z'_{\varepsilon\mu}(T) = 0 \qquad \textit{dans} \quad]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\tag{5.2}$$

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme (5-2) :

On suppose que les données initiales φ^0_μ et φ^1_μ du système (4.21) verifient :

$$\varphi^0_\mu \in V_\mu \text{ et } \varphi^1_\mu \in L^2\left(]0,l[\times]0,L[\ \right)$$

Alors il existe deux constantes c_1 et c_2, positives et indépendants de μ telle que :

$$\begin{gathered} c_1\left(\left\|\varphi^0_\mu\right\|^2_{V_\mu} + \mu^{-1}\left\|\varphi^1_\mu\right\|_{L^2(]0,l[\times]0,L[\ )}\right) \leqslant \left\|\varphi'_\mu\right\|^2_{L^2(]0,l[\times]0,L[\ )\times]0,T[} \\ \text{et} \\ \left\|\varphi'_\mu\right\|^2_{L^2(]0,l[\times]0,L[\ )\times]0,T[} \leqslant c_2\left(\left\|\varphi^0_\mu\right\|^2_{V_\mu} + \mu^{-1}\left\|\varphi^1_\mu\right\|_{L^2(]0,l[\times]0,L[\ )}\right) \end{gathered} \tag{5.3}$$

Ce lemme se démontre comme le lemme $(3-3)$

Preuve. Preuve du théorème $(5-1)$:

Introduisans Ψ_μ solution du problème :

$$(5.4)\qquad \begin{cases} \left|Y_\mu^*\right| \Psi_\mu'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\dfrac{\partial \Psi_\mu}{\partial z_l}\right) = -\left|Y_\mu^*\right| \varphi_\mu^{"} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \Psi_\mu = 0 & \text{sur } \partial]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \Psi_\mu(T) = \Psi_\mu'(T) = 0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

où $\varphi_\mu^{"}$ verifie :

$$\left\langle -\varphi_\mu^{"}, \Phi\right\rangle = \int_0^T \left(\int_0^l \left(\int_0^L \varphi_\mu' \Phi' dx_2\right) dz\right) dt \qquad \forall \Phi \in H^1\left(0,T,L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right)\right)$$

de sort que $\varphi_\mu^{"} \in \left[H^1\left(0,T,L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right)\right)\right]'$ espace dual de $H^1\left(0,T,L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right)\right)$

Posons $F_\mu = V_\mu \times L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right)$, on a maintenant $F_\mu' = V'\mu \times L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right)$ et définissons $\wedge_\mu$ comme précédemment.

Grâce au lemme $(5-2)$, nous savons que $\wedge_\mu$ est isomorphisme de F_μ dans F_μ' tel que :

$$(5.5)\qquad c_1\left(\left\|\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right)\right\|_{F_\mu}\right) \leqslant \left\|\wedge_\mu\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right)\right\|_{F_\mu'} \leqslant c_2\left(\left\|\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right)\right\|_{F_\mu}\right)$$

D'où il découle de l'équation

$$(5.6)\qquad \wedge_\mu\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right) = \left(z_\mu^{1,*}, -z_\mu^0\right)$$

a une et une seule solution dans F_μ car $\left(z_\mu^{1,*}, -z_\mu^0\right) \in F_\mu^{'}$

Choisissant :

$$v_\mu = -\left|Y_\mu^*\right| \varphi_\mu^{"} \tag{5.7}$$

où φ_μ est la solution de (4.21) avec $\left(\varphi_\mu^0, \varphi_\mu^1\right)$ solution de (5.6)

De plus, on a par définition :

$$\wedge_\mu \left(\varphi_\mu^0, \varphi_\mu^1\right) = \left(\Psi_\mu'(0), -\Psi_\mu(0)\right) \tag{5.8}$$

confirmant (5.6) et (5.8), et tenant compte de l'unicité de la solution de (4.21) , on obtient :

$$\tau_\mu \quad = \quad \Psi_\mu$$

de sorte que : $v_\mu = -\left|Y_\mu^*\right| \varphi_\mu^{"}$ est le contrôle exact convenable. ■

Maintenant nous allons faire tendre μ vers zéro.

Théorème (5-3) :

On suppose que les données initiles $z_\mu^{1,*}$ *et* z_μ^0 *du système* (4.12) *satisfaisant à* (5.6) *:*

$$(5.9)\qquad \begin{cases} \mu^{-1} z_\mu^0 \to z^0 & \text{dans } L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right) \text{ faible*} \\ \mu^{-1} z_\mu^{1;*} \to z^{1.*} & \text{dans } H^{-1}\left(]0,l[\times]0,L[\right) \text{ faible*} \\ \mu^{-1} z_\mu \to z & \text{dans } L^\infty\left(0,T,L^2\left(]0,l[\times]0,L[\ \right)\right) \text{ faible*} \end{cases}$$

Alors, lorsque μ *tend vers zéro, on a :*

$$(5.10)\qquad v_\mu \to v \qquad \text{dans } \left[H^1\left(0,T,L^2\left(]0,l[\times]0,L[\ \right)\right)\right]' \text{ faible *}$$

où v *est le contrôle exact du système :*

$$(5.11)\qquad \begin{cases} 6.z'' - q_{kl}^* \dfrac{\partial^2 z}{\partial z_k \partial z_l} = v & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ z = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times]0,T[\\ z(0) = z^0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ z'(0) = z^{1,*} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

La preuve de ce théorème découle aisement des résultats suivants

Théorème (5-4) : *Soient* φ_μ^0 *et* φ_μ^1 *les données initiales de* (4.3) *solution de* (5.8). *Alors, on a :*

$$(5.12)\qquad \begin{cases} \mu^{-1}\varphi_\mu^0 \to \varphi^0 & \text{dans } H^1\left(]0,l[\times]0,L[\right) \text{ faible} \\ \mu^{-1}\varphi_\mu^1 \to \varphi^1 & \text{dans } L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right) \text{ faible} \end{cases}$$

où φ^0 *est une fonction indépendante de* x_1.

En outre, on a :

$$(5.13)\qquad \begin{cases} \varphi_\mu \to \varphi^0 & \text{dans } L^\infty\left(0,T;H^1\left(]0,l[\times]0,L[\right)\right) \text{ faible} \\ \varphi'_\mu \to \varphi' & \text{dans } L^\infty\left(0,T;L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right)\right) \text{ faible} \end{cases}$$

où φ *est la solution du système :*

$$(5.14)\qquad \begin{cases} 6.\varphi'' - q_{kl}^*\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_k \partial z_l} = v & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times]0,T[\\ \varphi(0) = \dfrac{\varphi^0}{6} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \varphi'(0) = \dfrac{\varphi^1}{6} & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

où les coefficients q_{kl}^* *sont donnés par* (3.14).

Preuve. Esquise de la preuve du Théorème (5-4) :

Grâce au lemme $(5-2)$ *ainssi qu'à* (5.6) *et* (5.9) *, on a les estimations suivantes :*

$$
\begin{aligned}
&\mu^{-1}\left\|\varphi_{\mu}^{0}\right\|_{V_{\mu}} \leqslant c \\
&\mu^{-1}\left\|\varphi_{\mu}^{1}\right\|_{L^{2}(]0,l[\times]0,L[\,)} \leqslant c \\
&\left\|\varphi_{\mu}'\right\|_{L^{2}(]0,l[\times]0,L[\,)\times]0,T[} \leqslant c \\
&\left\|\varphi_{\mu}\right\|_{V_{\mu}} \leqslant c
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

On en deduit (5.12) et (5.13) .Puis on verifie sans peine que φ est la solution de (5.14) ■

Théorèmé (5-5) : *Lorsque μ tends vers zéro, la solution $\Psi\mu$ de* (4.4) *vérifie :*

$$\mu^{-1}\Psi_\mu \to \Psi^0 \qquad \text{dans } L^\infty\left(0,T;H^1\left(]0,l[\times]0,L[\right)\right) \text{ faible} \tag{5.16}$$

avec Ψ satisfaisant :

$$\begin{cases} 6.\Psi'' - q^*_{kl}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial z_k \partial z_l} = -6\varphi'' & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \Psi = 0 & \text{sur } \partial\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times]0,T[\\ \Psi(T) = \Psi'(T) = 0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases} \tag{5.17}$$

Preuve. du Théorème (5-5) :

Nous allons procéder comme dans [4] ; pour cela introduisons $\chi_\mu \in V_\mu$, solution de :

$$\begin{cases} -A_\mu\chi_\mu = \varphi'_\mu(T) & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \chi_\mu = 0 & \text{sur } \partial(\ ]0,l[\times]0,L[) \\ \dfrac{\partial\chi_\mu}{\partial v} = 0 & \text{sur }]0,l[\times]0,L[\end{cases} \tag{5.18}$$

et posons

$$\gamma_\mu(z,t) = \int_t^T \Psi(z,s)\,ds + \chi_\mu$$

Par la même technique de calcul utilisée dans le chapitre (4) , on vérifie aisement que γ_μ est la solution du système :

$$
(5.19) \qquad \begin{cases} \left|Y_\mu^*\right| \gamma_\mu'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_{kl}^\mu \dfrac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_l}\right) = \varphi_\mu' & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \gamma_\mu = 0 & \text{sur } \partial]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \gamma_\mu(T) = \chi_\mu & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \gamma_\mu'(T) = 0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}
$$

On montre à partir de (5.15) que χ_μ est bornée pour la norme de V_μ ; par conséquent :

$$
(5.20) \qquad \mu^{-1}\chi^\mu \to \chi \qquad \text{dans } H^1(]0,l[\times]0,L[) \text{ faible}
$$

avec χ indépendantede z_1 et vérifiant :

$$
(5.21) \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_{kl}^* \dfrac{\partial \chi_\mu}{\partial z_l}\right) = \varphi'(T) & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \chi = 0 & \text{sur } \partial]0,l[\times]0,L[\end{cases}
$$

On utilisant (5.15) et (5.20) on trouve que :

$$
(5.22) \qquad \begin{cases} \mu^{-1}\gamma_\mu \to \gamma & \text{dans } L^\infty(0,T;H^1(]0,l[\times]0,L[)) \text{ faible*} \\ \mu^{-1}\gamma_\mu' \to \gamma' & \text{dans } L^\infty(0,T;L^2(]0,l[\times]0,L[)) \text{ faible*} \end{cases}
$$

où γ est indépendante de z_1 et γ est solution de :

$$
(5.23) \qquad \begin{cases} 6\gamma'' - q^*_{kl}\dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(\dfrac{\partial \gamma}{\partial z_l}\right) = -6\varphi'_\mu & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \gamma = 0 & \text{sur } \partial]0,l[\times]0,L[\times]0,T[\\ \gamma(0) = \chi & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\\ \gamma'(0) = 0 & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}
$$

puisque $\Psi_\mu = \gamma'_\mu$, on déduit (5.10) de (5.22) et l'utilisation de (5.21) et (5.23) permet d'affirmer que Ψ est la solution de (5.17) .

Ce qui termine la preuve du théorème $(5-5)$. ■

Preuve. Esquise de la preuve du théorème (5-3) :

Puisque par le théorème (5-1) , on a $z_\mu = \Psi_\mu$, le théorème (4-3) nous donne immédiatement :

$$\mu^{-1} z_\mu \quad \rightarrow \quad z \qquad \text{dans} \quad L^\infty \left(0, T; L^2 \left(]0, l[\times]0, L[\right)\right) \quad \text{faible*}$$

D'autre part comme $v_\mu = -\left|Y_\mu^*\right| \varphi_\mu^{"}$, on a aussi :

$$v_\mu \quad \rightarrow \quad v \qquad \text{dans} \quad \left[H^1 \left(0, T, L^2 \left(]0, l[\times]0, L[\ \ )\right)\right]' \quad \text{faible *}$$

Et l'obtention de $(5-11)$ découle du théorème $(5-4)$. Nous tenons à préciser que toutes les convergences obtenues jusqu'à présent sont lieés à des sous-suites extraites de $\{\mu\}$. Pour achever la preuve du théorème $(5-3)$, on doit encore montrer que toutes les convergences ont lieu pour toute la suite $\{\mu\}$.

Pour ce faire, on applique la méthode H.U.M au système (5.11), ce qui nous permet de savoir que le contrôle exacte v est unique, d'où l'on déduit que toute la suite $\{v_\mu\}$ converge et par suite, toutes les autres convergences ont lieu pour toute la suite $\{\mu\}$. ■

Apprendice :

Preuve du lemme (3-2)

Notre preuve utilise essentiellement des idées de l'appendice de [6] basée sur le théorème de compacité par compensation [13].

Dans tout ce qui suit, c désigne différentes constantes positives indépendantes de ε et le $\sim$ désigne le prolongement par zéro de toute fonction définie sur Ω_ε.

Maintenant nous donnons la preuve du lemme $(3-2)$.

Preuve. Introduisant ρ_ε et V_ε solution de :

$$\text{(A.1)} \qquad \begin{cases} -\left[\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial^2\rho_\varepsilon}{\partial z_1^2}+\dfrac{\partial^2\rho_\varepsilon}{\partial z_2^2}+\dfrac{\partial^2\rho_\varepsilon}{\partial z_3^2}\right]=f_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \\ \rho_\varepsilon=0 & \text{sur } \Omega^{*,\circ}_{\varepsilon\mu} \\ \frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial\upsilon}=0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\left[\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial}{\partial z_1}\left(\dfrac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial z_1}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z_2}\left(\dfrac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial z_2}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z_3}\left(\dfrac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial z_3}\right)\right]=f_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \\ \rho_\varepsilon=0 & \text{sur } \Omega^{*,\circ}_{\varepsilon\mu} \\ \dfrac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial\upsilon}=0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu} \end{cases}$$

L'équation $A_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu} = f_{\varepsilon\mu}$ du lemme $(3-2)$ s'écrit encore :

$$-\left[\varepsilon^{-1}\frac{\partial A_1}{\partial z_1} + \frac{\partial A_\ell}{\partial z_\ell}\right] = f_{\varepsilon\mu} \qquad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \tag{A.2}$$

En soustrayant $(A.2)$ de $(A.1)$, on obtient :

$$-\left[\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(A_1 - \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_1}\right) + \frac{\partial}{\partial z_\ell}\left(A_\ell - \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_\ell}\right)\right] = 0$$

Posons :

$$\sigma^i_{\varepsilon\mu} = A_i - \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_i} = \varepsilon^{-1} a_{i1}\frac{\partial \tau_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + a_{i\ell}\frac{\partial \tau_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} - \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_i}$$

on vérifie facilement que :

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial \sigma^1_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + \frac{\partial \sigma^\ell_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} = 0$$

Comme on a :

$$\|f_{\varepsilon\mu}\|_{V'_{\varepsilon\mu}} \preccurlyeq c.$$

On en déduit d'abord :

$$\begin{cases} \|\tau_{\varepsilon\mu}\| \preccurlyeq c \\ \\ \|\nabla \rho_\varepsilon\|_{\left(\ell^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)\right)^3} \preccurlyeq c. \end{cases}$$

Puis :

$$\|\widetilde{\sigma}_{\varepsilon\mu}\|_{(\ell^2(\Omega))^3} \preccurlyeq c.$$

Ainsi, on a, après extraction éventuelle d'une sous-suite :

$$\begin{cases} \varphi_\varepsilon \tau_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \tau_\mu & \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible} \\ \widetilde{\sigma}_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \sigma_\mu & \text{dans } (\ell^2(\Omega))^3 \text{ faible} \end{cases}$$

Où σ_μ vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial z_\ell}\left(\int_0^1 \sigma_\mu^\ell dz_1\right) = 0 \tag{A.3}$$

Soit $h \in D(\Omega)$, on introduit $n_{\varepsilon\mu}$ définie par :

$$n_{\varepsilon\mu} = \widetilde{\sigma}_{\varepsilon\mu}^1\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial(Q_{\varepsilon\mu}W_{\varepsilon\mu})}{\partial z_1}\right) + \widetilde{\sigma}_{\varepsilon\mu}^\ell\left(\frac{\partial(Q_{\varepsilon\mu}W_{\varepsilon\mu})}{\partial z_\ell}\right)$$

tel que :

$$\begin{cases} A_{\varepsilon\mu}W_{\varepsilon\mu} = h & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\mu}^* \\ W_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega_{\varepsilon\mu}^{*,\circ} \\ \dfrac{\partial W_{\varepsilon\mu}}{\partial \upsilon_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu} \end{cases}$$

En remarquant que :

$$\frac{\partial \widetilde{\tau}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_i}.\frac{\partial\left(Q_{\varepsilon\mu}W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_j} \quad = \quad \frac{\partial\left(Q_{\varepsilon}\tau_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_i}.\frac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_j}, \quad \forall i,j=1,2,3$$

Et que :

$$\begin{aligned} n_{\varepsilon\mu} = A_1\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_{\varepsilon}W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1}\right) + A_\ell\frac{\partial\left(Q_{\varepsilon}W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_\ell} - \\ - \left(\frac{\partial \widetilde{\rho}_{\varepsilon}}{\partial z_1}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_{\varepsilon\mu}.W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1}\right) + \frac{\partial \widetilde{\rho}_{\varepsilon}}{\partial z_\ell}.\frac{\partial\left(Q_{\varepsilon\mu}.W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1}\right) \end{aligned} \tag{A.4}$$

Il vient :

$$A_1\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_{\varepsilon}W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1}\right) + A_\ell\frac{\partial\left(Q_{\varepsilon}W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_\ell} \quad = \quad \varepsilon^{-1}\widetilde{\xi}^1_{\varepsilon\mu}\frac{\partial\left(Q_{\varepsilon\mu}.\tau_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1} + \widetilde{\xi}^\ell_{\varepsilon\mu}\frac{\partial\left(Q_{\varepsilon\mu}.\tau_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_\ell}$$

Où :

$$\begin{cases} \widetilde{\xi}^1_{\varepsilon\mu} = \varepsilon^{-1}a_{11}\dfrac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + a_{1\ell}\dfrac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} \\ \\ \widetilde{\xi}^\ell_{\varepsilon\mu} = \varepsilon^{-1}a_{\ell 1}\dfrac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + a_{\ell k}\dfrac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k} \end{cases}$$

Soit $\varphi \in D\left(\Omega\right)$, φ indépendante de z_1 , on a alors :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\varepsilon^{-1}\widetilde{\xi}^1_{\varepsilon\mu}\frac{\partial\left(Q_{\varepsilon\mu}.\tau_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1} + \widetilde{\xi}^\ell_{\varepsilon\mu}\frac{\partial\left(Q_{\varepsilon\mu}.\tau_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_\ell}\right)\varphi dz = \\ = -\int_\Omega \left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial \widetilde{\xi}^1_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + \frac{\partial \widetilde{\xi}^\ell_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell}\right) Q_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu}.\varphi dz - \int_\Omega \widetilde{\xi}^\ell_{\varepsilon\mu}\left(\varphi_{\varepsilon}\tau_{\varepsilon\mu}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z_\ell}dz \end{aligned} \tag{A.5}$$

Le terme de droite converge vers :

$$I = \int_\Omega \left(\left|Y_\mu^*\right| .h.\tau_\mu.\varphi\right) dz - \int_\Omega \left(\xi_\mu^\ell.\tau_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z_\ell}\right) dz$$

par ailleurs on a successivement :

$$I = \int_\Omega \left(\left|Y_\mu^*\right| .h.\tau_\mu.\varphi\right) dz - \int_0^\ell \int_0^\ell \left(\tau_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z_\ell}\right) \left(\int_0^1 \xi_\mu^\ell dz_1\right) dz_2 dz_3 =$$

$$= \int_\Omega \left(\left|Y_\mu^*\right| .h.\tau_\mu.\varphi\right) dz - \int_0^\ell \int_0^\ell \tau_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z_\ell} \left(q_\mu^{k\ell} \frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell}\right) dz_2 dz_3 \qquad =$$

$$= \int_\Omega \left(\left|Y_\mu^*\right| .h.\tau_\mu.\varphi\right) dz + \int_0^\ell \int_0^\ell \varphi \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \left(q_\mu^{k\ell} \frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell}\right) dz_2 dz_3 \qquad +$$

$$+ \int_0^\ell \int_0^\ell \varphi.\tau_\mu \left(q_\mu^{k\ell} \frac{\partial^2 W_\mu}{\partial z_\ell^2}\right) dz_2 dz_3 =$$

$$= \int_\Omega \left(\left|Y_\mu^*\right| .h.\tau_\mu.\varphi\right) dz + \int_0^\ell \int_0^\ell \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \left(q_\mu^{k\ell} \frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell}\right) \varphi dz_2 dz_3 \qquad -$$

$$- \int_0^\ell \int_0^\ell \varphi.\tau_\mu \left|Y_\mu^*\right| .h.dz_2 dz_3 = \int_0^\ell \int_0^\ell \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \left(q_\mu^{k\ell} \frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell}\right) \varphi dz_2 dz_3$$

Alors :

$$\text{(A.6)} \qquad A_1 \left(\varepsilon^{-1} \frac{\partial \left(Q_{\varepsilon\mu}.\tau_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1}\right) + A_\ell \left(\frac{\partial \left(Q_{\varepsilon\mu}.\tau_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_\ell}\right) \rightharpoonup q_\mu^{k\ell} \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell} \text{ dans } D'(\Omega) \text{ faible}$$

On s'intéresse maintenant au deuxième terme de $(A.4)$. La méthode des échelles multiples utilisées dans [2] donne :

$$W_{\varepsilon\mu} \quad = \quad W_{\mu} + \varepsilon \left(-\chi_{\mu}^{\ell}(y) \frac{\partial W_{\mu}}{\partial z_{\ell}} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 W_{\mu}}{\partial z_{\ell}^2} \theta_{\mu}^{\ell}(y) + ...$$

Où :

$$W_{\mu} \quad = \quad \lim_{\varepsilon \to 0} W_{\varepsilon\mu}$$

χ_{μ} est la fonction donnée par le système (1.22)

θ_{μ} solution de :

$$\begin{cases} -a_{ij} \dfrac{\partial}{\partial y_i} \left(\dfrac{\partial \theta_{\mu}^{\ell}}{\partial y_j} - \chi_{\mu}^{\ell} \delta_j^{\ell} \right) = -q_{\mu}^{k\ell} \left| Y_{\mu}^{*} \right| - a_{ki} \dfrac{\partial \left(\chi_{\mu}^{*} - y_k \right)}{\partial y_i} & \text{dans } Y_{\mu}^{*} \\ a_{ij} \left(\dfrac{\partial \theta_{\mu}^{\ell}}{\partial y_j} - \chi_{\mu}^{\ell} \delta_j^{\ell} \right) n_i = 0 & \text{sur } \partial_N Y_{\mu}^{*} \\ \theta_{\mu}^{\ell} & \text{periodique en } y_{\ell} \end{cases}$$

On vérifie aisement l'estimation :

$$\left| \nabla \theta_{\mu}^{\ell} \right|_{\left(Y_{\mu}^{*} \right)^3} \preccurlyeq c.\mu \qquad (c \text{ constante indépendante de } \varepsilon)$$

on a aussi :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} = -\varepsilon \dfrac{\partial \widetilde{\chi}_\mu^\ell(y)}{\partial y_1} . \dfrac{\partial \widetilde{W}_\mu}{\partial z_\ell} + \varepsilon^2 R_\varepsilon^1(z) \qquad \text{avec } \left|R_\varepsilon^1\right|_{H^1\left(\Omega_{\varepsilon\mu}^*\right)} \preccurlyeq c \\ \\ \dfrac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} = \left(1 - \dfrac{\partial \widetilde{\chi}_\mu^\ell(y)}{\partial y_\ell}\right) . \dfrac{\partial \widetilde{W}_\mu}{\partial z_\ell} + \varepsilon R_\varepsilon^\ell(z) \quad \text{avec } \left|R_\varepsilon^\ell\right|_{H^1\left(\Omega_{\varepsilon\mu}^*\right)} \preccurlyeq c \end{cases}$$

Ensuite on a successivement :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_i} \dfrac{\partial \left(Q_\varepsilon . W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_i} = \dfrac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_i} . \dfrac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_i} = \dfrac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_1} . \dfrac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + \dfrac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_\ell} . \dfrac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} = \\ \\ = \dfrac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_1} \left(\varepsilon^{-1} \dfrac{\partial \left(Q_\varepsilon . W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1}\right) + \dfrac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_\ell} . \dfrac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} = \\ \\ = \dfrac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_1} \left(-\dfrac{\partial \widetilde{\chi}_\mu^\ell}{\partial y_1}\right) \dfrac{\partial \widetilde{W}_\mu}{\partial z_\ell} + \dfrac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_\ell} \left(1 - \dfrac{\partial \widetilde{\chi}_\mu^\ell}{\partial y_\ell}\right) \dfrac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} + R_\varepsilon(z) = \\ \\ = \dfrac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_1} \left(\delta_{i\ell} - \dfrac{\partial \widetilde{\chi}_\mu^i}{\partial y_i}\right) \dfrac{\partial \widetilde{W}_\mu}{\partial z_\ell} + R_\varepsilon(z) \end{cases}$$

Posons :

$$g_{\varepsilon\mu} \quad = \quad \left(\delta_{i\ell} - \frac{\partial \varkappa_\mu^i}{\partial y_i}\right) \frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_1}$$

il est clair qu'on a la convergence :

$$g_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup g_\mu^* \text{ dans } D'(\Omega) \quad \text{faible}$$

Soit maintenant $\varphi \in D(\Omega)$, φ indépendante de z_1 , il vient:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega n_{\varepsilon\mu}.\varphi.dz = \int_\Omega \sigma^1_{\varepsilon\mu}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon.W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1}\right)\varphi dz \\ \\ \displaystyle\qquad\qquad + \int_\Omega \sigma^\ell_{\varepsilon\mu}.\frac{\partial\left(Q_\varepsilon.W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_\ell}.\varphi dz = \\ \\ \displaystyle = -\int_\Omega\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma^1_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + \frac{\partial\sigma^\ell_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell}\right)\varphi_\varepsilon W_{\varepsilon\mu}.\varphi dz - \int_\Omega \sigma^\ell_{\varepsilon\mu}\left(Q_\varepsilon W_{\varepsilon\mu}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z_\ell}dz \end{array}\right.$$

on a alors

$$\int_\Omega n_{\varepsilon\mu}.\varphi.dz \rightharpoonup \int_\Omega \sigma^\ell_\mu.W_\mu\frac{\partial\varphi}{\partial z_\ell}dz \qquad =$$

$$= \int_0^\ell\int_0^\ell \frac{\partial}{\partial z_\ell}\left(\int_0^1 \sigma^\ell_\mu dz_1\right)W_\mu dz_2 dz_3 + \int_0^\ell\int_0^\ell\left(\int_0^1 \sigma^\ell_\mu dz_1\right)\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell}.\varphi dz_2 dz_3$$

Grâce à $(A.3)$, il vient :

$$\int_\Omega n_{\varepsilon\mu}.\varphi dz \longrightarrow \int_\Omega\left(\int_0^1 \sigma^\ell_\mu dz_1\right)\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell}.\varphi dz$$

c'est à dire :

$$n_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \left(\int_0^1 \sigma^\ell_\mu dz_1\right)\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell} \qquad \text{dans } D'(\Omega) \quad \text{faible} \tag{A.7}$$

Combinant alors $(A.4)$, $(A.6)$ et $(A.7)$, on obtient :

$$q^{k\ell}_\mu\frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_\ell}.\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell} - g^*_\mu\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell} = \left(\int_0^1 \sigma^\ell_\mu dz_1\right)\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell}$$

Comme le choix de W_μ est arbitraire, on en déduit :

$$q_\mu^{k\ell}\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} - g_\mu^* \quad = \quad \int_0^1 \sigma_\mu^\ell dz_1$$

Grâce à $(A.3)$, il vient :

$$q_\mu^{k\ell}\frac{\partial^2 \tau_\mu}{\partial z_\ell^2} \quad = \quad -\frac{\partial g_\mu^*}{\partial z_\ell}$$

avec

$$\frac{\partial g_\mu^*}{\partial z_\ell} \quad \in \quad H^{-1}\left(]0,\ell[\times]0,\ell[\right) \qquad \text{car} \quad g_\mu^* \in \ell^2\left(]0,\ell[\times]0,\ell[\right)$$

Il suffit maintenant de choisir :

$$f_\mu^* \quad = \quad -\frac{\partial g_\mu^*}{\partial z_\ell}$$

pour que la preuve du lemme $(3-2)$ soit terminée. ■

Références bibliogrphiques

[1] N. Aib, Homogénéisation des structures réticulés, Thèse de Magister, Université de Constantine, (1990).

[2] A.Bensousssan, J.L. Lions, G. Papanicolau, *Asymtotic analysis for periodic structires*,(Noth-Hollandn Amsterdam, 1978).

[3] H. Bréziz, *Analyse Fonctionnelle. Théorie et App.*, (Masson, Paris, 1983).

[4] P.G. Ciarlet, A justification of the von Karman equations. Arch. RAT. Mech. and Analyis, 73 (1980), 349-389.

[5] *P.G.* Ciarlet, P. Destuynder, A justification of the two-dimensional linear plate model, J. Mécanique 18 (1979),315-344.

[6] D. Cioranescu, P. Donato, Exact internal contollability in perforated domains. J. Math. Pures et Appl, 68 (1989),185-213.

[7] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, Homogenisation in open sets with holes. J.Math. Anal. Appl. 71 (1979), 590-607.

[8] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, *Homogenizatio of reticulated structures*, Springer-Verlag, Berlin, New York 1999.

[9] A Haraux, Semi-linear hyperbolic problems in bounded domains. Mathematical Reports, edited by J. Dieudonné. Hardwood academic publishers (1987).

[10] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization. The multiplier method.* R.AM (Masson et John Wiley, Paris, 1994)

[11] J.L.Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisations des systèmes distribués*, tomes1 et 2 R.M.A. (Masson, Paris, 1988)

[12] J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* vol. 1 (Dunod, Paris, 1988)

[13] F. Murat, Compacité par compensation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 5 (1978), 485-507.

[14] J. Saint Jean Paulin, L. R. Tcheugoué Tébou, Contrôlabilité exacte interne dans des domaines perforés avec une conditions aux limites de Fourier sur le bord des trous,

Asympt. Analysis, 14 (1997), 193-221.

[15] L. R. Tcheugoué Tébou, Etude de quelques problèmes de contrôlabilité exacte et stabilisation dépendant ou non de petits paramètres, Thèse de Doctorat, Université de

Metz, (1995).

[16] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, Global behaviour of very thin cellular structures. Applications to networks. Procedings of the 7th Symposium to trends in Applications of Mahematics to Mechanics, edited by J.F. Besseling, W/. Eckhauss. Springer (1988) 26-34

[17] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, Asymtotic analysis for elastic wireworks. Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université de Pierre et Marie Curie, Paris (1989), R98008.