Dans ce chapitre, on montre l'éxistence et l'unicité de la solution forte du problème (47)-(51). La démonstration est basée sur une estimation à priori et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par ce problème.

Le problème (47)-(51) peut être écrit sous la forme opératorielle

$$Lu = \mathcal{F} \tag{52}$$

où l'opérateur $L = (\pounds,\ l_1,\ l_2,\ l_3)$, est considéré de E dans F, de domaine de définition $D(L)$ constitue des fonctions $u \in L^2(\Omega)$, telle que $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3}$,$\dfrac{\partial^{k+1} u}{\partial t^k \partial x} \in L^2(\Omega)$, $k = \overline{0,3}$, et satisfont aux conditions (50), (51).

3.1 Espaces Fonctionnels Associes

Pour l'étude du problème (47)-(51), on introduit les espaces fonctionnels suivants :

Soit E l'espace de Banach constitué des fonctions u, $u \in L^2(\Omega)$, vérifiant (50)-(51), munit de la norme

$$\|u\|_E^2 = \int_0^T \int_0^1 t\frac{(1-x)^2}{2}\left[\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|^2 + \left|\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}\right|^2\right] dxdt + \int_0^T \int_0^1 t\left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2\right) dxdt$$

$$+ \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right) dxdt + \sup_t \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + |u|^2\right) dx. \tag{53}$$

et F l'espace de Hilbert des fonctions $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi, \chi)$, avec $\varphi,\ \psi,\ \chi \in H^1(0,1)$ et $f \in L^2(\Omega)$, dont la norme est donnée par

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}\|_F^2 &= \int_0^T \int_0^1 t\frac{(1-x)^2}{2}|f|^2 dxdt + \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|^2 + |\varphi|^2\right) dx \\ &+ \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|^2 + |\psi|^2\right) dx + \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial \chi}{\partial x}\right|^2 + |\chi|^2\right) dx. \end{aligned} \tag{54}$$

Lemme 7 *Pour $u \in D(L)$ tel que $u(x,0) = \varphi(x)$, on a*

$$\sup_t \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + |u|^2\right] dx \leq$$

$$2e^T\left(\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2+|\varphi|^2\right]dx+\int_0^T\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right)dxdt\right).$$

Démonstration. Il suffit d'intégrer

$$\mathrm{Re}\int_0^s\int_0^1\exp(-t)\left(u\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}+\frac{(1-x)^2}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}}\right)dtdx,$$

et en utilisant des $\varepsilon-$inégalités, on obtient l'inégalité demandée. ■

3.2 Inégalité de l'énergie et ses Conséquences

Théorème 6 *Il existe une constante positive k indépendante de u, telle que pour tout $u \in D(L)$, on a*

$$\|u\|_E \leq k \|Lu\|_F . \tag{55}$$

Démonstration. Multiplions scalairment dans l'espace $L^2(\Omega)$ l'équation (47) et l'opérateur

$$Mu = \frac{(1-x)^2}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + (1-x) J_x \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \qquad \text{where} \quad J_x u = \int_0^x u(\zeta, t)\, d\zeta.$$

En prenant la partie réelle, on obtient

$$\Phi(u,u) = \mathrm{Re} \int_\Omega t \exp(-ct) \pounds u \overline{Mu} dxdt, \tag{56}$$

avec la constante c satisfaisant

$$\begin{cases} c > 0, \\ c_2 - 2cc_1' + c^2 a_1 + b^2 > 0, \\ 2ca_0 - 2c_1 - (c_2 - 2cc_1' + c^2 a_1 + b^2) T > 0, \\ c_1 - ca_0 < 0, \\ \frac{a_0}{2} + T(c_1' - ca_1) > 0. \end{cases} \tag{57}$$

En substituant l'expression de Mu dans (56), on obtient

$$\Phi(u,u) = \int_0^T \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} t \exp(-ct) \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 dxdt$$

$$+ \int_0^T \int_0^1 \frac{t}{2} \exp(-ct) \left| J_x \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 dxdt + \mathrm{Re} \int_0^T \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} t \exp(-ct) \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}} dxdt$$

$$+ \mathrm{Re} \int_0^T \int_0^1 (1-x) t \exp(-ct) \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial t \partial x} \right) J_x \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}} dxdt. \tag{58}$$

En intégrant par parties les deux derniers termes dans le membre droit de (58), par rapport à x, et en utilisant les conditions (50), (51), on trouve

$$\mathrm{Re} \int_0^T \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} t \exp(-ct) \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}} dxdt =$$

$$-\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} ta\exp(-ct)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial t^3\partial x}}dxdt$$
$$+\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 (1-x)\,ta\exp(-ct)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt. \tag{59}$$

$$\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 (1-x)\,t\exp(-ct)\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)J_x\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt =$$
$$-\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 (1-x)\,ta\exp(-ct)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt$$
$$-\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 ta\exp(-ct)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt-\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 ta_x\exp(-ct)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{J_x\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt. \tag{60}$$

En intégrant de nouveau le premier terme dans le membre droit de (59) par parties, par rapport à t, en prenant en compte les conditions (48), (49), alors l'égalité (59) sera

$$\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}t\exp(-ct)\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt =$$

$$-\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\frac{2a_t-2ca+t\left(a_{tt}-2ca_t+c^2a\right)}{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 dxdt$$
$$\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}ta\exp(-ct)\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2 dxdt+\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}\left\{\frac{a+t\left(a_t-ca\right)}{2}\right\}\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2\Bigg|_{t=0}^{t=T}dx$$
$$+\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 (1-x)\,ta\exp(-ct)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt-\operatorname{Re}\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}a(x,T)\,T\exp(-cT)\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\overline{\frac{\partial\chi}{\partial x}}\right|_{t=T}dx. \tag{61}$$

intégrons par parties le second terme dans le membre droit de (60) par rapport à t, en utilisant les conditions (48) et (49), la relation (60) devient

$$\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 (1-x)\,t\exp(-ct)\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x\partial t}\right)J_x\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt =$$
$$-\int_0^T\int_0^1 \frac{2a_t-2ca+t\left(a_{tt}-2ca_t+c^2a\right)}{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+\int_0^T\int_0^1 ta\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt$$
$$-\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 (1-x)\,t\exp(-ct)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt+\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 ta_x\exp(-ct)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{J_x\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt$$
$$+\int_0^1\frac{a+t\left(a_t-ca\right)}{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\Bigg|_0^T dx-\operatorname{Re}\int_0^1 a(x,T)\,T\exp(-cT)\left.\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\chi(x)}\right|_{t=T}dx. \tag{62}$$

De (61) et (62), l'égalité (58) s'écrit

$$\Phi(u,u) = \int_0^T \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} t \exp(-ct) \left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|^2 dxdt + \int_0^T \int_0^1 \frac{t}{2} \exp(-ct) \left|J_x \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|^2 dxdt$$

$$+ \int_0^T \int_0^1 ta \exp(-ct) \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2\right] dxdt$$

$$- \int_0^T \int_0^1 \frac{2a_t - 2ca + t(a_{tt} - 2ca_t + c^2 a)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right] dxdt$$

$$+ \int_0^1 \frac{a + t(a_t - ca)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right]\Bigg|_{t=0}^{t=T} dx$$

$$+ \operatorname{Re} \int_0^1 ta(x,t) \exp(-ct) \left[\frac{(1-x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}} + \frac{\partial u}{\partial t} \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}\right]\Bigg|_{t=T} dx$$

$$- \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^1 ta_x \exp(-ct) \frac{\partial u}{\partial t} \overline{J_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^3}} dxdt. \tag{63}$$

En utilisant les inégalités de Young, on montre que

$$- \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^1 ta_x \exp(-ct) \frac{\partial u}{\partial t} \overline{J_x \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}} dxdt \leq$$

$$\int_0^T \int_0^1 \frac{ta_x^2}{2} \exp(-ct) \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \int_0^T \int_0^1 \frac{t}{2} \exp(-ct) \left|J_x \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|^2 dxdt,$$

et

$$\operatorname{Re} \int_0^1 ta(x,t) \exp(-ct) \left[\frac{(1-x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}} + \frac{\partial u}{\partial t} \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}\right]\Bigg|_{t=T} dx \leq$$

$$\int_0^1 \frac{a}{4} \exp(-ct) \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right]\Bigg|_{t=T} dx$$

$$+ \int_0^1 t^2 a \exp(-ct) \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2\right]\Bigg|_{t=T} dx,$$

et

$$\Phi(u,u) = \operatorname{Re} \int_\Omega t \exp(-ct) \pounds u \overline{Mu} dxdt \leq$$

$$\int_0^T \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} \frac{t}{2} \exp(-ct) \left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|^2 dxdt + 33 \int_0^T \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} t \exp(-ct) |f|^2 dxdt.$$

En prenant en considération les inégalités précédentes, l'égalité (63), devient

$$\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\frac{t}{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|^2 dxdt+\int_0^T\int_0^1 ta\exp(-ct)\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2\right]dxdt$$

$$-\int_0^T\int_0^1 \frac{2a_t-2ca+t\left(a_{tt}-2ca_t+c^2a\right)+ta_x^2}{2}\exp(-ct)\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right]dxdt$$

$$+\int_0^1 \frac{\frac{a}{2}+t\left(a_t-ca\right)}{2}\exp(-ct)\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right]\Bigg|_{t=T}dx\leq$$

$$33\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}t\exp(-ct)\left|f(x,t)\right|^2 dxdt+\int_0^1\frac{a(x,0)}{2}\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2+|\psi|^2\right]dx$$

$$+\int_0^1\frac{T^2a(x,T)}{2}\exp(-cT)\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\chi}{\partial x}\right|^2+|\chi|^2\right]dx. \tag{64}$$

En utilisant les conditions (57), et comme la quantité $\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right]\Bigg|_{t=T}dx$ est positive, alors, de l'égalité (64), on déduit que

$$\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}t\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|^2 dxdt+\int_0^T\int_0^1 t\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2\right]dxdt$$

$$+\int_0^T\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right]dxdt$$

$$\leq\frac{\beta}{\alpha}\left(\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}t\left|f(x,t)\right|^2 dxdt+\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2+|\psi|^2\right]dx\right.$$

$$\left.+\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\chi}{\partial x}\right|^2+|\chi|^2\right]dx\right), \tag{65}$$

avec

$$\begin{aligned}\alpha &= \min\left(\frac{1}{2},a_0,ca_0-c_1\right),\\ \beta &= \max\left(1,\frac{a_1}{2},\frac{T^2a_1}{2}\right).\end{aligned}$$

Combinons le lemme (7) avec l'inégalité (65), on trouve

$$\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}t\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|^2 dxdt+\int_0^T\int_0^1 t\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2\right]dxdt$$

$$\int_0^T\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right]dxdt+\sup_t\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+|u|^2\right]dx$$

$$\leq e^T\left(\frac{2\beta}{\alpha}+1\right)\left(\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}t\left|f(x,t)\right|^2dxdt+\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2+|\varphi|^2\right]dx\right.$$
$$\left.+\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2+|\psi|^2\right]dx+\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\chi}{\partial x}\right|^2+|\chi|^2\right]dx\right) \tag{66}$$

En vertu de l'équation (47), on conclut que

$$a_0^2\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}t\left|\frac{\partial^3u}{\partial t\partial x^2}\right|^2dxdt\leq 2\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}t\left|\frac{\partial^3u}{\partial t^3}\right|^2dxdt$$
$$+b^2T\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x}\right|^2dxdt+4\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}t\left|f(x,t)\right|^2dxdt.$$

combinons maintenant l'inégalité précédente avec (66), on aboutit à

$$\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}t\left|\frac{\partial^3u}{\partial t^3}\right|^2dxdt+\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}t\left|\frac{\partial^3u}{\partial t\partial x^2}\right|^2dxdt$$
$$+\int_0^T\int_0^1t\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^3u}{\partial t^2\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right|^2\right]dxdt$$
$$\int_0^1\int_0^T\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right]dxdt+\sup_t\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+|u|^2\right]dx\leq$$
$$k^2\left[\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}t\left|f(x,t)\right|^2dxdt+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2+|\varphi(x)|^2\right)dx\right.$$
$$\left.+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2+|\psi(x)|^2\right)dx+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\chi}{\partial x}\right|^2+|\chi(x)|^2\right)dx\right],$$

où

$$k^2=\frac{e^T\left(\frac{2\beta}{\alpha}+1\right)(b^2T+2)+4}{\min(1,a_0^2)}$$

ce qui achève la démonstration. ■

Proposition 4 *L'opérateur L de E dans F est fermable.*

Définition 5 *La solution de l'équation $\overline{L}u=\mathcal{F}$ est appelée solution forte du problème (47)-(51).*

D'aprés la définition de $\overline{L}$, on déduit de (55) l'inégalité suivante

$$\|u\|\leq k\left\|\overline{L}u\right\|,\forall u\in D\left(\overline{L}\right). \tag{67}$$

De l'inégalité précédente, on conclut que :

Corollaire 3 *La solution forte si elle existe est unique et dépend continûment de* $\mathcal{F}$.

Corollaire 4 *L'image* $R\left(\overline{L}\right)$ *de l'opérateur* $\overline{L}$ *est fermée dans* F *et on a* $R\left(\overline{L}\right) = \overline{R\left(L\right)}$.

3.3 Résolubilité du Problème (47)-(51)

De l'inégalité (67), on déduit que l'opérateur $\overline{L}$ admet un inverse borné $\overline{L}^{-1}$, du corollaire précédent résulte que l'image $R\left(\overline{L}\right)$ est fermée.

D'où, pour montrer l'existence de la solution forte, il suffit de montrer la densité de l'ensemble $R(L)$ dans F.

Lemme 8 *On suppose que la fonction $a(x,t)$ et ses dérivées $\dfrac{\partial^3 a}{\partial t^2 \partial x}$, $\dfrac{\partial a}{\partial t \partial x}$ soient bornées. Soit $u \in D_0(L) = \left\{ u \in L^2(\Omega),\ u(x,0)=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,T)=0 \right\}$. Si pour certaines fonctions w tel que $w \in L^2(\Omega)$, on a*

$$\int_0^T \int_0^1 (1-x)^2 f(x,t)\, \overline{w(x,t)} dxdt = 0, \tag{68}$$

alors

$$w(x,t) = 0.$$

Démonstration. L'égalité (68), peut être écrit sous la forme suivante

$$\int_0^T \int_0^1 (1-x)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \overline{w} dxdt =$$

$$-\int_0^T \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left((1-x)\, a(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \left\{ (1-x)\, \overline{w} - \int_0^x \overline{w} d\zeta \right\} dxdt. \tag{69}$$

Pour la fonction $w(x,t)$, on construit la fonction $v(x,t)$ telle que

$$v(x,t) = w(x,t) - \int_0^x w(\zeta,t)\, d\zeta. \tag{70}$$

De l'égalité (70), on montre que $\int_0^1 v(x,t)\, dx = 0$, et que l'égalité (69) devient

$$\int_0^T \int_0^1 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \overline{Nv} dxdt = \int_0^T \int_0^1 A(t) \frac{\partial u}{\partial t} \overline{v} dxdt, \tag{71}$$

avec $A(t)\, u = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left((1-x)\, a(x,t) \dfrac{\partial u}{\partial x} \right)$ et $Nv = (1-x)\, v + Jv$.

L'opérateur $A(t)$ admet un inverse continu dans $L^2(0,1)$ donné par

$$A^{-1}(t)\, g = -\int_0^x \frac{1}{1-\zeta} \frac{1}{a} \int_0^\zeta g(\eta,t)\, d\eta + C(t) \int_0^x \frac{1}{1-\zeta} \frac{d\zeta}{a}, \tag{72}$$

où

$$C(t) = \frac{\int_0^1 \frac{d\zeta}{a} \int_0^\zeta g(\eta, t)\, d\eta}{\int_0^1 \frac{d\zeta}{a}}. \tag{73}$$

Donc de (72), on déduit que $\int_0^1 A^{-1}(t)\, g dx = 0$, alors $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\varepsilon$ peut être mise sous la forme

$$J_\varepsilon^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} = J_\varepsilon^{-1} A^{-1}(t)\, A(t) \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Remplaçons la fonction $\frac{\partial u}{\partial t}$ dans (71) par la fonction régularisée $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\varepsilon$, en utilisant la relation

$$A(t)\, J_\varepsilon^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} = J_\varepsilon^{-1} A(t) \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon J_\varepsilon^{-1} B(t)\, J_\varepsilon^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} \tag{74}$$

où

$$\begin{aligned} B(t)\, g = {} & a_{xtt} J_\varepsilon^{-1} \left(\frac{\int_0^\zeta g(\eta, t)\, d\eta - C(t)}{a} \right) + a_{tt} J_\varepsilon^{-1} \left(-\frac{a_x}{a^2} \left(\int_0^\zeta g(\eta, t)\, d\eta - C(t) \right) + \frac{g}{a} \right) \\ & + 2 a_{xt} \frac{\partial}{\partial t} J_\varepsilon^{-1} \left(\frac{\int_0^\zeta g(\eta, t)\, d\eta - C(t)}{a} \right) + 2 a_t \frac{\partial}{\partial t} J_\varepsilon^{-1} \left(-\frac{a_x}{a^2} \left(\int_0^\zeta g(\eta, t)\, d\eta - C(t) \right) + \frac{g}{a} \right). \end{aligned} \tag{75}$$

L'opérateur $B(t)$ admet un adjoint donné par

$$B^*(t)\, h = \frac{1}{a} \left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* a_{tt} h - \frac{2}{a} \left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* \frac{\partial}{\partial t} (a_t h) + G_\varepsilon(h)(x) + \frac{\int_0^x \frac{d\eta}{a}}{\int_0^1 \frac{d\eta}{a}} G_\varepsilon(h)(1), \tag{76}$$

avec

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(h)(x) = \int_0^x & \left(\frac{a_\zeta}{a^2} \left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* (a_{tt} h) - \frac{1}{a} \left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* \frac{\partial}{\partial t} (a_{xtt} h) \right. \\ & \left. + \frac{2}{a} \left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* \frac{\partial}{\partial t} (a_{xt} h) + \frac{2 a_\zeta}{a^2} \left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* \frac{\partial}{\partial t} (a_t h) \right) d\zeta. \end{aligned} \tag{77}$$

Par conséquent, l'égalité (71), s'écrit sous la forme

$$\int_0^T \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} N \overline{\frac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial t^2}} = \int_0^T \int_0^1 A(t) \frac{\partial u}{\partial t} \overline{h}_\varepsilon, \tag{78}$$

avec $h_\varepsilon = v_\varepsilon^* - \epsilon B^*(t)\, v_\varepsilon^*$.

le membre droit de (78) est une forme linéaire continue de $\frac{\partial u}{\partial t}$. Alors la fonction h_ε admet

des dérivées $(1-x)\dfrac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left((1-x)\dfrac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}\right) \in L^2(\Omega)$ et les conditions suivantes sont satisfaites

$$h_\varepsilon|_{x=0}=0,\ \ h_\varepsilon|_{x=1}=0,\ \ (1-x)\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}\bigg|_{x=1}=0. \tag{79}$$

De l'égalité

$$\begin{aligned}(1-x)\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x} &= \left[I-\frac{\varepsilon}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* a_{tt}\right](1-x)\frac{\partial}{\partial x}v_\varepsilon^* \\ &+\frac{2\varepsilon}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*\frac{\partial}{\partial t}\left(a_t(1-x)\frac{\partial}{\partial x}v_\varepsilon^*\right),\end{aligned} \tag{80}$$

et comme l'opérateur $(J_\varepsilon^{-1})^*$ est borné dans $L^2(\Omega)$, alors pour ε assez petit, on déduit$\left\|\dfrac{\varepsilon}{a}(J_\varepsilon^{-1})^* a_{tt}\right\| < 1$.Alors l'opérateur $\left[I-\dfrac{\varepsilon}{a}(J_\varepsilon^{-1})^* a_{tt}\right]$ a un inverse borné dans l'espace $L^2(\Omega)$. on conclut que $(1-x)\dfrac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x} \in L^2(\Omega)$. De la mème manière, on aura $\dfrac{\partial}{\partial x}\left((1-x)\dfrac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right) \in L^2(\Omega)$, et les conditions suivantes sont vérifiées

$$v_\varepsilon^*|_{x=0}=0,\ v_\varepsilon^*|_{x=1}=0,\ (1-x)\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\bigg|_{x=1}=0.$$

Posons $u=\int_0^t\int_0^\zeta\int_\eta^T \exp(c\tau)\, v_\varepsilon^* d\tau d\eta d\zeta$ dans la relation (71), on obtient

$$-\int_0^T\int_0^1 \exp(ct)\, v_\varepsilon^*\overline{Nv}dxdt=\int_0^T\int_0^1 A(t)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{v}dxdt, \tag{81}$$

avec la constante c satisfaisant

$$\begin{cases} c<0, \\ c_1'-ca_0>0, \\ c_2'-2cc_1'+c^2a_0\geq 0. \end{cases} \tag{82}$$

En utilisant les propriétés des opérateurs de régularisation, le membre droit de l'égalité (81) aprés intégration par rapport à x, devient

$$\int_0^T\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x)\,a\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)\left[v_\varepsilon^*-\varepsilon\overline{\frac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial t^2}}\right]dxdt=$$

$$-\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1(1-x)\,a\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\overline{\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}}dxdt+\varepsilon\int_0^T\int_0^1(1-x)\,a\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\overline{\frac{\partial^3 v_\varepsilon^*}{\partial t^2\partial x}}dxdt,$$

en intégrant par rapport à t, chaque terme du membre droit de l'égalité précédente, utilisant le fait que $u \in D_0(L)$ on obtient

$$-\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 (1-x)\,a\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\overline{\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}}dxdt =$$

$$\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 (1-x)\,a\exp(-ct)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial t^3\partial x}}dxdt = -\int_0^T\int_0^1 (1-x)\,a\exp(-ct)\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2 dxdt$$

$$+\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)}{2}\left(a_{tt}-2ca_t+c^2a\right)\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 dxdt$$

$$-\int_0^1 \frac{(1-x)}{2}\left(a_t-ca\right)\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2\Bigg|_{t=T} dx. \tag{83}$$

$$\varepsilon\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 a\,(1-x)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\overline{\frac{\partial^3 v_\varepsilon^*}{\partial t^2\partial x}}dxdt = -\varepsilon\int_0^T\int_0^1 (1-x)\,a\left|\frac{\partial^4 u}{\partial t^3\partial x}\right|^2 dxdt$$

$$+\varepsilon\int_0^1 (1-x)\,a_t\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2 dx\Bigg|_{t=0} + \varepsilon\int_0^T\int_0^1 (1-x)\left(a_{tt}-ca_t\right)\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2 dxdt$$

$$-\varepsilon\operatorname{Re}\int_0^1 (1-x)\,a_t\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\overline{\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}}dx\Bigg|_{t=T} + \varepsilon\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 (1-x)\,a_{tt}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\overline{\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}}dxdt. \tag{84}$$

De (83), (84), en utilisant des ε-inégalités et les conditions (82), on aboutit à

$$\operatorname{Rc}\int_0^T\int_0^1 \exp(ct)\,v_\varepsilon^*\overline{Nv}dxdt + (c_1'-ca_0)\int_0^1 \frac{(1-x)}{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2\Bigg|_{t=T} dx \le$$

$$\left(c_2-2cc_1+c^2a_1\right)\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)}{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 dxdt$$

$$+\epsilon\Bigg(\int_0^T\int_0^1 (1-x)\left|a_{tt}-ca_t\right|\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2 dxdt + \int_0^T\int_0^1 (1-x)\left|a_t\right|\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 dxdt$$

$$+\int_0^1 (1-x)\,a_t\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2 dx\Bigg|_{t=0} + \int_0^1 (1-x)\left|a_t\right|\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 dx\Bigg|_{t=T}$$

$$+\int_0^1 (1-x)\left|a_t\right|\left|\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right|^2 dx\Bigg|_{t=T} + \int_0^T\int_0^1 (1-x)\left|a_{tt}\right|\left|\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right|^2 dxdt\Bigg). \tag{85}$$

En substituant Nv par son expression dans (85), on obtient

$$\int_0^T\int_0^1 (1-x)\exp(ct)\left|v\right|^2 dxdt + (c_1'-ca_0-\epsilon)\int_0^1 \frac{(1-x)}{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2\Bigg|_{t=T} dx \le$$

$$\left(c_2-2cc_1+c^2a_1+\epsilon\right)\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)}{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 dxdt$$

$$+\epsilon\left(\int_0^T\int_0^1(1-x)\left|a_{tt}-ca_t\right|\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2 dxdt+\int_0^1(1-x)\,a_t\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2 dx\right|_{t=0}$$

$$+\int_0^1(1-x)\left|a_t\right|\left|\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right|^2 dx\Bigg|_{t=T}++\int_0^1(1-x)\left|a_t\right|\left|\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right|^2 dx\Bigg|_{t=T}$$

$$+\int_0^T\int_0^1(1-x)\left|a_{tt}\right|\left|\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right|^2 dxdt\Bigg)+\int_0^T\int_0^1\exp(ct)\left|v-v_\varepsilon^*\right|\left|Nv\right|dxdt.$$

On choisi ϵ assez petit de telle sorte que $c_1'-ca_0-\epsilon>0$. En utilisant le lemme (1) dans l'inégalité précédente, en passant à la limite quand $\epsilon\mapsto 0$, on obtient

$$\int_0^T\int_0^1(1-x)\exp(ct)\left|v\right|^2 dxdt\leq 0,$$

D'où $v=0$, par conséquent $w=0$. ■

Théorème 7 *L'image $R(\overline{L})$ de $\overline{L}$ coincide avec F.*

Démonstration. Comme F est un Hilbert, alors $R(\overline{L})=F$ ssi de la relation

$$\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}t\pounds u\overline{\mathcal{F}}_1 dxdt+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\overline{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}}+\varphi\overline{\varphi_1}\right)dx$$

$$+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\overline{\frac{\partial\psi_1}{\partial x}}+\psi\overline{\psi_1}\right)dx+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\frac{\partial\chi}{\partial x}\overline{\frac{\partial\chi_1}{\partial x}}+\chi\overline{\chi_1}\right)dx=0,\qquad(86)$$

pour u arbitraire dans $D(L)$ et $\mathcal{F}=(g,\ \varphi,\ \psi,\ \chi)\in F$, implique $\mathcal{F}=0$. En prenant $u\in D_0(L)$ dans (86), on obtient $\int_0^T\int_0^1(1-x)^2 t\pounds ugdxdt=0$. En utilisant le lemme (8), on aura $w=tg=0$, d'où $g=0$.

Par conséquent $\forall u\in D(L)$, on a

$$\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\overline{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}}+\varphi\overline{\varphi_1}\right)dx+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\overline{\frac{\partial\psi_1}{\partial x}}+\psi\overline{\psi_1}\right)dx$$

$$+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\frac{\partial\chi}{\partial x}\overline{\frac{\partial\chi_1}{\partial x}}+\chi\overline{\chi_1}\right)dx=0,$$

comme l'image de l'opérateur trace est dense dans l'espace de Hilbert munit de la norme

$$\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2+\left|\varphi\right|^2\right)dx+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2+\left|\psi\right|^2\right)dx$$

$$+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\chi}{\partial x}\right|^2+\left|\chi\right|^2\right)dx,$$

alors $\varphi=\psi=\chi=0$. ■

CHAPITRE III

Problème Mixte Pour Une Equation Aux Dériveés Partielles d'Ordre Trois Combinant Une Condition Finale Avec Deux Autres Intégrales à Poids.

Dans ce chpaitre, on reprend l'étude faite dans le chapitre précédent pour la mème équation combinant une condition finale avec deux autres integrales à poids. On montre l'existence et l'unicité de la solution. La démonstration est baseé sur l'inégalité de l'énergie et la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème en question.

4 Position du Problème

Dans le rectangle $\Omega = [0,1] \times [0,T]$, on considère l'équation

$$\pounds u = \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) = f(x,t), \tag{87}$$

avec la fonction $a(x,t)$, satisfaisant

$$\begin{cases} 0 < a_0 \leq a(x,t) \leq a_1, \\ \left|\dfrac{\partial a}{\partial x}(x,t)\right| \leq b, \ x \in [0,1], \ t \in [0,T]. \end{cases}$$

Pour l'équation (87), on lui associe les conditions initiales

$$l_1 u = u(x,0) = \varphi(x), l_2 u = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \qquad x \in [0,1], \tag{88}$$

la condition finale

$$l_3 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,T) = \chi(x), \qquad x \in [0,1], \tag{89}$$

et les conditions intégrales

$$\int_0^1 K_i(x)\, u(x,t)\, dx = 0, \quad i = \overline{1,2}. \quad t \in [0,T] \tag{90}$$

Les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$, $f(x,t)$ et $K_i(x)$ sont données, on suppose de plus les conditions de compatibilité

$$\int_0^1 K_i(x)\,\varphi(x)\,dx = 0, \int_0^1 K_i(x)\,\psi(x)\,dx = 0, \int_0^1 K_i(x)\,\chi(x)\,dx = 0, \qquad i = \overline{1,2}.$$

et que les fonctions $K_i(x)$ et ses derivées, satisfont aux

$$\begin{cases} 0 \leq k_0 \leq K_i(x) \leq k_1, \\ \left|\dfrac{dK_i}{dx} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{K_i(x)}{a}\dfrac{\partial a}{\partial x}\right)\right| \leq \dfrac{m}{2}, \quad i = \overline{1,2}, \\ \frac{k_1^2}{a_0} b \leq m_0 \leq H(x) = K_2(x)\dfrac{dK_1(x)}{dx} - K_1(x)\dfrac{dK_2(x)}{dx} \leq m_1. \end{cases} \tag{91}$$

Dans ce chapitre, notre objectif est de démontrer l'existence et l'unicité de la solution forte du problème (87)- (90). La démonstation est basée sur les inégalités énergitiques et la densité de l'image de l'opérateur engendré par ce problème. Le problème (87)- (90), peut être écrit sous la forme opérationnelle

$$Lu = \mathcal{F}$$

où $\mathcal{F} = (f,\, \varphi,\, \psi,\, \chi)$. L'opérateur $L = (l_1,\, l_2,\, l_3)$ est considéré d'un espace de Banach E dans un espace de Hilbert F. Le domaine de définition de l'opérateur L est l'ensemble des fonctions u appartenant á $W_2^{2,3}(\Omega)$ et qui satisfont aux conditions (90).

4.1 Espaces Fonctionnels

Pou étudier le problème (87)-(90), on introduit les espaces fonctionnels E et F donnés par :

E est l'espace de Banach constitué des fonctions $u \in W_2^{2,3}(\Omega)$ vérifiant (90), muni de la norme suivante

$$\|u\|_E^2 = \sum_{i=1}^{i=2} \int_\Omega t \left| \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta, t)\, d\zeta \right|^2 dxdt$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=2} \int_\Omega t \left| \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(a(\zeta, t) \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial t} \right) \right|^2 dxdt + \int_\Omega t \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dxdt$$

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dxdt + \sup_t \int_0^1 |u(x,t)|^2\, dx, \tag{92}$$

et F est l'espace de Hilbert des fonctions $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi, \chi) \in (L^2(\Omega))^4$, muni de la norme

$$\|\mathcal{F}\|_F^2 = \int_\Omega t\, |f|^2\, dxdt + \int_0^1 \left(|\varphi|^2 + |\psi|^2 + |\chi|^2 \right) dx. \tag{93}$$

Lemme 9 *Pour $u \in E$, tel que $u(x,0) = \varphi(x)$, on a*

$$\sup_t \int_0^1 |u(x,t)\, d\zeta|^2\, dx \leq e^T \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|^2 dxdt + e^T \int_0^1 |\varphi|^2\, dx,$$

Démonstration. Par intégration par partie le terme

$$\int_0^s \int_0^1 \exp(-t)\, u(x,t) \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, dx$$

par rapport à t, et en utilisant des $\epsilon-$inégalités, on obtient le résultat. ■

Proposition 5 *L'opérateur L est fermable dont sa fermeture est notée par $\overline{L}$.*

Définition 6 *La solution de l'équation $\overline{L}u = \mathcal{F}$ est dite solution forte du problème (87)-(90).*

4.2 Estimation à Priori et Ses Conséquences

Théorème 8 *Il exist une constante positive $c > 0$, telle que pour toute fonctions $u \in D(L)$, on a*

$$\|u\|_E \leq c \|Lu\|_F . \tag{94}$$

Démonstration. On prend le produit scalaire dans l'espace $L^2(\Omega)$, de l'équation (87) et l'opérateur intégrodifferentiel

$$Mu = \sum_{i=1}^{i=2} (-1)^i \frac{K_i(x)}{a} t \exp(-\lambda t) \int_0^x K_{3-i}(\zeta) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta, t)\, d\zeta, \tag{95}$$

avec $\lambda > 0$, puis prenant la partie réelle, on obtient la forme quadratique

$$\Phi(u, u) = \operatorname{Re} \int_\Omega \pounds u \overline{Mu} dxdt. \tag{96}$$

En substituant l'expression de Mu dans (96), on trouve

$$\Phi(u, u) = \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{i=2} (-1)^i \int_\Omega t \frac{K_i(x)}{a} \exp(-\lambda t) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \int_0^x K_{3-i}(\zeta) \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta, t)} d\zeta dxdt$$

$$+ \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{i=2} (-1)^i \int_\Omega \frac{K_i(x)}{a} t \exp(-\lambda t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \int_0^x K_{3-i}(\zeta) \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta, t)} d\zeta dxdt. \tag{97}$$

En intégrant chaque terme par parties du membre droit de (97), par rapport à x, et en utilisant les conditions (90), on obtient

$$\Phi(u, u) = -\operatorname{Re} \int_\Omega tH(x) \exp(-\lambda t) \frac{\partial u}{\partial t} \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}} dxdt$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{i=2} \int_\Omega \frac{t \exp(-\lambda t)}{a K_i^2(x)} \left[H(x) + (-1)^i \frac{K_1 K_2}{a} \frac{\partial a}{\partial x} \right] \left| \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta, t)\, d\zeta \right|^2 dxdt$$

$$+ \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{i=2} (-1)^i \int_\Omega t \exp(-\lambda t) \left[\frac{d^2 K_{3-i}}{dx^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K_{3-i}(x)}{a} \frac{\partial a}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial t} \int_0^x K_{3-i}(\zeta) \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta, t)} d\zeta dxdt. \tag{98}$$

Intégrons le premier terme dans le membre de droite de (98) par rapport à t, et en tenant en compte des conditions (88),(89), on obtient

$$-\operatorname{Re} \int_\Omega tH(x) \exp(-\lambda t) \frac{\partial u}{\partial t} \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}} dxdt = \int_\Omega tH(x) \exp(-\lambda t) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(2\lambda-\lambda^{2}t\right)H\left(x\right)\exp\left(-\lambda t\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dxdt+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left(1-\lambda t\right)H\left(x\right)\exp\left(-\lambda t\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dx\Bigg|_{t=0}^{t=T}$$

$$+\operatorname{Re}\int_{0}^{1}H\left(x\right)t\exp\left(-\lambda t\right)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}}dx\Bigg|_{t=0}^{t=T}. \tag{99}$$

De (99), l'égalité (98) sera

$$\frac{1}{2}\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{i=2}\int_{\Omega}\frac{t\exp\left(-\lambda t\right)}{aK_{i}^{2}\left(x\right)}\left[H\left(x\right)+\left(-1\right)^{i}\frac{K_{1}K_{2}}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right]\exp\left(-\lambda t\right)\left|\int_{0}^{x}K_{i}\left(\zeta\right)\frac{\partial^{3}u}{\partial t^{3}}\left(\zeta,t\right)d\zeta\right|^{2}dxdt$$

$$+\int_{\Omega}tH\left(x\right)\exp\left(-\lambda t\right)\left|\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}\right|^{2}dxdt+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}H\left(x\right)\left(2\lambda-\lambda^{2}t\right)\exp\left(-\lambda t\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dxdt$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left(1-\lambda t\right)H\left(x\right)\exp\left(-\lambda t\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dx\Bigg|_{t=T}+\operatorname{Re}\int_{0}^{1}H\left(x\right)t\exp\left(-\lambda t\right)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\chi}dx\Bigg|_{t=T}=$$

$$\operatorname{Re}\int_{\Omega}t\exp\left(-\lambda t\right)\pounds u\overline{Mu}dxdt+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}H\left(x\right)\left|\psi\right|^{2}dx+$$

$$+\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{i=2}\left(-1\right)^{i}\int_{\Omega}t\left[\frac{d^{2}K_{3-i}}{dx^{2}}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K_{3-i}\left(x\right)}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)\right]\exp\left(-\lambda t\right)\frac{\partial u}{\partial t}\int_{0}^{x}K_{3-i}\left(\zeta\right)\overline{\frac{\partial^{3}u}{\partial t^{3}}\left(\zeta,t\right)}d\zeta dxdt. \tag{100}$$

il est facile devoir que

$$-\int_{0}^{1}\frac{\left|\lambda\right|T}{2}H\left(x\right)\exp\left(-\lambda T\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dx\Bigg|_{t=T}-\int_{0}^{1}\frac{T}{\left|\lambda\right|}H\left(x\right)\exp\left(-\lambda T\right)\left|\chi\right|^{2}dx$$

$$\leq\operatorname{Re}\int_{0}^{1}H\left(x\right)t\exp\left(-\lambda t\right)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}}dx\Bigg|_{t=T}.$$

On choisit λ de telle sorte que $1-2\lambda T\geq\lambda_{0}>0$, alors, de (91), et l'inégalités précédente, (100) devient

$$\frac{1}{2}\frac{\exp\left(-\lambda T\right)}{a_{1}k_{1}^{2}}\left(m_{0}-\frac{k_{1}^{2}b}{a_{0}}\right)\sum_{i=1}^{i=2}\int_{\Omega}t\left|\int_{0}^{x}K_{i}\left(\zeta\right)\frac{\partial^{3}u}{\partial t^{3}}\left(\zeta,t\right)d\zeta\right|^{2}dxdt+m_{0}\exp\left(-\lambda T\right)\int_{\Omega}t\left|\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}\right|^{2}dxdt$$

$$+\frac{\left(2\lambda-\lambda^{2}T\right)m_{0}}{2}\exp\left(-\lambda T\right)\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dxdt+\frac{\left(1-2\lambda T\right)m_{0}}{2}\exp\left(-\lambda T\right)\int_{0}^{1}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dx\Bigg|_{t=T}\leq$$

$$\int_{\Omega}t\left|\pounds u\right|\left|Mu\right|dxdt+\frac{m_{1}}{2}\int_{0}^{1}\left|\psi\right|^{2}dx+\frac{Tm_{1}}{2\lambda}\int_{0}^{1}\left|\chi\right|^{2}$$

$$+m\sum_{i=1}^{i=2}\int_{\Omega}t\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\left|\int_{0}^{x}K_{3-i}\left(\zeta\right)\frac{\partial^{3}u}{\partial t^{3}}\left(\zeta,t\right)d\zeta\right|dxdt. \tag{101}$$

On pose

$$\alpha = \min\left(\frac{1}{2a_1k_1^2}\left(m_0 - \frac{k_1^2 b}{a_0}\right),\ \frac{3}{2}m_0,\ \frac{\lambda_0 m_0}{2},\ m_0\right)\exp\left(\frac{1-\lambda_0}{2}\right),$$

alors, l'inégalité (101) devient

$$\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt + \int_\Omega t\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt$$

$$+\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\Bigg|_{t=T} \leq$$

$$\frac{1}{\alpha}\int_\Omega t\,|\pounds u|\,|Mu|\,dxdt + \frac{m_1}{2\alpha}\int_0^1|\psi|^2\,dx + \frac{Tm_1}{2\lambda\alpha}\int_0^1|\chi|^2$$

$$+\frac{m}{\alpha}\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\left|\int_0^x K_{3-i}(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\right|dxdt.$$

En utilisant l'inégalité de Young dans le membre droit de l'inégalité précédente, on obtient

$$\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt + \int_\Omega t\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt$$

$$+\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\Bigg|_{t=T} \leq$$

$$4\left(\frac{h}{\alpha a_0}\right)^2\int_\Omega t\,|f|^2\,dxdt + \frac{m_1}{\alpha}\int_0^1|\psi|^2\,dx + \frac{Tm_1}{\lambda\alpha}\int_0^1\left(|\chi|^2\right) + 4\frac{m^2}{\alpha^2}\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt. \quad (102)$$

De (102) et du lemme (1), on obtient

$$\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt + \int_\Omega t\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt + \int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \leq$$

$$\beta\left(\int_\Omega t\,|f|^2\,dxdt + \int_0^1\left(|\varphi|^2 + |\psi|^2 + |\chi|^2\right)dx\right). \quad (103)$$

avec

$$\beta = \max\left(4\left(\frac{h}{\alpha a_0}\right)^2,\ \frac{m_1}{\alpha},\ \frac{m_1}{\lambda\alpha}\right)\max(1,T)\,e^{\frac{4m^2}{\alpha}T}.$$

de (103) et du lemme (9), on déduit

$$\sup_t\int_0^1\left|u(x,t)\,d\zeta\right|^2 dx \leq$$

$$e^T(\beta+1)\left(\int_\Omega t\,|f|^2\,dxdt+\int_0^1\left(|\varphi|^2+|\psi|^2+|\chi|^2\right)dx\right). \tag{104}$$

Combinons l'inégalité (103) avec (104), on obtient

$$\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt+\int_\Omega t\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt$$

$$\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt+\sup_t\int_0^1|u(x,t)|^2\,dx\leq$$

$$\left(e^T(\beta+1)+\beta\right)\left(\int_\Omega t\,|f|^2\,dxdt+\int_0^1\left(|\varphi|^2+|\psi|^2+|\chi|^2\right)dx\right), \tag{105}$$

En vertu de l'équation (87) et l'inégalité (105), on déduit

$$\sum_{i*1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\int_0^x K_i\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial t}\right)d\zeta\right|^2 dxdt\leq$$

$$\left(2\left(e^T(\beta+1)+\beta\right)+4k_1^2\right)\left(\int_\Omega t\,|f|^2\,dxdt+\int_0^1\left(|\varphi|^2+|\psi|^2+|\chi|^2\right)dx\right). \tag{106}$$

Et en combinant (105) avec (106) pour déduire (94) avec $c^2=2\left(e^T(\beta+1)+\beta\right)+4k_1^2$. ■

Lemme 10 *L'operateur L de E dans F est fermable, sa fermeture notée par $\overline{L}$.*

Soit $\overline{L}$ la fermeture de L, et $D(\overline{L})$ le domaine de définition de $\overline{L}$.

Définition 7 *la solution de l'équation $\overline{L}u=\mathcal{F}$ est dite solution forte du problème (87, 90).*

Comme les points du graphe de l'opérateur $\overline{L}$ sont limites des suites des points du graphe de l'opérateur L, on peut prolonger l'inégalité (94), en passant à la limite

$$\|u\|_E\leq c\left\|\overline{L}u\right\|_F \qquad \forall u\in D(\overline{L}). \tag{107}$$

Corollaire 5 *La solution forte du problème (87, 90) si elle existe, elle est unique et dépend continûment du $\mathcal{F}$.*

Corollaire 6 *L'ensemble des valeurs $R\left(\overline{L}\right)$ de l'opérateur $\overline{L}$ est égale à la fermeture $\overline{R(L)}$ de $R(L)$.*

4.3 Résolubilité du Problème

De l'inégalité (107) résulte que l'opérateur $\overline{L}$ admet un inverse borné $\overline{L}^{-1}$, du corollaire (6) on déduit que $R\left(\overline{L}\right)$ est fermé. Pour montrer l'existence de la solution forte du problème (87)-(90), il suffit de montrer la densité de l'image de l'opérateur. La démonstration est basée sur le :

Lemme 11 *Supposons que la fonction $a(x,t)$ et ses dérivées $\dfrac{\partial^3 a}{\partial t^2 \partial x}$, $\dfrac{\partial a}{\partial t \partial x}$ sont bornées, et les fonctions $K_i(x)$ satisfont aux conditions*

$$\begin{cases} K_2(1)\dfrac{dK_1(1)}{dx} - K_1(1)\dfrac{dK_2(1)}{dx} \neq 0, \\ \Delta = \sum_{i=1}^{i=2}(-1)^i \int_0^1 K_i(x)\,dx \int_0^x K_{3-i}(\gamma)\int_0^\gamma \dfrac{d\gamma}{(1-\zeta)\,a(\zeta,t)} \neq 0. \end{cases} \tag{108}$$

Soit $D_0(L) = \left\{u \in D(L),\ u(x,0)=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,T)=0\right\}$. *Si, pour* $u \in D_0(L)$ *et pour certaines fonctions* $w \in L^2(\Omega)$ *on a*

$$\int_\Omega (1-x)^2\, \pounds u \overline{w} dxdt = 0, \tag{109}$$

alors $w = 0$.

Démonstration. Substituant $\pounds u$ dans l'égalité (109) par son expréssion, on obtient

$$\int_\Omega (1-x)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\overline{w}dxdt = -\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left((1-x)\,a\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right)\left((1-x)\,\overline{w} - \int_0^x \overline{w}d\zeta\right)dxdt, \tag{110}$$

pour la fonction $w(x,t)$ donnée, on construit la fonction $v(x,t)$ tel que

$$(1-x)\,w - \int_0^x w d\zeta = \int_0^x \frac{d\zeta}{1-\zeta}\left(\frac{dK_2}{d\zeta}\int_0^\zeta K_1 v d\tau - \frac{dK_2}{d\zeta}\int_0^\zeta K_1 v d\tau\right) = v_1.$$

De l'égalité précédente, on déduit

$$\int_0^1 K_i v dx = 0 \qquad i = 1,2, \tag{111}$$

ceci nous permet d'écrire (110), sous la forme

$$\int_\Omega \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\overline{Nv}dxdt = \sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega A(t)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{v_1}dxdt, \tag{112}$$

avec

$$A(t)u = -\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x)\,a\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$Nv = K_2\int_0^x K_1 v d\zeta - K_1\int_0^x K_2 v = (1-x)^2\,w.$$

L'opérateur $A(t)$ est inversible dans l'espace $L^2(0,1)$, son inverse est borné et est donné par

$$A^{-1}(t)\,g = -\int_0^x \frac{1}{1-\zeta}\frac{1}{a(\zeta,t)}\int_0^\zeta g(\eta,t)\,d\eta$$
$$+C_1(t)\int_0^x \frac{1}{1-\zeta}\frac{d\zeta}{a(\zeta,t)} + C_2(t),$$

avec

$$A^{-1}(t)\,g = \int_0^x \frac{1}{1-\zeta}\frac{1}{a(\zeta,t)}\int_0^\zeta g(\eta,t)\,d\eta$$
$$+C_1(t)\int_0^x \frac{1}{1-\zeta}\frac{d\zeta}{a(\zeta,t)} + C_2(t),$$

où les constantes $C_1(t)$ et $C_2(t)$ sont donées par

$$C_1(t) = \frac{\sum_{i=1}^{i=2}(-1)^i\int_0^1 K_i dx\int_0^1 K_{3-i}dx\int_0^x \frac{d\zeta}{(1-\zeta)\,a(\zeta,t)}\int_0^\zeta g(\eta,t)\,d\eta}{\Delta},$$

et

$$C_2(t) = \frac{\sum_{i=1}^{i=2}(-1)^{i-1}\int_0^1 K_i dx\int_0^x \frac{d\zeta}{(1-\zeta)\,a(\zeta,t)}\times\int_0^1 K_{3-i}dx\int_0^x \frac{d\zeta}{(1-\zeta)\,a(\zeta,t)}\int_0^\zeta g(\eta,t)\,d\eta}{\Delta}.$$

Alors, on déduit que $\int_0^1 K_i(x)\,A^{-1}(t)\,g dx = 0$, de plus la fonction $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\epsilon = J_\epsilon^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ a une représentation de la forme $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\epsilon = J_\epsilon^{-1}A^{-1}A(t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$. Remplaçons la fonction $\frac{\partial u}{\partial t}$ dans (112) par sa fonction régularisée $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\epsilon$, en prenant en compte la relation

$$A(t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\epsilon = J_\epsilon^{-1}A\frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon\beta(t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\epsilon,$$

$$\beta(t)\,u_\epsilon = 3\frac{\partial^2 A(t)}{\partial t^2}\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} + 3\frac{\partial A(t)}{\partial t}\frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 A(t)}{\partial t^3}u_\epsilon,$$

on obtient

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}N\overline{\frac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial t^2}}dxdt = \sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega\left(A(t)\,\frac{\partial u}{\partial t}\overline{(v_1)_\varepsilon^*} + \varepsilon\beta_\varepsilon(t)\,\frac{\partial u}{\partial t}\overline{(v_1)_\varepsilon^*}\right)dxdt. \qquad (113)$$

avec

$$\beta(t)\,g = \frac{\partial^3 a}{\partial t^2 \partial x} J_\varepsilon^{-1} \frac{1}{a}\left(\int_0^x g(\eta,t) - C_1(t)\right)$$
$$+\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} J_\varepsilon^{-1}\left(\frac{g}{a} - \frac{a_x}{a^2}\left(\int_0^x g(\eta,t)\,d\eta - C_1(t)\right)\right)$$
$$+2\frac{\partial^2 a}{\partial t \partial x}\frac{\partial}{\partial t} J_\varepsilon^{-1}\frac{1}{a}\left(\int_0^x g(\eta,t) - C_1(t)\right)$$
$$+2\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\, J_\varepsilon^{-1}\left(\frac{g}{a} - \frac{a_x}{a^2}\left(\int_0^x g(\eta,t)\,d\eta - C_1(t)\right)\right)\Bigg].$$

dont l'adjoint est donné par

$$\beta_\varepsilon^*(t)\,h = \frac{1}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} h - \frac{2}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a}{\partial t} h\right)$$
$$+ (G_\varepsilon h)(x) + K(t)\,(G_\varepsilon h)(1),$$

où

$$(G_\varepsilon h)(x) = \int_0^x \left[\frac{-1}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*\left(\frac{\partial^3 a}{\partial t^2 \partial \zeta} h\right) + \frac{\partial a}{\partial \zeta}\frac{1}{a^2}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*\left(\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} h\right)\right.$$
$$\left. + \frac{2}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial t \partial \zeta} h\right) + \frac{2\partial a}{\partial \zeta}\frac{1}{a^2}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a}{\partial t} h\right)\right] d\zeta,$$

et

$$K(t) = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{i=2}(-1)^i \int_0^1 K_i(x)\,dx \int_0^1 K_{3-i}(x) \int_x^1 \frac{d\zeta}{(1-\zeta)\,a} - \int_x^1 \frac{d\zeta}{(1-\zeta)\,a}\int_0^\zeta K_{3-i}(\eta)\,d\eta.$$

Par conséquent, l'égalité (112) devient

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\overline{N\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}\,dxdt = -\int_\Omega A(t)\,\frac{\partial u}{\partial t}\overline{h_\varepsilon}\,dxdt, \tag{114}$$

avec $h_\varepsilon = \overline{(v_1)_\varepsilon^*} - \varepsilon\beta_\varepsilon^*(t)\,\overline{(v_1)_\varepsilon^*}$.

Le terme $\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\overline{N\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}\,dxdt$ est une forme linéaire continue en $\frac{\partial u}{\partial t}$. Donc la fonction h_ε admet des dérivées $(1-x)\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x)\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}\right) \in L^2(\Omega)$, de plus on a les conditions suivantes :

$$h_\varepsilon|_{x=0} = 0,\ \left.\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ (1-x)\left.\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}\right|_{x=1} = 0.$$

De l'égalité

$$(1-x)\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x} = \sum_{i=1}^{i=2}\left[I - \frac{\varepsilon}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}\right](1-x)\frac{\partial (v_1)_\varepsilon^*}{\partial x}$$

$$+\sum_{i=1}^{i=2}\frac{2\varepsilon}{a}\left(J_{\varepsilon}^{-1}\right)^{*}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a}{\partial t}\left(1-x\right)\frac{\partial\left(v_{1}\right)_{\varepsilon}^{*}}{\partial x}\right),$$

et comme l'opérateur $\left(J_{\varepsilon}^{-1}\right)^{*}$ est borné dans $L^{2}\left(\Omega\right)$, donc pour ε suffisamment petit, on déduit que $\left\|\frac{\varepsilon}{a}\left(J_{\varepsilon}^{-1}\right)^{*}\frac{\partial^{3}a}{\partial t^{3}}\right\|<1$. Alors l'opérateur $I-\frac{\varepsilon}{a}\left(J_{\varepsilon}^{-1}\right)^{*}\frac{\partial^{3}a}{\partial t^{3}}$ admet un inverse borné dans $L^{2}\left(\Omega\right)$. Donc en déduit que $\left(1-x\right)\frac{\partial\left(v_{1}\right)_{\varepsilon}^{*}}{\partial x}\in L^{2}\left(\Omega\right)$.

De la même manière on obtient que $\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1-x\right)\frac{\partial\left(v_{1}\right)_{\varepsilon}^{*}}{\partial x}\right)\in L^{2}\left(\Omega\right)$, et les conditions suivantes sont vérifieés

$$\left(v_{1}\right)_{\varepsilon}^{*}\big|_{x=0}=0,\ \left.\frac{\partial\left(v_{1}\right)_{\varepsilon}^{*}}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ \left(1-x\right)\left.\frac{\partial\left(v_{1}\right)_{\varepsilon}^{*}}{\partial x}\right|_{x=1}=0. \tag{115}$$

posons $u=\int_{0}^{t}\int_{0}^{\eta}\int_{\zeta}^{T}\exp\left(\lambda\tau\right)v_{\varepsilon}^{*}d\tau d\zeta d\eta$ dans l'égalité (112), avec la constante $\lambda>0$, on obtient

$$\int_{\Omega}\exp\left(\lambda\tau\right)v_{\varepsilon}^{*}\overline{Nv}dxdt=-\sum_{i=1}^{i=2}\int_{\Omega}A\left(t\right)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{v_{1}}dxdt. \tag{116}$$

En utilisant les proprietés des opérateurs de régularisation, on obtient

$$\int_{\Omega}\exp\left(\lambda\tau\right)v_{\varepsilon}^{*}\overline{Nv}dxdt=-\int_{\Omega}A\left(t\right)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\left(v_{1}\right)_{\varepsilon}^{*}}dxdt+\epsilon\sum_{i=1}^{i=2}\int_{\Omega}A\left(t\right)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^{2}\overline{\left(v_{1}\right)_{\varepsilon}^{*}}}{\partial t^{2}}dxdt. \tag{117}$$

Intégrons le premier terme du membre droit de (117) par rapport à x, et en utilisant les conditions (115), on obtient

$$-\operatorname{Re}\int_{\Omega}A\left(t\right)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\left(v_{1}\right)_{\varepsilon}^{*}}dxdt=\operatorname{Re}\int_{\Omega}aH\left(x\right)\exp\left(-\lambda t\right)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\frac{\partial^{3}u}{\partial t^{3}}}dxdt$$

$$+\operatorname{Re}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{d^{2}K_{2}}{dx^{2}}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\int_{0}^{x}K_{1}\ \overline{v_{\varepsilon}^{*}}d\zeta dxdt-\operatorname{Re}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{d^{2}K_{1}}{dx^{2}}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\int_{0}^{x}K_{2}\ \overline{v_{\varepsilon}^{*}}d\zeta dxdt.$$

De nouveau, intégrons le premier terme dans le membre droit de l'égalité précédente par rapport à t, on obtient

$$\operatorname{Re}\int_{\Omega}aH\left(x\right)\exp\left(-\lambda t\right)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\frac{\partial^{3}u}{\partial t^{3}}}dxdt=-\int_{\Omega}H\left(x\right)a\exp\left(-\lambda t\right)\left|\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}\right|^{2}dxdt$$

$$+\int_{\Omega}\frac{H\left(x\right)}{2}\left(\frac{\partial^{2}a}{\partial t^{2}}-2\lambda\frac{\partial a}{\partial t}+\lambda^{2}a\right)\exp\left(-\lambda t\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dxdt$$

$$-\left.\int_{0}^{1}\frac{H\left(x\right)}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial t}-\lambda a\right)\exp\left(-\lambda t\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dx\right|_{t=T}.$$

Supposons que

$$\begin{cases} c_i' \leq \dfrac{\partial^i a}{\partial t^i} \leq c_i, \quad i = \overline{1,2}, c_1' \geq 0, \\ \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{dK_2}{dx}\right)\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{dK_1}{dx}\right)\right|^2 \leq \mu^2. \end{cases}$$

Et si on choisit λ tel que

$$\begin{cases} 0 < \alpha_0 \leq c_1' - \lambda a_1, \\ c_2' - 2\lambda c_1 + \lambda^2 a_0 > 0, \\ \dfrac{m\left(c_2 - 2\lambda c_1' + \lambda^2 a_1\right)}{2} + \dfrac{\mu^2}{m_0} \leq \delta \text{ avec } \delta > 0, \end{cases}$$

alors

$$-\operatorname{Re}\int_\Omega A(t)\, u\overline{v_\varepsilon^*}dxdt + \alpha_0 e^{-\lambda T}\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\Bigg|_{t=T} \leq \delta\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt$$

$$\frac{m_0}{4}\int_\Omega \left|\int_0^x K_2 v_\varepsilon^* d\zeta\right|^2 dxdt + \frac{m_0}{4}\int_\Omega \left|\int_0^x K_1 v_\varepsilon^* d\zeta\right|^2 dxdt. \tag{118}$$

En intégrant le second terme dans le membre droit de (117) par rapport à x, on trouve

$$\epsilon\operatorname{Re}\int_\Omega A(t)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2\overline{(v_1)_\varepsilon^*}}{\partial t^2}dxdt = \epsilon\operatorname{Re}\int_\Omega H(x)\frac{\partial u}{\partial t}a\frac{\partial^2\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t^2}dxdt$$

$$+\epsilon\operatorname{Re}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{dK_2}{dx}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\int_0^x K_1\frac{\overline{\partial^2 v_\varepsilon^*}}{\partial t^2}d\zeta dxdt + \epsilon\operatorname{Re}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{dK_1}{dx}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\int_0^x K_2\frac{\overline{\partial^2 v_\varepsilon^*}}{\partial t^2}d\zeta dxdt,$$

et en utilisant des $\epsilon-$inequalities dans l'égalité précédente, on obtient

$$-\epsilon\operatorname{Re}\int_\Omega A(t)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^3\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t^3}dxdt \leq \epsilon\left(\frac{m^2}{2}a_1^2 + \frac{\eta^2}{2}\right)\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \epsilon\left(k_1^2 + \frac{1}{2}\right)\int_\Omega \left|\frac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial t^2}\right|^2 dxdt. \tag{119}$$

De (118), (119) et les propriétés des opérateurs de régularisation, l'égalité (117) devient

$$\operatorname{Re}\int_\Omega \exp(\lambda\tau)\, v\overline{Nv}dxdt - \frac{m_0}{4}\int_\Omega \left|\int_0^x K_1 v d\zeta\right|^2 dxdt$$

$$-\frac{m_0}{4}\int_\Omega \left|\int_0^x K_1 v d\zeta\right|^2 dxdt + \alpha_0 e^{-\lambda T}\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\Bigg|_{t=T} \leq$$

$$\left(m + \epsilon\left(\frac{m^2}{2}a_1^2 + \frac{\eta^2}{2}\right)\right)\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \epsilon\left(k_1^2 + \frac{1}{2}\right)\int_\Omega \left|\frac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial t^2}\right|^2 dxdt$$

$$+\frac{m_0 k_1^2}{4}\int_\Omega \left|v_\varepsilon^* - v\right|^2 dxdt + \int_\Omega \exp(\lambda\tau)\left|v_\varepsilon^* - v\right|\left|Nv\right| dxdt. \tag{120}$$

Substituons l'expression de Nv dansRe $\int_\Omega \exp(\lambda\tau)\, v\overline{Nv}dxdt$, on obtient

$$\mathrm{Re}\int_\Omega \exp(\lambda\tau)\, v\overline{Nv}dxdt =$$

$$\mathrm{Re}\int_\Omega \exp(\lambda\tau)\, K_2 v\int_0^x K_1 v d\zeta dxdt - \mathrm{Re}\int_\Omega \exp(\lambda\tau)\, K_1 v\int_0^x K_2 v d\zeta dxdt,$$

par intégration par rapport à x, et en tennant en compte les conditions (115), on aura

$$\mathrm{Re}\int_\Omega \exp(\lambda\tau)\, v\overline{Nv}dxdt =$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega H(x)\exp(\lambda\tau)\left|\int_0^x K_2 v d\zeta\right|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega H(x)\exp(\lambda\tau)\left|\int_0^x K_1 v d\zeta\right|^2 dxdt.$$

En combinant l'égalité précédente avec (120) et on utilise le lemme (1), on déduit

$$\frac{m_0}{4}\int_\Omega\left|\int_0^x K_1 v d\zeta\right|^2 dxdt + \frac{m_0}{4}\int_\Omega\left|\int_0^x K_2 v d\zeta\right|^2 dxdt \leq 0 \text{ as } \varepsilon \to 0. \tag{121}$$

alors, de (121), on conclut

$$\int_\Omega\left|\int_0^x K_i v d\zeta\right|^2 dxdt \leq 0, i = 1, 2.$$

donc $\int_0^x K_i v d\zeta = 0$, $\forall (x,t) \in [0,1]\times[0,T] \Longrightarrow v = 0$ i-e. $w = 0$ a.e. ■

Théorème 9 *L'image $R(\overline{L})$ de $\overline{L}$ coïncide avec F.*

Démonstration. On a $R(\overline{L}) = F \iff R(\overline{L})^T = 0_F$. Comme F est un espace de Hilbert, alors $R(\overline{L}) = F$ si et seulement si

$$\int_\Omega tf\overline{g}dxdt+$$

$$\int_0^1 \varphi\overline{\varphi_1}dx + \int_0^1 \psi\overline{\psi_1}dx + \int_0^1 \chi\overline{\chi_1}dx = 0, \tag{122}$$

pour un $u \in D(L)$ quelconque et $\mathcal{F} = (g,\ \varphi_1,\ \psi_1,\ \chi_1) \in F$ implique $\mathcal{F} = 0_F$. prenons $u \in D_0(L)$ dans (122), on obtient $\int_\Omega tf\overline{g}dxdt = 0$, utilisons maintenant le lemme (11), on aboutir à $(1-x)^2 w = tg = 0$, alors $g = 0$.

Par conséquent pour $u \in D(L)$ on a

$$\int_0^1 \varphi\varphi_1 dx + \int_0^1 \psi\overline{\psi_1}dx + \int_0^1 \chi\overline{\chi_1}dx = 0,$$

comme l'image de l'opérateur trace est dense dans l'espace de Hilbert munit de la norme

$$\int_0^1 |\varphi|^2 \, dx + \int_0^1 |\psi|^2 \, dx + \int_0^1 |\chi|^2 \, dx,$$

alors $\varphi_1 = \psi_1 = \chi_1 = 0$. ■

Références

[1] Barenblat, G. I. Yu. P., Kochina, I. V., Basic concepts in the theory of seepage of homogeneons liquids in fissured rocks [strata], PMM J.App.Math. Mech., 24, 5 (1960), pp.852-864.

[2] Batten G. W. Jr., *Second-order correct boundary conditions for the numerical solution of mixed boundary problem for parabolic equations*, Math. Comp., **17** (1963), 405-413.

[3] Benouar N. E., Yurchuk N. I., *Mixed problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator*, Differ. Equ., **27** (1991), 12, 1482-1487.

[4] Bouziani A., Benouar N. E., *Mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation*, Kobe J. Math., **15** (1998), 47-58.

[5] Cahlon B., Kulkarni D. M. and Shi P., *Stepwise stability for the heat equation with nonlocal constraint*, SIAM J. Numer. Anal., **32** (1995), 2, 571-593.

[6] Cannon J. R., *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*, Quart. Appl. Math., **21** (1963), 155-160.

[7] Cannon J. R., *The One-dimensional heat equation*, Encyclopedia of Mathematics ant its Applications, vol. 23, Addison-Wesley Publishing, Massachusets, (1984).

[8] Cannon J. R., Lin, Classical and weak solution for one-dimensional Pseudo-Parabolic Equations with Typical boundary Data. Ann. Math. Puraed app., 152, pp. 375-385, 1998.

[9] Chudnovski,A. F., Soil Thermophysics, Nauka, Mosocow(1976).

[10] Denche M., Marhoune A. L., A Three- point Boundary Value Problem with an Integral condition for Parabolic Equation with the Bessel operator, Applied Matimatics Letters, Vol. 13(2000), 16, pp.85-89.

[11] Denche M., Marhoune A. L., *High order mixed-type differential equations with weighted integral boundary conditions*, Electron. J. Differential. Equations **2000** (2000), no. 60, 1-10.

[12] Denche M., Marhoune A. L., *Mixed problem with nonlocal boundary conditions for a third order partial differential equation of mixed type*, Int. J. Math. Math. Sci., **26** (2001), no. 7, 417-426.

[13] Denche M., Memou A., Boundary value problem with integral conditions for a linear third order equation. J. Applied Math. 2003, 11(2003), pp.553-567.

[14] Dezin, A. A., General questions in theory of boundary value problems, Mosocow-Nauka, 1980, English trans, Springer Verlag.

[15] Dezin, A. A., Theoremes d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionelles. Usp. Math. Naouk, T.14, 3(87), pp. 22-73.

[16] Friedricks, K., Symmetric hyperbolic linear differential equations. comm. Pure. Appl. Math. Vol. 7. 2, pp. 345-392, (1954).

[17] Garding, L.,Cauchys problem for hyperbolic equations of chicago, Lecture notes, 1957.

[18] Ionkin, N. I.,.Solution of a boundary value problem in heat conduction with a non classical boundary condition, diffrentialnye Uravneniya, 13(1977), 294-304.

[19] Kamynin, N. I., A Boundary value problem in the theory of the heat conduction with non classical boundary condition, U S S R. Comut. Math. and Math. Phys., 4(1966), 33-59.

[20] Kartynnik, A. V., Three-point boundary value problem with an integral space variable condition for a second order parabolic equation, Diffential Equation, 26(1990), 1160,1166.

[21] Ladyzenskaja, O. A., Mixed Problem for hyperbolic equation. Edition Mir Nauka, 1974.

[22] Latrous, C., Memou, A., A Three- point Boundary Value Problem with an Integral condition for a third order partial differential equation, Abstract and Applied Analysis, 2005, 1, 33-43.

[23] Leray, J., Lecture on hyperbolic differential equations with variable coefficients. Princeton, Just for Adv. Study, 1952.

[24] Petovsky, I. G., Uber das cauchyshe problem fur system von linearm partiallen diferentialgeichungen in Gebit der nichtanalystischen funktionen, Bull. Univ. detat, Moscow, 7, 1-74, 1938.

[25] Pulkina L. S., *A non-local problem with integral conditions for hyperbolic equations*, Electron. J. Differential Equations, **1999** (1999), no. 45, 1-6.

[26] Rebbani, F., Chesalyn, V. I., Problemes aux limites pour des équations différentielles d'ordre impaire dans le rectangle. Izvestia Akad. Nawk BSSR, Série Phys. Math. Nawk 3, 1985.

[27] Rebbani, F., Chesalyn, V. I., Problemes aux limites pour certaines équations différentielles opérationelles dans le rectangle. Dokday Acad. Nawk. BSSR. T. 30, 12, pp. 1061-1063.

[28] Samarski A. A., *Some problems in the modern theory of differential equations*, Differ. Uravn., **16** (1980), 1221-1228 (Russian).

[29] Shi P., Design of Contact Patterns in one dimentional Thermoelasticity, in Theoritical Aspect of Industrial Design, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1992.

[30] Shi P., *Weak solution to evolution problem with a nonlocal constraint*, SIAM J. Math. Anal., **24** (1993), 1, 46-58.

[31] Shkhanukov, M.KH., Boundary value Problem for thierd order equation occurring in the modeling of mater filtration in Porous midia, Diff. Eqs., 18, 4(1982), pp. 689-699.

[32] Showalter, R. E., Ting, T W., Pseudo Parabolic partial differential equations, SIAM J. Math. Anal., 1(1970), pp. 1-26.

[33] Sobolev, S L., Certaines applications de l'analyse fonctionelle à la physique Mathématique, LENINGRAD, 1950.

[34] Vodakhova, V. A., A boundary value problem with A. M. Nakhushevs nonlocal condition for a pseudoparabolic moisture transfer equation, Diff. Eqs., 18,2(1982). pp. 285-285.

[35] Volkodavov V. F., Zhukov V. E., *Two problems for the string vibration equation with integral conditions and special matching conditions on the characteristic*, Differ. Equ., **34** (1998), 4, 501-505.

[36] Yurchuk, N. I., Boundary value problem for equations whose principal part contains operators of the form. Diff. Equa. Vol. 10. 4, pp. 589-592., 1974.

[37] Yurchuk N. I., *Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations*, Differ. Equ., **22** (1986), 1457-1463.

[38] Yurchuk, N. I., Boundary value problem for equations involving operators of the forme. Diff. Equa. Vol. 10, 5, pp. 735-737,1974.