Nous construisons un régularisateur en utilisant le problème de minimisation suivant :

$$\min \left(\|Av - y\|_Y^2 - \alpha \Gamma (v) \right) \quad \text{plus de } v \in X_M \tag{2.4.20}$$

Lemme 2.4.1 : Sous la condition additionnelle que $X_{M,\tau}$ est compact dans X pour tout τ, une solution $R_\alpha(y)$ au problème de minimisation (2.4.20) existe, et R_α est un régularisateur.

Preuve. Voire [10] ■

Nous observons que pour l'opérateur linéaire A, l'ensemble convex X, et les fonctionelles fortement convexes Γ les régularisateurs variationnels sont les opérateurs univoques, ainsi tout en haut peut être compris dans un sens plus traditionnel. En effet, dans ces prétentions plus restrictives, les fonctionnels (2.4.20) à réduire au minimum est convexe, ainsi un point minimum est unique. La construction variationnelle est non seulement manière possible de trouver des régilarizers, et il y a une question très importante au sujet d'un choix optimal et normal de la régularisation qui est conforme à l'intuition et qui permet à d'en améliorer la convergence en employant plus d'informations sur le problème (dans la forme de contraintes).

Lemme 2.4.2 : Si X, Y sont les espaces de Hilbert, $x^0 \in X$, et $M(v) = \|v - x^0\|_X^2$, puis le problème de minimisation (2.4.20) a une solution unique $R_\alpha(y)$ qui est un regularisateur de l'équation (0.1.1).

Pour une démonstration voir [10] .

Exemple 2.4.1: Soit $V \in \mathbb{C}^n$, et ψ un opérateur linéaire de $L^2(S, \mathbb{R}, \sigma) \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Nous voulons trouver un $F \in L^2(S, \mathbb{R}, \sigma)$ tel que

$$\psi(F) = V$$

C'est un problème mal-posé, si ψ n'est pas bijectif.

• Nous voulons que F soit positif car il représente la distribution d'énergie de l'onde électromagnétique.

• Il faut utiliser un critère de sélection pour déterminer une solution unique à ce problème.

• Problème de stabilité : la donnée V est bruitée (bruit expérimental).

• La méthode de Tikhonov pour un problème mal-posé consiste à résoudre
$\begin{cases} \min\limits_{F\in K} \|V-\psi(F)\|^2_{\mathbb{C}^n} + \mu\|F\|^2 \text{ , où } K \text{ est l'ensemble des contraintes.} \end{cases}$

• μ est le paramètre de régularisation, il doit être assez grand pour que la solution soit stable mais également assez petit pour que l'erreur soit faible.

• Le paramètre μ doit être choisi en fonction du niveau de bruit.

• Quand $\mu \to 0$ la solution de Tikhonov tend vers la solution obtenue par l'inverse de Moore-Penrose [29].

Exemple 2.4.2: Soit X, Y les espaces de Hilbert avec les produits scalaires $(\ ,\ )_X$, $(\ ,\ )_Y$. Supposons A est un opérateur compact linéaire de X à Y . Soit $\Gamma(x) = \|x - x_0\|^2_X$. Soit $X = X_M$. Dans ce cas une condition nécessaire pour un point minimum $x(\alpha)$ de l'équation quadratique fonctionnelle $q(v) = (Av - y, Av - y)_Y + \alpha(v - x^0, v - x^0)_X$ est $d/dt(q(x(\alpha) + tu)) = 0$ à $t = 0$ pour tout $u \in X$. Calculant cette dérivée, nous obtenons

$$2(Au, Ax(\alpha) - y)_Y + 2\alpha(u, x(\alpha) - x0)_X = 2(u, (A^*A + \alpha)x(\alpha) - \alpha x^0 - A^*y)$$

par la définition de l'opérateur adjoint A^*. Puisque cette dérivée doit être zéro pour tous $u \in X$, nous concluons que $x(\alpha)$ est une solution de l'équation

$$(A^*A + \alpha)x(\alpha) = A^*y + \alpha x^0. \tag{2.4.21}$$

Le lemme 2.4.2 garantit la convergence de $x(\alpha)$ à une solution x de l'équation (0.1.1) quand $\alpha \longrightarrow 0$, à condition que y soit convergent vers Ax. Il est facile d'observer que l'opérateur A^*A est positif et auto-adjoint dans X, ainsi nous avons l'unicité d'une solution $x(\alpha)$ de l'équation (2.4.21) et donc on a l'unicité du minimisateur obtenu dans l'exemple 2.4.2.

Si A lui même est positif et auto-adjoint, alors l'équation (0.1.1) peut être régularisée par l'equation similaire

$$(A + \alpha)x(\alpha) = y. \tag{2.4.22}$$

2.5 Convergence des algorithmes de régularisation

Soit ω une éstimation de stabilité pour l'équation (0.1.1) sur l'ensemble compact $X_\bullet$, qui est défini comme $X_M \cap \{\Gamma(x) \leq \tau/\alpha\}$, où $\tau = \|Ax_\bullet - y\|_Y^2 + \alpha\Gamma(x_\bullet)$ pour certain $x_\bullet \in X_M$, $\Gamma(x) \leq \Gamma(x_\bullet)$. Une telle éstimation de stabilité existe dès que nous aurons l'unicité d'une solution dans X_M. Nous observons que n'importe quelle éstimation de stabilité sur X_M sera une éstimation de stabilité sur son sous-ensemble $X_\bullet$, mais pour l'ensemble $X_\bullet$ nous pouvons s'attendre à une meilleure stabilité.

Lemme 2.5.1: Si R_α est un algorithme de régularisation variationnelle de section 2 . 4, alors

$$\|x^\bullet(\alpha) - x\|_X \leq \omega\left(2\|Ax - y\|_Y + (\alpha\Gamma(x))^{\frac{1}{2}}\right). \tag{2.5.23}$$

pour tout $x^\bullet(\alpha)$ dans l'ensemble de minimisation $x(\alpha)$.

Preuve. On a

$$\|Ax^\bullet(\alpha) - y\|_Y^2 \leq \|Ax^\bullet(\alpha) - y\|_Y^2 + \alpha\Gamma(x^\bullet(\alpha)) \leq \|Ax - y\|_Y^2 + \alpha\Gamma(x)$$

selon la définition de $x(\alpha)$ par minimisation. Par conséquent,

$$\|Ax^\bullet(\alpha) - y\|_Y \leq \|Ax - y\|_Y + (\alpha\Gamma(x))^{1/2}$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$\|Ax^\bullet(\alpha) - Ax\|_Y \leq \|Ax^\bullet(\alpha) - y\|_Y + \|Ax - y\|_Y \leq 2\|Ax - y\|_Y + (\alpha\Gamma(x))^{1/2},$$

et l'inégalité (2.5.23) suit la définition de l'éstimation de stabilité ω. ■

L'éstimation (2.5.23) suggère le choix suivant du paramètre de régularisation. Supposons que nos données y_δ sont données avec l'erreur

$\delta : \|Ax - y_\delta\|_Y \leq \delta$ et nous avons l'information à priori

$$\Gamma(x) \leq M. \tag{2.5.24}$$

Alors nous pouvons choisir $\alpha(\delta) = \delta^2/M$ et obtenir l'éstimation

$$\|x^\bullet(\alpha) - x\|_X \leq \omega(3\delta). \tag{2.5.25}$$

Puisque la stabilité du procédé de minimisation (2.4.21) se détériore quand $\alpha \longrightarrow 0$, nous ne pouvons pas indiquer si cette éstimation reflète la complexité réelle du problème ou si le choix du paramètre de régularisation est optimal.

Ce qui est absent dans cette discussion est comment résoudre le problème de minimisation (2.4.20) . Une maniére constructive pour le faire dans le cas linéaire est de résoudre l'équation (2.4.21). Nous discutons ce problème en plus de détail en supposant que A est un opérateur linéaire compact dans un espace de Hilbert X .

D'abord, soit A un opérateur auto-adjoint, positif et compact. Nous écrivons l'équation (2.4.22) comme

$$(\alpha + A)\left(x + x^{\alpha} + x^{\delta}\right) = y + \left(y^{\delta} - y\right),\ y = Ax,\ \left\|y^{\delta} - y\right\| < \delta, \tag{2.5.26}$$

où x^{δ} solution de l'équation $(\alpha + A)\, x^{\delta} = y^{\delta} - y$. Il est facile de voir que

$$\left\|x^{\delta}\right\|_{X} \leq \delta/\alpha \tag{2.5.27}$$

et $(\alpha + A)\,(x + x^{\alpha}) = y$, ou $(\alpha + A)\, x^{\alpha} = -\alpha x$. L'opérateur auto-adjoint compact A

a une base orthonormale des vecteurs propres a_k correspondant aux valeurs propres λ_k. Nous pouvons supposer $\lambda_k \geq \lambda_{k+1}$. De plus, soit X l'ensemble d'unicité, ainsi $\lambda_k > 0$. Nous posons $x_k = (x, a_k)_X$. Alors l'équation pour x^{α} est $(\alpha + \lambda_k)\, x_k^{\alpha} = -\alpha x_k$, et on a

$$\left\|x^{\alpha}\right\|_X^2 \leq \sum_{k \leq K} \alpha^2 \left(\alpha + \lambda_k\right)^{-2} x_k^2 + \sum_{K<k} x_k^2 \leq \alpha^2 \lambda_K^{-2} \left\|x\right\|_X^2 + \sum_{K<k} x_k^2. \tag{2.5.28}$$

Cette éstimation et l'éstimation (2.5.27) en principe garantissent la convergence de notre procédé de régularisation à ce x particulier. En effet, choisir K assez grand de telle sorte que la somme sur $k > K$ est petite; alors choisir α petit pour rendre le premièr terme petit, et alors choisir δ petit.

Pour obtenir des éstimations, nous considérons l'ensemble X_M défini par les inégalités

$$|x_k| \leq m_k \tag{2.5.29}$$

et soit M_k est $\left(\sum_{K<k} m_k^2\right)^{1/2}$. Nous supposons que la série est convergente. alors M_k tend vers zéro quand K tend vers l'infini. De (2.5.28) on a $\left\|x^{\alpha}\right\|_X^2 \leq \alpha^2 \lambda_K^{-2} M_1^2 + M_K^2$, ainssi

$\|x^{\alpha}\|_X \leq \alpha\lambda_K^{-1}M_1 + M_K$. Maintement, de (2.5.27) on a l'éstimation suivante

$$\|x(\alpha) - x\|_X \leq \alpha M_1/\lambda_k + M_K + \delta/\alpha, \tag{2.5.30}$$

et alors le choix optimal de α dépend de notre contrainte (2.5.29).

Nous allons décrire la méthode de M. Lavrentiève.

2.6 Régularisation de Lavrentiève

Si A est un opérateur auto-adjoint positif, Lavrentiève introduit en parallèle une équation du type

$$\left(\tilde{A} + \alpha I\right) f_\alpha = \tilde{g}.$$

Il choisit le paramètre de régularisation α en fonction de ε de manière à ce que f_α tende vers f quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. Cela est faisable moyennant quelques restrictions.

Plus précisément on a le théorème suivant :

Théorème 2.6.1 : Soit l'opérateur A vérifiant pour tout $\alpha > 0$,

$$\|A + \alpha I\|^{-1} \leq \frac{c}{\alpha}$$

Supposons aussi que $g \in D(A^2)$. Si le paramètre de régularisation α est choisi en fonction de ε de telle sorte que pour $\varepsilon \longrightarrow 0$, on a aussi $\alpha \longrightarrow 0$ et $\varepsilon\alpha^{-1} \longrightarrow 0$, alors $f_\alpha \longrightarrow f$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, et si en outre $\alpha = o\left(\varepsilon^{1/2}\right)$ pour $\varepsilon \longrightarrow 0$, alors

$$\|f_\alpha - f\| = o\left(\varepsilon^{1/2}\right)$$

Preuve. Voir [15]. ■

2.7 Méthode de fonctions propres

2.7.1 L'équation parabolique rétrograde

Nous sommes intéressés à trouver une solution u de l'équation d'evolution

$$\partial_t u + Au = 0 \text{ sur } \Omega \times (0,T), \tag{2.7.31}$$

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \tag{2.7.32}$$

avec la donnée finale

$$u = u_T \text{ sur } \Omega \times \{T\}. \tag{2.7.33}$$

Pour illustrer les idées fondamentales et les méthodes, nous considérons d'abord le cas simple de

$$A = -div\,(a\nabla) + c,$$

où a, c sont des fonctions bornées mesurables sur $\Omega, 0 < \varepsilon \leq a, 0 \leq c$. Les résultats, cependant, ne sont pas évidents, même pour l'équation unidimensionnelle de la chaleur $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ quand $\Omega = (0,1)$.

L'opérateur A avec les conditions aux limites de Dirichlet (2.7.32) est auto-adjoint dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ avec le domaine $H_{(2)} \cap \overset{\circ}{H}_{(1)}(\Omega)$ quand nous supposons en outre que $a \in C^1(\overline{\Omega})$, donc on a un système orthonormal complet des fonctions propres $e_k(x)$ de A avec des valeurs propres $\lambda_{k+1} \geq \lambda_k \geq 0$, $k = 1, 2....$Pour n'importe quelle solution de (2.7.31), (2.7.32) nous avons

$$u(x,t) = \sum u_k(t)\, e_k(x). \tag{2.7.34}$$

Cette fonction résout (2.7.31), (2.7.32) si et seulement si les coefficients u_k satisfaites

les équations ordinaires suivantes :

$$\partial_t u_k + \lambda_k u_k = 0 \text{ où } 0 < t < T,\ u_k(0) = u_{0k},$$

où $u_0 = u(0)$. Solution d'eux, nous obtenons

$$u_k(t) = u_{0k} e^{-\lambda_k t},$$

ainsi

$$u(x,t) = \sum u_{0k} e^{-\lambda_k t} e_k(x). \tag{2.7.35}$$

L'unicité rétrograde suit facilement cette représentation, parce que les coefficients u_{0k} sont uniquement déterminés à partir des relations $u_{0k} e^{-\lambda_k T} = u_{Tk}$, qui sont obtenus de (2.7.33) et (2.7.35). Puisque λ_k se comporte comme Ck^p avec un certain $p > 0$ pour grand k (par exemple, pour l'équation unidimensionnelle de la chaleur et $\Omega = (0,1)$ nous avons $e_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$ et $\lambda_k = \pi^2 k^2$). Ces relations montrent que pour tout $u_T \in L_2(\Omega)$ (et même pour $H_{(m)}(\Omega)$) une solution u n'existe pas, et quand elle existe,

elle est exponentiellement instable : pour u le k ieme terme de la somme (2.7.35) avec $u_{0k} = \varepsilon e^{\lambda_k T}$ nous avons $\|u_0\|_2(\Omega) = \varepsilon e^{\lambda_k T}$, alors que $\|u_T\|_2(\Omega) = \varepsilon$.

2.8 Méthode de quasi-réversibilité

La méthode de quasi-réversibilité a été suggérée dans le livre de Lattes et de Lions [14].

Nous remplaçons (2.7.31) par l'équation régularisée d'ordre plus supérieur

$$\partial_t u(;\alpha) + Au(;\alpha) - \alpha A^2 u(;\alpha) = 0. \tag{2.8.36}$$

Encore, en employant des fonctions propres nous obtenons pour les coefficients $u_k(;\alpha)$ les équations différentielles ordinaires

$$\partial_t u_k(;\alpha_k) + \left(\lambda_k - \alpha\lambda_k^2\right) u(;\alpha_k) = 0,\ 0 < t < T,\ u_k(T;\alpha) = u_{Tk}.$$

On résout ces équations nous obtenons

$$u(t;\alpha) = \sum u_{Tk} e^{\left(\lambda_k - \alpha\lambda_k^2\right)(T-t)} e_k(x). \tag{2.8.37}$$

Puisque λ_k tend vers l'infini quand k croit, cette série est convergente dans $L_2(\Omega)$ pour tout u_T dans cet espace et pour tout $t < T$. De plus, quand α tend vers 0, les solutions régularisées u_α sont convergentes vers la solution u (dans $L_2(\Omega)$ pour tout $t \in (0,T)$), à condition que u existe.

2.8.1 Régularisation par des équations pseudo-paraboliques

Un autre exemple d'algorithme numérique convergent de a (faiblement) est dû à Gajewski et à Zacharias.Ils ont suggéré régulariser de l'équation (2.7.31) par l'équation

$$\partial_t (u_\alpha - \alpha A u_\alpha) + A u_\alpha = 0 .$$

En employant des fonctions propres nous obtenons pour les coefficients $u_k(;\alpha)$ les équations différentielles ordinaires

$$\partial_t (u_{\alpha k} - \alpha\lambda_k u_{\alpha k}) + \lambda_k u_{\alpha k} = 0\ ,\ 0 < t < T,\ u_{\alpha k}(T) = u_{Tk}.$$

On résout ces équations nous obtenons

$$u_\alpha(t;x) = \sum u_{Tk} e^{\left(\frac{\lambda_k}{1-\alpha\lambda_k}\right)(T-t)} e_k(x).$$

2.9 Méthode de convexité logarithmique

La prochaine question naturelle est au tour de la stabilité dans les équations d'évolution rétrograde et au sujet du taux de convergence des algorithmes numériques. Elle n'est pas une simple question à moins qu'on se serve des bornes a priori et de la convexité logarithmique. Pour prouver que le logarithme $F(t)$ de la norme carrée d'une solution $f(t) = \|u(t)\|_2^2(\Omega)$ est une fonction convexe, nous utilisons encore le simple mais l'exemple important $A = -div(a\nabla) + c$ en supposant que $a, c, -\partial_t a$, $-\partial_t c$ sont mesurables, bornés, et non négatifs, et que $a \geq \varepsilon_0 > 0$.

Maintenant nous prouverons que

$$F'' \geq 0. \tag{2.9.38}$$

On a

$$F' = f'/f, \quad F'' = \left(ff'' - (f')^2\right)/f^2.$$

En employant la définition L_2 - norme et l'équation différentielle (2.7.31) nous obtenons

$$f'(t) = 2\int_\Omega u\partial_t u = 2\int_\Omega u\left(div(a\nabla u) - cu\right) = 2\int_\Omega \left(-a|\nabla u|^2 - cu^2\right),$$

où nous avons employé l'intégration par parties et la condition au limite (2.7.32). De plus,

$$\begin{aligned} f'' &= 2\int_\Omega \left(-2a\nabla u.\partial_t\nabla u - \partial_t a|\nabla u|^2 - 2cu\partial_t u - \partial_t cu^2\right) \\ &\geq \int_\Omega \left(4div\left(a\nabla u\right).\partial_t\nabla u - 4cu\partial_t u\right) = 4\int_\Omega \left(\partial_t u\right)^2 = 4\|\partial_t u\|_2^2, \end{aligned}$$

où nous avons intégré par parties encore, et nous avons utilisé les conditions sur a, c , et exprimé $\partial_t u$ de l'équation différentielle (2.7.31). Parfois nous laisserons tomber, pour la brièveté, le symbole Ω dans les normes et les produits scalaires. Maintenant, on a

$$\left(f''f - (f')^2\right) \geq 4\|\partial_t u\|_2^2 \|u(t)\|_2^2 - \left(2\left(u, \partial_t u\right)_2\right)^2 \geq 0$$

selon l'inégalité de Schwarz.

Nous sommes arrivé à démontrer que F est convexe. Alors, $F(t) \leq \left(1 - \frac{t}{T}\right)F(0) + \frac{t}{T}F(T)$, ou

$$f(t) \leq f(0)^{1-\frac{t}{T}} f(T)^{\frac{t}{T}} \quad \text{quand } 0 \leq t \leq T$$

En utilisant la définition de f et la donnée finale, nous obtenons

$$\|u(t)\|_2(\Omega) \leq M^{1-\frac{t}{T}} \|u_T\|_2^{\frac{t}{T}}(\Omega) \tag{2.9.39}$$

sous la contrainte $\|u(t)\|_2(\Omega) \leq M$. Il est facile de comprendre que cette éstimation est pointue. On peut considérer une éstimation conditionnelle de stabilité (sous une borne à priori $\|u(t)\|_2 \leq M$).

Maintenant nous prouverons un résultat tout à fait général sur la convexité logarithmique et donc stabilité dans les équations d'évolution rétrograde. Ce résultat est une version plus faible du théorème d'Agmon et de Nirenberg.

Soit $A = A(t)$ un opérateur linéaire dans l'espace de Hilbert (complexe) H avec le domaine $D(t)$. Par$\|\|$, (,) nous dénotons respectivement la norme et le produit scalaire dansH . Nous considérons la généralisation suivante de l'équation (2.7.31) :

$$\|\partial_t u + Au\| \leq \alpha \|u\| \quad \text{sur } (0,T). \tag{2.9.40}$$

Nous assumons que

$$A = A_+ + A_-, \tag{2.9.41}$$

où A_+ est un opérateur symétrique linéaire dans H avec le domaine $D(t)$ et A_- est un opérateur biaisé-symétrique. D'ailleurs, ils vérifient les conditions suivantes :

$$\|A_- u\|^2 \leq \alpha \left(\|A_+ u\| \|u\| + \|u\|^2\right), \tag{2.9.42}$$

et

$$\partial_t (A_+ u, u) \leq 2\Re (A_+ u, \partial_t u) + \alpha \left(\|A_+ u\| \|u\| + \|u\|^2\right), \tag{2.9.43}$$

pour certaine constante α.

Théurème 2.7.1 : Soit $u(t) \in D(t)$, $u \in C^1([0,T];H)$ une solution de l'inégalité différentielle (2.9.40) , où A satisfait les conditions (2.9.41) -(2.9.43) . Alors

$$\|u(t)\| \leq C_1 \|u(0)\|^{1-\lambda} \|u(T)\|^{\lambda}$$

avec $C_1 \leq \exp\left((2\alpha+2)T + 2e^{CT}/C\right)$ et $\lambda = \left(1-e^{-Ct}\right)/\left(1-e^{-CT}\right)$ ou

$\left(e^{C(t-T)} - e^{-CT}\right)/\left(1-e^{-CT}\right)$ avec C selon α. En outre, quand $\alpha = 0$ nous pouvons prendre $C_1 = 1$ et $\lambda = t/T$.

Dans la preuve nous employerons deux lemmes élémentaires. Nous avons placé $q = \|u\|^2$, $\psi = 2\Re(f,u)/q$, et $l = \ln q - \int_0^t \psi$.

Lemme 2.7.1: Il y a un constant $C \geq 0$ selon α tels que $\partial_t^2 l + C|\partial_t l| + C > 0$ sur $(0,T)$ En outre, C peut être pris comme 0 quand $\alpha = 0$.

Lemme2.7.2 : Dans les conditions du théorème 2.7.1 nous avons

$$\begin{aligned} \ln\|u(t)\| &\leq \ln\|u(0)\|\left(e^{-\gamma t} - e^{-\gamma T}\right)/\left(1 - e^{-\gamma T}\right) \\ &\quad + \ln\|u(T)\|\left(1 - e^{-\gamma t}\right)/\left(1 - e^{-\gamma T}\right) + C_2, \end{aligned}$$

où γ est C ou -C, $C_2 \leq (2\alpha + 2)T + 2e^{CT}/C$, et $C_2 = 0$ quand $\alpha = 0$.

Preuve. de Théorème 2.7.1. L'éstimation nécessaire suit de l'inégalité du lemme 2.7.2 de prendre des exposants des deux parties. Quand $\alpha = 0$ ce lemme implique $C_1 = \exp C_2$ est 1. Soit α tend vers 0, nous concluons du lemme 2.7.1 que C tend vers 0, et calculant la limite deλ , nous concluons la preuve. ■

Ce théorème peut être appliqué à une équation parabolique de second ordre avec les données aux limites latérales de Dirichlet ou de Neumann et même à l'équation parabolique changeant de direct du temps.

Exemple 2.7.1 : (Une équation parabolique de deuxième ordre). Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^2$. Soit

$$Au = -\sum \partial_k (a_{jk}\partial_j u) + \sum b_j \partial_j u + cu, \tag{2.9.44}$$

avec le domaine $D(t) = \overset{\circ}{H}_{(1)}(\Omega) \cap H_{(2)}(\Omega)$. Nous assumons cela a_{jk}, $\partial_t a_{jk}$, b, $divb \in C^1\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right)$, $c, \partial_t c \in L_\infty(\Omega \times [0,T])$. Ici $b = (b_1, ..., b_n)$.

Nous vérifions les conditions (2.9.41) - (2.9.43) avec

$$\begin{aligned} A_+ u &= -\sum \partial_k (a_{jk}\partial_j u) + \left(-\frac{1}{2} divb + c\right) u, \\ A_- u &= \sum \partial_j (b_j u) - \frac{1}{2}(divb)\, u. \end{aligned}$$

Il est évident que $A = A_+ + A_-$. Nous intégrons par partie et employons la condition au limite $u = 0$ sur $\partial\Omega$, nous concluons qui A_+ est symétrique et A_- est biaiser-symétrique.

Considérons la condition (2.9.42). Le côté gauche est la somme d'intégrales de $B\partial_j u\partial_k u$, $B\partial_j uu$, Bu^2 plus de Ω, où B est le produit de b_j et b_k ou de $divb$ et b_j. Soit $\|\| = \|\|_2(\Omega)$, nous obtenons la limite dans le premier cas

$$\int_\Omega B\partial_j u\partial_k u = -\int_\Omega \partial_k (B\partial_j u)\, u \leq C\left(\|\partial_k\partial_j u\|\,\|u\| + \|\partial_j u\|\,\|u\|\right)$$

en employant l'inégalité de Schwarz. C dépend de $|B|_1$. Puisque l'opérateur A_+ est un opérateur elliptique de second ordre et u satisfait les conditions zéro de Dirichlet sur $\partial\Omega$, le type d'éstimation à prioré de Schauder implique cela $\|\partial_k\partial_j u\|+\|\partial_k u\| \leq C\left(\|A_+u\| + \|u\|\right)$, et nous obtenons (2.9.42) .

Il est suffisant de le prouver (2.9.43) en employant la symétrie de a_{jk} et l'intégration par partie pour observer

$$\partial_t \int_\Omega A_+uu = \sum \int_\Omega \partial_t\left(a_{jk}\partial_j u\partial_k u\right) = \int_\Omega \left(\sum \partial_t a_{jk}\partial_j u\partial_k u + 2A_+u\partial_t u\right)$$

et pour borner

$$\int_\Omega \partial_t a_{jk}\partial_j\partial_k uu,$$

ce qui peut être fait comme avant.

Chapitre 3

L'étude du problème parabolique abstrait mal posé(cas continu)

3.1 Introduction

Soit A un opérateur auto-adjoint , non borné et négatif dans un espace de Hilbert tel que A générateur d'un semi-groupe compact de contraction sur H. Nous considérons le problème de trouver $u : [0,T] \longrightarrow H$ tels que

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \ 0 < t \leq T \\ u(0) = f. \end{cases} \qquad (IVP)$$

Pour f est une valeur initiale dans H. Ce problème n'est pas bien posé aux sens d'Hadamard.

Maintenant, soit $\{E_\lambda\}_{\lambda<0}$ une mésure spectrale associée à l'opérateur A dans l'espace de Hilbert H. Donc pour tout $f \in H$, nous pouvons écrire $f = \int_{-\infty}^{0} dE_\lambda f$.

Nous rapprochons le (IVP) avec le problème à valeurs quasi-limites

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \ 0 < t \leq T \\ u(0) - \alpha u'(T) = f, \end{cases} \qquad (QBVP)$$

où α est un petit paramètre positif.

3.2 Résultats préliminaires

Définition 3.2.1 : Si le problème (IVP) (resp. $(QBVP)$) admet une solution classique u (resp.u_α), alors cette solution est de la forme suivante

$$u(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda t} dE_\lambda f \tag{3.2.1}$$

respectivement,

$$u_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\lambda(T-t)}}{e^{\lambda T} - \alpha\lambda} dE_\lambda f. \tag{3.2.2}$$

Lemme 3.2.1 : Si $f \in H$, alors (IVP) admet une solution

Preuve. Montrons que

$$u(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda t} dE_\lambda f$$

est une solution de (IVP)

Montrons que la fonction u est définie par

$u : [0,T] \longrightarrow H$

$t \longmapsto u(t)$

Si $\|u(t)\| < \infty$ alors $u(t)$ est bien définie

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &\leq \int_{-\infty}^{0} e^{-2\lambda T} d\|E_\lambda f\|^2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{0} \lambda^2 e^{-2\lambda T} d\|E_\lambda f\|^2 + \int_{-1}^{0} e^{-2\lambda T} d\|E_\lambda f\|^2 < \infty \end{aligned}$$

Donc $u(t) \in H$ est bien définie.

Montrons maintenant que $u(t) \in C^1([0,T], H)$

a) $e^{-\lambda t} \in C^1([0,T], H)$ est évidente

b)On a :

$$\|u(t)\|^2 \leq \int_{-\infty}^{0} e^{-2\lambda T} d\|E_\lambda f\|^2 < \infty$$

Alors l'intégrale définissant $u(t)$ converge uniformément.

c)

$$\left\| \int_{-\infty}^{0} -\lambda e^{-\lambda t} dE_\lambda f \right\|^2 = \left\langle \int_{-\infty}^{0} -\lambda e^{-\lambda t} dE_\lambda f \ , \int_{-\infty}^{0} -\lambda e^{-\lambda t} dE_\lambda f \right\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \lambda^2 e^{-2\lambda t} d \left\| E_\lambda f \right\|^2$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} \lambda^2 e^{-2\lambda T} d \left\| E_\lambda f \right\|^2 < \infty$$

Maintenant, pour voir que $u(t) \in D(A)$ on utilise la formule (3.2.1)

$$\|Au(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{0} \lambda^2 e^{-2\lambda t} d \|E_\lambda f\|^2$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} \lambda^2 e^{-2\lambda T} d \|E_\lambda f\|^2 < \infty$$

Montrons que $u(t)$ satisfait le problème (IVP) .

$$u(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda t} dE_\lambda f, \ \ u(0) = \int_{-\infty}^{0} dE_\lambda f = f$$

$$u'(t) + Au(t) = \left[\int_{-\infty}^{0} \lambda e^{-\lambda t} dE_\lambda f + A \int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda t} dE_\lambda f \right]$$

$$u'(t) + Au(t) = \left[\int_{-\infty}^{0} \lambda e^{-\lambda t} dE_\lambda f + \int_{-\infty}^{0} \lambda e^{-\lambda t} dE_\lambda f \right] = 0$$

Alors le lemme est démontré ■

3.3 Le problème approché

Nous rapprochons le problème à valeur initiale par le problème à valeurs quasi-limites suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & \forall 0 < t \leq T \\ u(0) - \alpha u'(T) = f, \end{cases} \qquad (QBVP)$$

où $f \in H$ et α est une petit parametre positif.

On montre que ce dernier est bien posé pour $\alpha > 0$.

Théorème 3.3.1 : La fonction $u_\alpha(t)$ donnée dans (3.2.2) est la solution unique de $(QBVP)$ et elle dépend continument de f, et on a l'éstimation suivante :

$$\|u_\alpha(t)\|^2 \leq \left[\frac{T}{\alpha\left(1-\ln\frac{\alpha}{T}\right)}\right]^2 \|f\|^2 . \tag{3.3.3}$$

Preuve. Il est facile de voir que $u_{\alpha\beta}(t)$ est une solution classique du problème $(QBVP)$.

1) $u_\alpha(t)$ est bien définie

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(t)\|^2 &\leq \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{2\lambda(T-t)}}{e^{2\lambda T}} d\|E_\lambda f\|^2 \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} e^{-2\lambda t} d\|E_\lambda f\|^2 \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} e^{-2\lambda T} d\|E_\lambda f\|^2 < \infty
\end{aligned}$$

2) Montrons que $u_\alpha \in C^1([0,T],H)$.

$$u_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\lambda(T-t)}}{e^{\lambda T}-\alpha\lambda} dE_\lambda f$$

a)On a $\frac{e^{\lambda(T-t)}}{e^{\lambda T}-\alpha\lambda} \in C^1(]0,T[,H)$

b)$\|u_\alpha(t)\|^2 \leq \int_{-\infty}^{0} e^{-2\lambda T} d\|E_\lambda f\|^2 < \infty$

c)

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{-\infty}^{0} \frac{-\lambda e^{\lambda(T-t)}}{e^{\lambda T}-\alpha\lambda} dE_\lambda f \right\|^2 &\leq \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda^2 e^{2\lambda(T-t)}}{(-\alpha\lambda)^2} d\|E_\lambda f\|^2 \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\alpha^2} d\|E_\lambda f\|^2 \\
&\leq \frac{1}{\alpha^2}\|f\|^2 < \infty
\end{aligned}$$

4) Montrons que $u_\alpha(t) \in D(A) \;\; 0 < t < T \;\;.$

$$\begin{aligned} \|Au_\alpha(t)\|^2 &= \left\| \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda e^{\lambda(T-t)}}{e^{\lambda T} - \alpha\lambda} dE_\lambda f \right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} \|f\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Alors $u_\alpha \in C^1(]0,T[, H)$ et

$$u'_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{0} \frac{-\lambda e^{\lambda(T-t)}}{e^{\lambda T} - \alpha\lambda} dE_\lambda f \tag{3.3.4}$$

5)Montrons que $u_\alpha(t)$ vérifié $(QBVP)$

Montrons d'abord que $u_\alpha(0) - \alpha u'_\alpha(T) = f.$

$$\begin{aligned} u_\alpha(0) - \alpha u'_\alpha(T) &= \left[\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\lambda T}}{e^{\lambda T} - \alpha\lambda} dE_\lambda f + \alpha \int_{-\infty}^{0} \frac{-\lambda}{e^{\lambda T} - \alpha\lambda} dE_\lambda f \right] \\ &= \int_{-\infty}^{0} \left[\frac{e^{\lambda T} - \lambda\alpha}{e^{\lambda T} - \alpha\lambda} \right] dE_\lambda f = \int_{-\infty}^{0} dE_\lambda f = f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_\alpha(t) + Au_\alpha(t) &= \int_{-\infty}^{0} \frac{-\lambda e^{\lambda(T-t)}}{e^{\lambda T} - \alpha\lambda} dE_\lambda f + A \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\lambda(T-t)}}{e^{\lambda T} - \alpha\lambda} dE_\lambda f \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{-\lambda e^{\lambda(T-t)}}{e^{\lambda T} - \alpha\lambda} dE_\lambda f + \int_{-\infty}^{0} \lambda \frac{e^{\lambda(T-t)}}{e^{\lambda T} - \alpha\lambda} dE_\lambda f = 0. \end{aligned}$$

Alors $u'_\alpha(t) + Au_\alpha(t) = 0.$

Maintenant, en utilisant (3.2.2) nous avons :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t)\|^2 &= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{2\lambda(T-t)}}{(e^{\lambda T} - \alpha\lambda)^2} d\|E_\lambda f\|^2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(e^{\lambda T} - \alpha\lambda)^2} d\|E_\lambda f\|^2, \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

si nous mettions

$$h(\lambda) = \left(e^{\lambda T} - \alpha\lambda\right)^{-1}, \text{ pour } \lambda < 0 \tag{3.3.6}$$

Alors

$$\sup_{\lambda>0} h(\lambda) = h\left(\frac{\ln\frac{\alpha}{T}}{T}\right). \tag{3.3.7}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(t)\|^2 &\leq \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(e^{\lambda T}-\alpha\lambda)^2} d\|E_\lambda f\|^2 \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\left(e^{\left(\frac{\ln\frac{\alpha}{T}}{T}\right)T} - \alpha\left(\frac{\ln\frac{\alpha}{T}}{T}\right)\right)^2} d\|E_\lambda f\|^2 \\
&\leq \left[\frac{T}{\alpha\left(1-\ln\frac{\alpha}{T}\right)}\right]^2 \|f\|^2.
\end{aligned}$$

Ceci prouve que l'intégral définissant $u_\alpha(t)$ existe pour tout $t \in [0,T]$ et nous avons l'éstimation désirée.

On vérifie la dépendence continue de la solution $u_\alpha(t)$ sur f (i.e la stabilité de la solution)

$$\|u_\alpha(f_1) - u_\alpha(f_2)\|^2 = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{2\lambda(T-t)}}{(e^{\lambda T}-\alpha\lambda)^2} d\|E_\lambda(f_2-f_2)\|^2 \tag{3.3.8}$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(e^{\lambda T}-\alpha\lambda)^2} d\|E_\lambda(f_2-f_2)\|^2 \tag{3.3.9}$$

$$\leq \left[\frac{T}{\alpha\left(1-\ln\frac{\alpha}{T}\right)}\right]^2 \int_{-\infty}^{0} d\|E_\lambda(f_2-f_2)\|^2 \tag{3.3.10}$$

$$\leq \left[\frac{T}{\alpha\left(1-\ln\frac{\alpha}{T}\right)}\right]^2 \|f_2-f_2\|^2 \tag{3.3.11}$$

Comme f_1 tend vers f_2 , on obtient

$u_\alpha(f_1)$ tend vers $u_\alpha(f_2)$,d'où la stabilité de la solution.

On note si on prend $f_1 = f_2$ dans (3.3.11), on aura l'unicité de la solution classique du problème $(QBVP)$. ■

3.4 Convergence de la solution approchée

Théorème 3.4.1 : Pour tout $f \in H$, $\|u_\alpha(0) - f\|$ tend vers zéro quand α tend vers zéro ($u_\alpha(0)$ converge vers f dans H).

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$,choisissons $\eta > 0$ tel que

$$\int_{-\infty}^{-\eta} d\|E_\lambda f\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De (3.2.2), nous avons

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(0) - f\|^2 &= \int_{-\infty}^{-\eta} \frac{(\alpha\lambda)^2}{(e^{\lambda T} - \alpha\lambda)^2} d\|E_\lambda f\|^2 + \int_{-\eta}^{0} \frac{(\alpha\lambda)^2}{(e^{\lambda T} - \alpha\lambda)^2} d\|E_\lambda f\|^2 \\
&\leq \int_{-\infty}^{-\eta} \frac{(\alpha\lambda)^2}{(-\alpha\lambda)^2} d\|E_\lambda f\|^2 + \alpha^2 \int_{-\eta}^{0} \frac{(\lambda)^2}{(e^{\lambda T} - \alpha\lambda)^2} d\|E_\lambda f\|^2 \\
&\leq \int_{-\infty}^{-\eta} d\|E_\lambda f\|^2 + \alpha^2 \int_{-\eta}^{0} \frac{\lambda^2}{(e^{\lambda T} - \alpha\lambda)^2} d\|E_\lambda f\|^2 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \alpha^2 \int_{-\eta}^{0} \lambda^2 e^{-2\lambda T} d\|E_\lambda f\|^2
\end{aligned}$$

ainsi en choisissant α tels que

$$\alpha^2 < \varepsilon \left(2 \int_{-\eta}^{0} \lambda^2 e^{-2\lambda T} d\|E_\lambda f\|^2 \right)^{-1},$$

nous obtenons le résultat désiré ■

Téorème 3.4.2 : Pour tout f dans H (IVP) admet une solution u si et seulement si la suite $(u'_\alpha(T))_{\alpha>0}$ converge dans H. De plus on a alors $u_\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ dans $C^1([0,T], H)$ si α tend vers zéro.

Preuve. Si nous supposons que le problème $(I.V.P)$ a une solution classique u, alors

on a

$$\begin{aligned}
\left\|u'_\alpha(T)-u'(T)\right\|^2 &= \int_{-\infty}^{-\eta}\frac{\alpha^2\lambda^4e^{-2\lambda T}}{\left(e^{\lambda T}-\alpha\lambda\right)^2}d\left\|E_\lambda f\right\|^2+\int_{-\eta}^{0}\frac{\alpha^2\lambda^4e^{-2\lambda T}}{\left(e^{\lambda T}-\alpha\lambda\right)^2}d\left\|E_\lambda f\right\|^2\\
&\leq \int_{-\infty}^{-\eta}\frac{\alpha^2\lambda^4e^{-2\lambda T}}{\left(\alpha\lambda\right)^2}d\left\|E_\lambda f\right\|^2+\int_{-\eta}^{0}\frac{\alpha^2\lambda^4e^{-2\lambda T}}{\left(e^{\lambda T}\right)^2}d\left\|E_\lambda f\right\|^2\\
&\leq \int_{-\infty}^{-\eta}\lambda^2e^{-2\lambda T}d\left\|E_\lambda f\right\|^2+\alpha^2\int_{-\eta}^{0}\lambda^4e^{-4\lambda T}d\left\|E_\lambda f\right\|^2\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\alpha^2\int_{-\eta}^{0}\lambda^4e^{-4\lambda T}d\left\|E_\lambda f\right\|^2,
\end{aligned}$$

ainsi en choisissant α tel que $\alpha^2<\epsilon\left(2\int_{-\eta}^{0}\lambda^4e^{-4\lambda T}d\left\|E_\lambda f\right\|^2\right)^{-1}$, nous obtenons

$$\left\|u'_\alpha(T)-u'(T)\right\|^2<\epsilon,$$

ceci montre que $\left\|u'_\alpha(T)-u'(T)\right\|^2$ tend vers zéro quand α tend vers zéro. De plus,

$$\begin{aligned}
\left\|u'_\alpha(t)-u'(t)\right\|^2 &= \left\|\int_{-\infty}^{0}\frac{-\lambda e^{\lambda(T-t)}}{e^{\lambda T}-\alpha\lambda}dE_\lambda f+\int_{-\infty}^{0}\lambda e^{-\lambda t}dE_\lambda f\right\|^2\\
&= \int_{-\infty}^{0}\frac{\alpha^2\lambda^4e^{-2\lambda t}}{\left(e^{\lambda T}-\alpha\lambda\right)^2}d\left\|E_\lambda f\right\|^2\\
&\leq \int_{-\infty}^{0}\frac{\alpha^2\lambda^4e^{-2\lambda T}}{\left(e^{\lambda T}-\alpha\lambda\right)^2}d\left\|E_\lambda f\right\|^2\\
&= \left\|u'_\alpha(T)-u'(T)\right\|^2.
\end{aligned}$$

Donc $u'_\alpha(t)$ converge vers $u'(t)$ uniformément dans $[0,T]$ quand α tend vers zéro.

Puisque

$$\left\|u_\alpha(T)-u(T)\right\|^2=\left\|\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{e^{\lambda T}-\alpha\lambda}dE_\lambda f-\int_{-\infty}^{0}e^{-\lambda T}dE_\lambda f\right\|^2,$$

donc

$$\begin{aligned}\|u_\alpha(T)-u(T)\|^2 &= \int_{-\infty}^{-\eta}\frac{\alpha^2\lambda^2e^{-2\lambda T}}{\left(e^{\lambda T}-\alpha\lambda\right)^2}d\|E_\lambda f\|^2+\int_{-\eta}^{0}\frac{\alpha^2\lambda^2e^{-2\lambda t}}{\left(e^{\lambda T}-\alpha\lambda\right)^2}d\|E_\lambda f\|^2\\ &\leq \int_{-\infty}^{-\eta}e^{-2\lambda T}d\|E_\lambda f\|^2+\int_{-\eta}^{0}\alpha^2\lambda^2e^{-4\lambda T}d\|E_\lambda f\|^2\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}+\alpha^2\int_{-\eta}^{0}\lambda^2e^{-4\lambda T}d\|E_\lambda f\|^2\end{aligned}$$

pour η assez grand. Alors en choisissant α tel que $\alpha^2<\epsilon\left(2\int_{-\eta}^{0}\lambda^2e^{-4\lambda T}d\|E_\lambda f\|^2\right)^{-1}$, nous obtenons

$$\|u_\alpha(T)-u(T)\|^2<\epsilon.$$

Ainsi $u_\alpha(T)$ converge vers $u(T)$, ce qui donne $u_\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ uniformément dans $[0,T]$ quand α tend vers zéro. Combinons tous ces résultats de convergence, nous concluons que $u_\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ dans $C^1([0,T],H)$.

On suppose maintenant que $(u'_\alpha(T))_{\alpha>0}$ converge dans H. Puisque u_α est une solution classique du problème $(Q.B.V.P)$, alors on a

$$\|u'_\alpha(T)\|^2=\int_{-\infty}^{0}\frac{\lambda^2}{\left(e^{\lambda T}-\alpha\lambda\right)^2}d\|E_\lambda f\|^2,$$

et il est facile de montrer que

$$\left\|\lim_{\alpha\downarrow0}u'_\alpha(T)\right\|^2=\int_{-\infty}^{0}\lambda^2e^{-2\lambda T}d\|E_\lambda f\|^2$$

et ainsi la fonction $u(t)$ définie par

$$u(t)=\int_{-\infty}^{0}e^{-\lambda t}dE_\lambda f$$

est la solution classique du problème $(I.V.P)$.

D'où la démonstration. ■

Théorème 3.4.3 : Si la fonction u donnée par (3.2.1) est la solution classique du problème $(I.V.P)$, et u_α^δ est la solution du problème $(Q.B.V.P)$ pour $f = f_\delta$, telle que $\|f - f_\delta\| < \delta$, alors on a

$$\left\|u(T) - u_\alpha^\delta(T)\right\| \leq c\left(1 - \ln\frac{\delta}{T}\right)^{-1}, \tag{3.4.12}$$

où $c = T\left(\|Au(T)\| + 1\right)$.

Preuve. On suppose que la fonction u donnée par(3.2.1) est la solution classique du problème $(F.V.P)$, et soit dénoté par u_α^δ une solution du problème $(Q.B.V.P)$ pour $f = f_\delta$, tel que

$$\|f - f_\delta\| < \delta$$

et comme $u_\alpha^\delta(t)$ est donnée par

$$u_\alpha^\delta(t) = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\lambda(T-t)}}{e^{\lambda T} - \alpha\lambda} dE_\lambda f_\delta, \ \forall t \in [0, T], \tag{3.4.13}$$

de (3.2.1) et (3.4.13)nous avons

$$\begin{aligned}
\left\|u(T) - u_\alpha^\delta(T)\right\| &= \left\|u(T) - u_\alpha(T) + u_\alpha(T) - u_\alpha^\delta(T)\right\| \\
&\leq \|u(T) - u_\alpha(T)\| + \left\|u_\alpha(T) - u_\alpha^\delta(T)\right\| \\
&= \Delta_1 + \Delta_2,
\end{aligned}$$

où $\Delta_1 = \|u(T) - u_\alpha(T)\|$, et $\Delta_2 = \left\|u_\alpha(T) - u_\alpha^\delta(T)\right\|$. En utilisant (3.3.7), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\left(e^{\lambda T} - \alpha\lambda\right)^2} \alpha^2\lambda^2 e^{-2\lambda T} d\|E_\lambda f\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{0} \left[\frac{T}{\left(1 - \ln\frac{\alpha}{T}\right)}\right]^2 \lambda^2 e^{-2\lambda T} d\|E_\lambda f\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\frac{T\|Au(T)\|}{\left(1 - \ln\frac{\alpha}{T}\right)}\right],
\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \left\| \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^{\lambda T} - \alpha\lambda} dE_\lambda f - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^{\lambda T} - \alpha\lambda} dE_\lambda f_\delta \right\| && (3.4.15) \\
&= \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\left(e^{\lambda T} - \alpha\lambda\right)^2} d \left\| E_\lambda \left(f - f_\delta\right) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{0} \left[\frac{T}{\alpha \left(1 - \ln \frac{\alpha}{T}\right)} \right]^2 d \left\| E_\lambda \left(f - f_\delta\right) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\frac{T}{\alpha \left(1 - \ln \frac{\alpha}{T}\right)} \right] \left\| \left(f - f_\delta\right) \right\| && (3.4.16) \\
&\leq \frac{T\delta}{\alpha \left(1 - \ln \frac{\alpha}{T}\right)} && (3.4.17)
\end{aligned}$$

de (3.4.14) et (3.4.17) , nous obtenons

$$\left\| u\left(T\right) - u_\alpha^\delta\left(T\right) \right\| \leq \left[\frac{T \left\| Au\left(T\right) \right\|}{\left(1 - \ln \frac{\alpha}{T}\right)} \right] + \frac{T\delta}{\alpha \left(1 - \ln \frac{\alpha}{T}\right)},$$

donc, pour le choix $\alpha = \delta$ nous obtenons

$$\left\| u\left(T\right) - u_\alpha^\delta\left(T\right) \right\| \leq \left[\frac{T \left(\left\| Au\left(T\right) \right\| + 1 \right)}{\left(1 - \ln \frac{\alpha}{T}\right)} \right].$$

■

Remarque 3.4.1: De (3.4.12), pour $T > e^{-1}$ nous obtenons

$$\left\| u\left(T\right) - u_\alpha^\delta\left(T\right) \right\| \leq c \left(\ln \frac{1}{\delta} \right)^{-1}$$

Preuve. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned}
\left\| u\left(T\right) - u_\alpha^\delta\left(T\right) \right\| &\leq \frac{c}{\left(1 - \ln \delta + \ln T\right)} \\
&\leq \frac{c}{\left(\ln \delta\right)} \\
&\leq c \left(\ln \frac{1}{\delta} \right)^{-1}
\end{aligned}$$

■

3.5 Estimation de l'ordre de convergence

Théorème 3.5.1 : S'il existe un $\varepsilon \in]0,2[$ tel que

$$\int_{-\infty}^{0} (-\lambda)^{\varepsilon} e^{-\epsilon\lambda T} d \left\| E_\lambda f \right\|^2$$

converge, alors $u_\alpha(0)$ converge vers f avec l'ordre $\alpha^{\varepsilon}\varepsilon^{-2}$ quand α tend vers zéro.

Preuve. Soit $\varepsilon \in]0,2[$ tel que $\int_{-\infty}^{0} (-\lambda)^{\varepsilon} e^{-\epsilon\lambda T} d \left\| E_\lambda f \right\|^2$ converge, et soit $\beta \in]-2,0[$. pour un $\lambda < 0$ fixe, et si nous définissons une fonction $g_\lambda(\alpha) = \frac{\alpha^{-\beta}}{\left(e^{\lambda T} - \alpha\lambda\right)^2}$, alors nous pouvons montrer cela

$$g_\lambda(\alpha) \leq g_\lambda(\alpha_0), \ \forall \alpha > 0, \tag{3.5.18}$$

où $\alpha_0 = \frac{\beta e^{\lambda T}}{(\beta+2)\lambda}$

En outre, de (3.2.2), nous avons

$$\begin{aligned} \left\| u_\alpha(0) - f \right\|^2 &= \int_{-\infty}^{0} \frac{\alpha^2\lambda^2}{\left(e^{\lambda T} - \alpha\lambda\right)^2} d \left\| E_\lambda f \right\|^2 \\ &= \alpha^{2+\beta} \int_{-\infty}^{0} \frac{\alpha^{-\beta}\lambda^2}{\left(e^{\lambda T} - \alpha\lambda\right)^2} d \left\| E_\lambda f \right\|^2 \\ &= \alpha^{2+\beta} \int_{-\infty}^{0} \lambda^2 g_\lambda(\alpha) \, d \left\| E_\lambda f \right\|^2 \end{aligned} \tag{3.5.19}$$

Par conséquent à partir (3.5.18) et (3.5.19) nous obtenons

$$\begin{aligned} \left\| u_\alpha(0) - f \right\|^2 &\leq \alpha^{2+\beta} \int_{-\infty}^{0} \lambda^2 g_\lambda(\alpha_0) \, d \left\| E_\lambda f \right\|^2 \\ &\leq \alpha^{2+\beta} \int_{-\infty}^{0} \lambda^2 \frac{\left(\frac{\beta e^{\lambda T}}{(\beta+2)\lambda}\right)^{-\beta}}{e^{2\lambda T}} d \left\| E_\lambda f \right\|^2 \\ &\leq \alpha^{2+\beta} \left(\frac{-\beta}{(\beta+2)}\right)^{-\beta} \int_{-\infty}^{0} (-\lambda)^{2+\beta} e^{-(2+\beta)\lambda T} d \left\| E_\lambda f \right\|^2 . \end{aligned}$$

Si nous choisissons $\beta = (\varepsilon - 2)$, on a

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(0) - f\|^2 &\leq \alpha^\varepsilon \left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{2-\varepsilon} \int_{-\infty}^{0} (-\lambda)^\varepsilon e^{-\varepsilon\lambda T} d \|E_\lambda f\|^2 \\ &\leq \alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2} \left(4 \int_{-\infty}^{0} (-\lambda)^\varepsilon e^{-\varepsilon\lambda T} d \|E_\lambda f\|^2\right) \\ &\leq c_\epsilon \alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}, \end{aligned}$$

où $c_\epsilon = 4 \int_{-\infty}^{0} (-\lambda)^\varepsilon e^{-\varepsilon\lambda T} d \|E_\lambda f\|^2$ ■

Maintenant, nous donnons le corollaire suivant.

Corollaire 3.5.1: S'il existe un $\varepsilon \in]0,2[$ de sorte que

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-(\varepsilon+2)\lambda T} (-\lambda)^{(2\gamma+\varepsilon)} d \|E_\lambda f\|^2, \tag{3.5.20}$$

où $\gamma \in \overline{0,1}$, converge, puis u_α converge vers u dans $C^1([0,T], H)$ avec l'ordre de la convergence $\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}$

Preuve. Si nous supposons que (3.5.20) est satisfait, alors

$$\int_{-\infty}^{0} (-\lambda)^2 e^{-2\lambda T} d \|E_\lambda f\|^2.$$

converge, et ainsi la fonction u donnée par (3.2.1) est une solution classique du problème $(I.V.P)$. Soit $u_\alpha^{(\gamma)}$, $u^{(\gamma)}$ dénotent les dérivés d'ordre γ du fonction u_α et u respectivement. Employer l' inégalité suivante

$$\begin{aligned} \left\|u_\alpha^{(\gamma)}(T) - u^{(\gamma)}(T)\right\|^2 &= \alpha^{2+\beta} \int_{-\infty}^{0} \frac{\alpha^{-\beta}}{(e^{\lambda T} - \alpha\lambda)^2} (-\lambda)^{(2\gamma+2)} e^{-2\lambda T} d \|E_\lambda f\|^2 \\ &\leq \alpha^{2+\beta} \int_{-\infty}^{0} g_\lambda(\alpha_0) (-\lambda)^{(2\gamma+2)} e^{-2\lambda T} d \|E_\lambda f\|^2 \\ &\leq \alpha^{2+\beta} \int_{-\infty}^{0} \frac{\left(\frac{-\beta}{(\beta+2)}\right)^{-\beta} (-\lambda)^\beta e^{-\beta\lambda T}}{e^{2\lambda T}} (-\lambda)^{(2\gamma+2)} e^{-2\lambda T} d \|E_\lambda f\|^2 \\ &\leq \alpha^{2+\beta} \left(\frac{-\beta}{(\beta+2)}\right)^{-\beta} \int_{-\infty}^{0} e^{-(\beta+4)\lambda T} (-\lambda)^{(2\gamma+2+\beta)} d \|E_\lambda f\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|u_\alpha^{(\gamma)}(T)-u^{(\gamma)}(T)\right\|^2 &\leq \alpha^\varepsilon\left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{2-\varepsilon}\int_{-\infty}^{0}e^{-(\varepsilon+2)\lambda T}(-\lambda)^{(2\gamma+\varepsilon)}\,d\left\|E_\lambda f\right\|^2\\ &\leq \alpha^\varepsilon\varepsilon^{-2}\left(4\int_{-\infty}^{0}e^{-(\varepsilon+2)\lambda T}(-\lambda)^{(2\gamma+\varepsilon)}\,d\left\|E_\lambda f\right\|^2\right)\\ &\leq c_{\varepsilon,\gamma}\alpha^\varepsilon\varepsilon^{-2},\end{aligned}$$

où $c_{\varepsilon,\gamma}=4\int_{-\infty}^{0}e^{-(\varepsilon+2)\lambda T}(-\lambda)^{(2\gamma+\varepsilon)}\,d\left\|E_\lambda f\right\|^2$.

Comme

$$\begin{aligned}\left\|u_\alpha^{(\gamma)}(t)-u^{\gamma}(t)\right\|^2 &= \int_{-\infty}^{0}\frac{\alpha^2(-\lambda)^{(2\gamma+2)}e^{-2\lambda t}}{\left(e^{\lambda T}-\alpha\lambda\right)^2}d\left\|E_\lambda f\right\|^2\\ &\leq \int_{-\infty}^{0}\frac{(-\lambda)^{(2\gamma+2)}\alpha^2e^{-2\lambda T}}{\left(e^{\lambda T}-\alpha\lambda\right)^2}d\left\|E_\lambda f\right\|^2\\ &\leq \left\|u_\alpha^{(\gamma)}(T)-u^{(\gamma)}(T)\right\|^2,\end{aligned}$$

alors $u_\alpha^{(\gamma)}(t)$ converge vers $u^{\gamma}(t)$ uniformément dans $[0,T]$ avec l'ordre de la convergence $\alpha^\varepsilon\varepsilon^{-2}$. ■

Bibliographie

[1] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications, Université Pierre et Marie Curie et École Polytechnique, Masson, Paris, (1983) ISBN : 2-225-77198-7

[2] A. Cimetière, F. Delvare, F. Pons, Une Méthode Inverse d'ordre un pour les Problèmes de Complétion de Données, Université de Poitiers, Boulevard Marie et Pierre Curie, 2004

[3] W. G. Clark and S. F. Oppenheimer, Quasireversibility Methods for Non-Well-Posed Problems, Electronic Journal of Diffirential Equations, n°8,pp. 1-9, (1994)

[4] J, B. Conway, ACourse in functional Analysis, Springer-verlag, New York, (1990).

[5] M. Denche, S. Djezzar, A Modified Quasi-Boundary Value Method for a Class of Abstract Parabolic Ill-Posed Problem, (2004) .

[6] H. Engl ., Hanke M., A. N., Regularization of Inverse problems, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1996).

[7] L.C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[8] J. Hadamard, Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. Princeton University Bulletin, 49–52, (1902).

[9] J. Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem in Linear Differential Equations, Yale University Press, New Haven, CT, (1923).

[10] V. Isakov, Inverse Problems for Partial Differential Equations, The Wichita State University, KS 67260-0033, (2000) .

[11] S. Kaka and Y. Yener, Heat Conduction, 3rd ed., Taylor & Francis, Washington DC, (1993).

[12] L. Kantorovitch, G.Akilov, Analyse Fonctionnelle, Tome1, Tradiction Française Editions Mir Moscou,(1981) .

[13] A.Kolomogrov, S.Fomine, Eléments de la Théorie des Fonctions et de L'analyse Fonctionnelle, Traduitdu Russe par Michel Dragnev, Edition Mir (1977) .

[14] R. Lattes, and J, L. Lions, Methode de Quasi-Reversibility et Application, Dunod, (1967) (English translation R, Bellman, Elsevier, New York, (1969).

[15] M. M. Lavrentiev, Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics, Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 11, Springer, Berlin, (1967) .

[16] K. Miller, Stabilized quasireversibility and other nearly best possible methods for non-well-posed problems, Symposium on Non-Well-Posed Problems and Logarithmic Convexity, Lecture Notes in Mathematics, Vol, 316, Springer-Verlag, Berlin, (1973) .

[17] M. T. Nair, Fonctional Analysis: AFirst Course, Prentice-Hall of India, New Delhi, (2002) .

[18] M.T. Nair, Ill-Posedness of Backward Heat Conduction Problem1, Department of Mathematics, IIT Madras,Chennai-600 036, INDIA,E-Mail mtnair@iitm.ac.in.

[19] S.Oraintora, W. G. Karl, D. A. Castanon, T. Q. Nguyen, A Method for Choosing the Regularisation Parameter in Generalized Tikhonov Regularized Lineair Inverss Problem, Multi-Dimensional Signal Processing Laboratory, Poston University.

[20] M.N. Ozisik, Boundary Value Problems of Heat Conduction, Dover, Mineola, NY, (1989).

[21] L, E. Payne, Some general remarks on improperly posed problems for partial differential equations, Symposium on Non-Well-Posed Problems and Logarithmic Convexity, Lecture Notes in Mathematics,Vol, 316, Springer-Verlag, Berlin, (1973)

[22] A. pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, (1983) .

[23] D.L. Powers, Boundary Value Problems, 4th ed., Academic Press, London, (1999).

[24] H. Reinhard, Equations Différentielles, fondements et applications.

[25] W. Rudin, Analyse Fonctionnelle, University of Wisconsin-Madison, Ediscience International (1995) .

[26] R,E. Showalter, The Final Value Problem for Evolution Equations, J. Math. Anal. Appl. 47. pp 563-572, (1974) .

[27] R,E. Showalter, Cauchy Problem for Hyper-Parabolic Partial Differential Equation. Trends in the Thoory and Practicc of Non Linear Analysis, Elsevier, (1983) .

[28] C. Stéphane, Tikhonov Regularization, Département de Mathématiques, Université d'Évry Val d'Essonne, 91025 Évry Cedex, France, September 19, (2008) .

[29] A. Tikhonov .V, Arsenine, Méthode de résolution de problèmes mal posés, Mir,Moscou, (1977).

[30] V. Trenoguine, Analyse Fonctionnelle,Tradiction Française Editions Mir Moscou,(1985) .

[31] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, (1980).

[32] N. Zabaras, Inverse Problem in Heat Transfer, Materials Process Design and Control Laboratory, Sibley School of Mechanical and Aerospace Engineering,Cornell University,Ithaca, New York, USA.

ABSTRACT

In this work we study a class of ill-posed problems, with initial condition, modeled by an abstract parabolic differential equation. For this class of problems, one could obtain the existence, uniqueness and continuous dependence on the data, of the classical solution of the approximate problem. We will employ the quasi-boundary value method, perturbing the initial condition, to form an approximate problem depending on a small parameter. We show that the approximate problem is well posed. We also obtain estimates of the solution of the approximate problem and a convergence result of the solutions u_α on [0, T]. Finally, we give explicit convergence rates.

RESUME

Dans ce travail on a étudié une classe de problèmes mal posés, avec condition initiale, modélisé par une équation différentielle parabolique abstraite. Pour cette classe de problèmes, on a pu obtenir l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport aux données, de la solution classique du problème approximatif. Nous emploierons la méthode de valeur quasi-limites où nous perturbons la condition initiale pour former un problème approximatif dépendant d'un petit paramètre. On montre que les problèmes approximatifs sont bien posés. On donne une estimation de la solution approchée ainsi que la convergence des solutions u_α sur [0, T] vers la solution du problème original. Et finalement on établie l'estimation de l'erreur de convergence.

ملخص

في هذا العمل ندرس صنف من مسائل مطروحة بشكل غير جيد مع شروط ابتدائية لمعادلة تفاضلية من الدرجة الأولى. من اجل هذا الصنف من المسائل نحصل على الوجود، الوحدانية و الارتباط المستمر بالمعطيات للحل القوي للمسالة التقريبية. نغير الشروط الابتدائية من اجل تشكيل مسالة تقريبية بوسيط صغير. نبرهن ان المسالة التقريبية موضوعة بشكل جيد. نعطي تقدير للحل التقريبي بالإضافة لتقارب هذه الحلول نحو حل المسالة الأصلية.

و في الأخير نجد تقدير خطا التقارب.