6- تمارين :

1- التمرين الأول :

يسقط مظلي في اللحظة $t = 0$ بسرعة ابتدائية معدومة ، ويصل إلى سرعة ثابتة قيمتها $6,5\ m/s$.

1- مثل القوى المؤثرة على المظلي ومظلته.

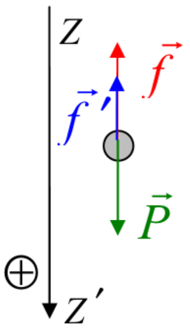
2- بإهمال دافعة أرخميدس واعتبار قوى الحتكاك من الشكل $f = kv^2$ ، أوجد المعادلة التفاضلية لحركة المظلي مع مظلته .

3- برر ثبات سرعة المظلي بعد بلوغه السرعة الحدية $6,5\ m/s$.

4- باعتبار كتلة المظلي مع مظلته هي $M = 90\ kg$ وتسارع الجاذبية $g = 9,8\ m/s^2$ حدد عبارة قوة الأحتكاك f .

5- إذا كانت عبارة السرعة في المجال الزمني $0 \le t \le 5s$ من الشكل $v = 2\sqrt{t}$ ، أوجد المسافة التي قطعها المظلي خلال الـــسقوط الذي دام $5\ min$ كاملة .

** حل التمرين الأول :



1- تمثيل القوى كما في الشكل :

2- المعادلة التفاضلية :

بتطبيق نظرية مركز العطالة $m\vec{a} = \Sigma\vec{F}$ أي $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f} + \vec{f}'$

بإهمال دافعة أرخميدس والاسقاط على المحور الشاقولي النازل فإن:

$m\ddot{x} = mg - kv^2$ ومنه $\dfrac{d^2x}{dt^2} = g - \dfrac{k}{m}(\dfrac{dx}{dt})^2$

3- في بداية سقوط جملة المظلي مع مظلته تتزايد سرعة الجملة فتتزايد قوة الأحتكاك حتى تصبح شدتها مساوية لشدة قوة ثقلها أي : $(f = mg)$ ومنه $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} = \vec{0}$ وعليه $v = cte$ وفق مبدأ العطالة .

4- عند بلوغ السرعة الحدية : $mg - kv^2 = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{mg}{v^2} = 20.9kg/m$ و منه $f = 20,9v^2$

5- المسافة المقطوعة : $x = x_1 + x_2$ ومنه : $x = \int_0^5 v_1 dt + v_2 t_2$ أي : $x = \int_0^5 2\sqrt{t}dt + 6,5t_2$

نجد : $x = \left[2.\dfrac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^5 + 6.5(60x5 - 5)$ ومنه : $x = 14.9 + 1917.5 \approx 1932m$

2- التمرين الثاني :

قمر اصطناعي $Spot4$ كتلته $m = 2800Kg$ يرسم مسار دائري نصف قطره r بالنسبة لمركز الأرض حيث $r = (832 + R_T)Km$

1 – أذكر عبار قوة الجذب العام التي تطبقها الأرض على القمر الصناعي .

2 – بين أن حركة القمر الصناعي دائرية منتظمة .

3 – بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في المرجع المركزي الأرضي أوجد العبارة الحرفية للسرعة الخطية v للقمر الصناعي في مداره ثم أحسب قيمتها .

4 – هل سرعة القمر الصناعي في مداره تتعلق بكتلته أم بارتفاعه ؟ .

5 – أوجد عبارة دور هذا القمر الصناعي T حول الأرض بدلالة ثابت الجذب العام G وكذا كتـــلة الأرض M_T و نصف قطر مداره r . هل يمكن اعتبار هذا القمر الصناعي جيو مستقر ؟ .

6 – ما هو القانون الذي يمكن استنتاجه من عبارة الدور السابقة ؟ .

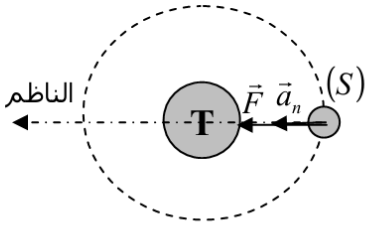
يعطى : $G = 6.67x10^{-11}N.m^2/Kg^2$ و $R_T = 6400Km$ و $M_T = 6x10^{24}Kg$.

** حل التمرين الثاني :

1 – عبارة قوة الجذب العام التي تطبقها الأرض على القمر : $\rightarrow (1)$ $F_{T/S} = Gx\dfrac{M_T.m}{r^2}$

2– بمأن القمر الصناعي يخضع إلى قوة وحيدة جاذبة مركزية موجهة نحو مركز الأرض و هي قوة الجذب العام التي تطبقها الأرض ، فالتسارع المكتسب يكون ناظميا $(\vec{a}_n)$ و منه الحركة دائرية منتظمة.

3 – العبارة الحرفية للسرعة : الجملة المدروسة هي القمر الصناعي (S) و المرجع مركزي أرضي نعتبره غاليليا ، تكون القوة المطبقة هي قوة جذب الأرض للقمر .



بتطبيق قانون نيوتن الثاني : $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftarrow \vec{F}_{T/S} = m\vec{a}$

بالاسقاط على الناظم نجد أن : $Gx\dfrac{M_T.m}{r^2} = ma_n \Rightarrow G\dfrac{M_T}{r^2} = \dfrac{V^2}{r}$

و منه نجد : $\rightarrow (2)$ $V = \sqrt{\dfrac{G.M_T}{r}}$

قيمتها : $V = \sqrt{\dfrac{6.67x\,10^{-11}x\;6x\,10^{24}}{(832+6400)x\,10^3}} \longleftarrow V \approx 7.4Km/S$

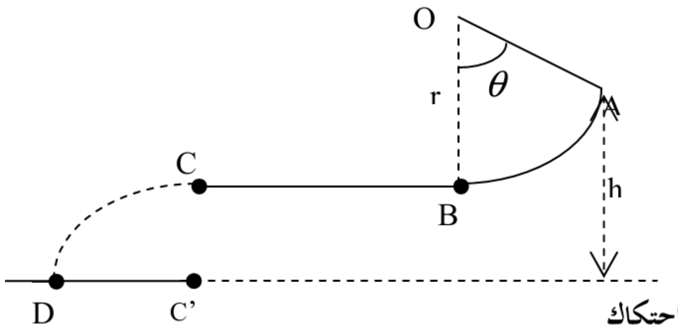
4 – حسب العلاقة (2) نلاحظ أن عبارة السرعة لا تتعلق بكتلة القمر بل بارتفاعه عن سطح الأرض لأن : $r = R + h$

5 – عبارة دور القمر الصناعي : لدينا : $T = \dfrac{2.\pi r}{V} \Leftarrow \rightarrow (3)$ $T = 2.\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{G.M_T}}$ قيمته : $T = 1.70h$

* لا يمكن اعتبار هذا القمر جيو مستقر لأن الدور المداري له غير مساوي لـــ $T = 24h$.

يمكن كتابة العلاقة (3) على النحو التالي : $T^2 = 4.\pi^2 x\dfrac{r^3}{G.M_T} \longleftarrow \dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4.\pi^2}{G.M_T}$ و هو قانون كيبلر الثالث

2– التمرين الثالث :



يتزلق جسم صلب (S)، يمكن اعتباره نقطيا، كتلته $m = 0.05kg$ على مسار ABC يقع في المستوى الشاقولي.

AB قوس من دائرة مركزها O و نصف قطرها $r = 0.50m$، وحيث $\theta = 60°$، نعتبر الإحتكاكات مهملة على هذا الجزء.

BC طريق أفقي طوله $BC = 1m$ ، توجد على هذا الجزء قوى احتكاك تكافئ قوة وحيدة و معاكسة لجهة حركة (S) و نعتبرها ثابتة ونرمز لها بـــ $\vec{f}$.

ندفع الجسم (S) من النقطة A بسرعة ابتدائية مماسية للمسار عند النقطة A $\|\vec{V}_A\| = 12m.s^{-1}$.

1. أحسب القيمة $\|\vec{V}_B\|$ لسرعة الجسم (S) عند النقطة B .

2. يصل (S) إلى النقطة C بسرعة $\|\vec{V}_C\| = 2{,}50m.s^{-1}$.

– أحسب قيمة قوة الاحتكاك $\vec{f}$ على المسار BC .

3. يغادر (S) المسار BC عند النقطة C ليسقط في الهواء، بإهمال تأثير الهواء على الجسم (S) :

أكتب معادلة مسار المتحرك في المعلم $(C\vec{x}, C\vec{y})$ معتبرا مبدأ الأزمنة لحظة مرور الجسم (S) بالنقطة C .

4. في أي لحظة يصل (S) إلى الأرض علما أن A ترتفع عن الأرض بـ $h = 2m$ ؟

5. أحسب المسافة الأفقية $C'D$ حيث D هي النقطة التي يصطدم عندها الجسم (S) بالأرض . يعطى : $g = 10m.s^{-2}$

** حل التمرين الثالث :

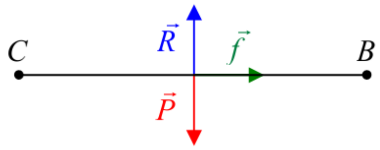
1- حساب $\left\|\vec{V}_B\right\|$: بتطبيق مبدأ إنحفاظ الطاقة للجملة(جسم + أرض)

$$E_A + E_{reçue} - E_{cédée} = E_B \longrightarrow (\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A) + 0 - 0 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

حيث: $h_A = r(1-\cos\theta)$ و منه: $v_B = \sqrt{2gr(1-\cos\theta)+v_A^2} \longrightarrow v_B = 12,20 m\,s^{-1}$

2. شدة قوة الاحتكاك $\vec{f}$: حسب قانون الطاقة الحركية : $\frac{1}{2}mv_B^2 + 0 - f\times BC = \frac{1}{2}mv_C^2$

و منه: $f = \dfrac{\frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_C^2\right)}{BC} \longrightarrow f = 3,57N$.



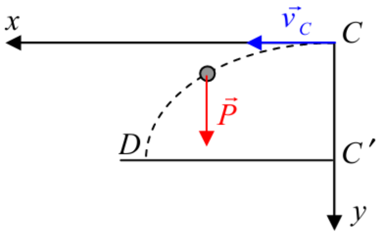
3. معادلة المسار:

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P} = m\vec{a}$

$C\vec{x}$: $\{x = v_c t = 2,50t.....(1) \ , \ a_x = 0\}$

$C\vec{y}$: $\left\{y = \frac{1}{2}gt^2 = 5t^2.....(2) \ , \ a_y = g\right\}$

من (1) و (2) ⇐ $y = 0,8x^2$.



4. إيجاد اللحظة لما $h = 2m$.

$CC' = 2 - 0,25 = 1,75m$: عند $D \rightarrow y = 1,75m$ ومنه $\sqrt{\frac{1,75}{5}} = \sqrt{\frac{y_D}{5}} = t_D \Leftarrow y_D = 5t_D^2 \Rightarrow$ ⇐ $t_D \approx 0,59s$

5. حساب المسافة $C'D$:

لدينا $x = 2,5t$ ⇐ $x_D = 2,5t_D$. ومنه $x_D = 2,5\times 0,59$ $C'D \approx 1,48m$

4- التمرين الرابع :

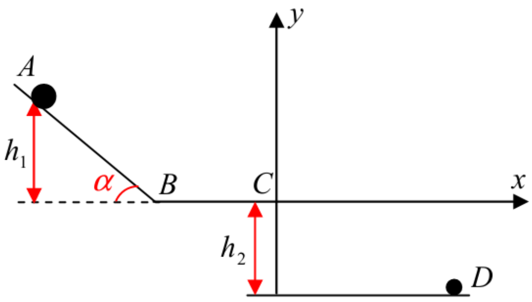
نأخذ المستوى الأفقي BC كمرجع لقياس الارتفاعات $(Z_C = 0, E_{pp} = 0)$.

1/ أعط عبارة الطاقة الكامنة الثقالية عند النقطة A وتحقق أن $\left(E_{pp} = 2.5x10^{-2}J\right)$

2 / استنتج عبارة طاقة الجملة عند A. ما قيمتها ؟

3/ استنتج مع التعليل قيمة طاقة الجملة عند B .

4/ بين أن عبارة سرعة الجسم عند B هي $V_B = \sqrt{2.g.AB.\sin\alpha}$.



دراسة حركة الجسم عند النقطة C:

نعتبر مبدأ الأزمنة لحظة مرور الجسم بالنقطة C. و نأخذ السرعة عند C : $V_0 = \sqrt{5}m/S$.

1/ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم بعد مغادرته النقطة C. أوجد :

أ- العبارة الحرفية لكل من مركبتي شعاع التسارع a_x و a_y .

ب- عين عبارة كل من مركبتي شعاع السرعة V_x و V_y .

2/ تعطى مركبتا شعاع الموضع في المعلم (Cx, Cy) كالتالي:

$$\begin{cases} x = \left(\sqrt{2.g.AB.\sin\alpha}\right)t \rightarrow (1) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 \rightarrow (2) \end{cases}$$ - استنتج معادلة المسار .

3/ ما هي المسافة AB الواجب اختيارها حتى يسقط الجسم عند D ذات الفاصلة $x_D = 57cm$.

** حل التمرين الرابع :

1 – عبارة الطاقة الكامنة الثقالية عند A : لدينا $E_{PP_A} = m.g.h_1$ حيث $(h_1 = AB\sin(\alpha))$

و منه : $E_{PP_A} = 0.010x\,10x\,0.5x\,\sin 30°$ $\longleftarrow$ $E_{PP_A} = 2.5x\,10^{-2}J$

2 – عبارة طاقة الجملة عند A : $\Rightarrow E_{m_A} = E_{PP_A}$ $E_{m_A} = E_{PP_A} + E_{C_A}$ لأن $(E_{C_A} = 0)$ و منه $E_{m_A} = 2.5x\,10^{-2}J$

3 – استنتاج طاقة الجملة عند B :

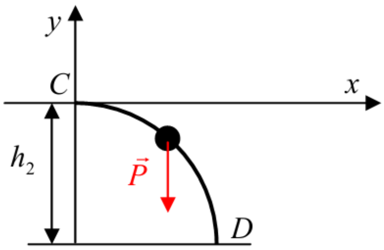
الاحتكاكات مهملة ، فالجملة شبه معزولة فهناك انحفاظ في الطاقة الميكانيكية أي أن : $E_{m_A} = E_{m_B} = 2.5x\,10^{-2}J$

4 – عبارة السرعة عند B : باعتبار المستوي الأفقي BC كمرجع لقياس الارتفاعات فإنه

حسب انحفاظ الطاقة نجد أن : $E_{PP_A} = E_{C_B} \Rightarrow m.g.AB\sin\alpha = \frac{1}{2}.m.v_B{}^2$ ومنه $v_B = \sqrt{2.g.AB\sin\alpha}$

–* دراسة حركة الجسم عند النقطة C :

1 – أ) العبارة الحرفية لمركبتي شعاع التسارع : الجملة المدروسة الجسم (S) و بإسناد الدراسة لمرجع غاليلي مرتبط بالأرض تكون القوة المطبقة هي $\vec{P}$ فقط .



بتطبيق قانون نيوتن الثاني : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m.\vec{a}$

بالاسقاط على المحور Cx:

$0 = m.a_x \Rightarrow a_x = 0$ حركة مستقيمة منتظمة .

بالاسقاط على المحور Cy :

$-p = m.a_y \Rightarrow a_y = -g = cst$ حركة مستقيمة متغيرة بالانتظام .

ب) عبارة مركبتي السرعة : $v_x = v_C$ و $v_y = -g\,t$

2 – مسار الحركة : نستخرج الزمن من العلاقة (1) و تعويضها في العلاقة (2) نجد أن :

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x^2}{2.g.AB\sin\alpha}\right) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x\,\frac{x^2}{AB.\sin\alpha} \rightarrow (3)$$ و هي معادلة قطع مكافئ .

3 – المسافة AB من أجل $x_D = 0.57m$ بالتعويض في العلاقة (3) حيث $h_2 = -0.40m$ نجد :

$$h_2 = -\frac{1}{4}x\,\frac{x_D{}^2}{ABx\,0.5} \longrightarrow AB \approx 0.4m$$

6–التمرين السادس :

تسمح المعادلة التفاضلية $\frac{dx}{dt} + \alpha \cdot x = \beta$ بوصف عدد كبير من الظواهر الفيزيائية المتغيرة خلال الزمن: الشدة، التوتر، السرعة، مقدار يميز النشاط الإشعاعي.

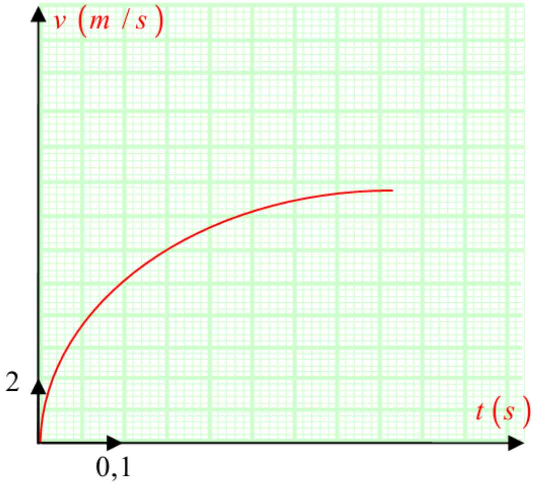
نذكر أن هذه المعادلة رياضيا تقبل على الخصوص حلين هما:

$x(t) = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$....(1) إذا كان $\beta \neq 0$ و $x(t) = X_0 \cdot e^{-\alpha t}$.....(2) إذا كان $\beta = 0$.

استغلت حركة سقوط كرة معدنية، كتلتها m ، في مائع كتلته الحجمية ρ_f بواسطة برمجية خاصة التي سمحت برسم تطور سرعة مركز العطالة بدلالة الزمن، فتم الحصول على المنحنى البياني التالي:

1– استغلال معادلة المنحنى البياني :

المعادلة الرياضية المرفقة بالمنحنى البياني تحقق العلاقة :



$v(t)=1{,}14\cdot(1-e^{-\frac{t}{0{,}132}})$ ، حيث $v(t)$ مقدرة بالـ $m\cdot s^{-1}$

و الزمن t بالثانية s . هذه المعادلة تتطابق مع المعادلة رقم (1) .

أ/ عين قيمة كل من α و النسبة $\frac{\beta}{\alpha}$. أعط، بدون تبرير، وحدة النسبة $\frac{\beta}{\alpha}$.

ب/ أثبت أن المعادلة التفاضلية التي تقبل كحل المعادلة $v(t)$ تحقق الكتابة العددية التالية: $\frac{dv}{dt}+7{,}58v=8{,}64$.

2– دراسة الظاهرة الفيزيائية:

أ/ أحص القوى المطبقة على الكرة، ثم مثلها في شكل.

ب/ طبّق القانون الثاني لنيوتن على الجملة المتمثلة في الكرة.

3– الكرة المستعملة في تحقيق الدراسة هي كرة من فولاذ كتلتها $m=32g$ وحجمها V .

تسارع الجاذبية في مكان الدراسة هو $g=9{,}80m.s^{-2}$. تعطى قوى الاحتكاك المطبقة على الكرة بالعبارة: $\vec{f}=-k\cdot\vec{v}$.

أ/ باستعمال محور شاقولي موجه نحو الأسفل، أثبت أن المعادلة التفاضلية $v(t)$ تحقق : $\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=\left(1-\frac{\rho_f\cdot V}{m}\right)\cdot g$.

ب/ استنتج العبارة الحرفية للمعاملين α و β في المعادلة (1) .

ج/ ما هي قيمة المعامل β إذا كانت دافعة أرخميدس معدومة؟

د/ باستعمال المعادلة الموجودة في السؤال **1**–ب ، بين أن هذه القوة يجب أخذها في الحسبان.

** حل التمرين السادس :

1.أ. عين قيمة كل من α و النسبة $\frac{\beta}{\alpha}$:

بمطابقة المعادلة $v(t)=1{,}14\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{0{,}132}}\right)$ مع المعادلة $x(t)=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\left(1-e^{-\alpha t}\right)$ ينتج: $\frac{\beta}{\alpha}=1{,}14$ و $\alpha=\frac{1}{0{,}132}$

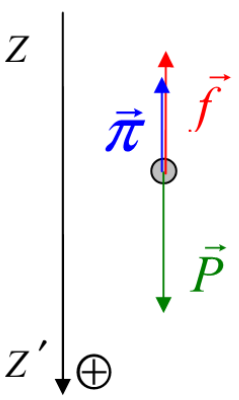
الحد $\left(1-e^{-\frac{t}{0{,}132}}\right)$ في عبارة التسارع ليس له بعدا، إذن النسبة $\frac{\beta}{\alpha}$ متجانسة مع السرعة وبالتالي تقدر بوحدة السرعة أي $m.s^{-1}$.

ب. المعادلة $v(t)=1{,}14\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{0{,}132}}\right)$ هي حل لمعادلة تفاضلية من النوع : $\frac{dx}{dt}+\alpha\cdot x=\beta$

بالمطابقة $x\Leftrightarrow v$ ، أي: $\frac{dv}{dt}+\alpha\cdot v=\beta$ لكن: $\alpha=7{,}58$ و $\frac{\beta}{\alpha}=1{,}14$ أي $\beta=1{,}14\alpha$ إذن: $\beta=1{,}14\times7{,}58=8{,}64$

بتعويض α وβ بقيمتها نصل إلى العبارة المعطاة $\frac{dv}{dt}+7{,}58v=8{,}64$.

2.أ. الجملة المدروسة هي الكرة في المرجع الأرضي الذي نفترضه غاليليا.



القوى المطبقة على الكرة هي:

– الثقل $\vec{P}=m\cdot\vec{g}$ ، منحاها شاقولي و اتجاهها نحو الأسفل .

– دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ ، منحاها شاقولي و اتجاهها نحو الأعلى .

– قوى الإحتكاك $\vec{f}$ ، منحاها شاقولي و اتجاهها نحو الأعلى .

ب. بتطبيق قانون نيوتن الثاني: $\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{f} + \overrightarrow{\pi} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$

بالإسقاط على المحور الشاقولي الموجه نحو الأسفل: $P - f - \pi = m \cdot a$.

3.أ. بالتعويض عن f و π في العبارة الأخيرة، نجد : $m \cdot g - k \cdot v - \rho \cdot V \cdot g = m \cdot \frac{dv}{dt} \Leftarrow g\left(m - \rho \cdot V\right) - k \cdot v = \frac{dv}{dt}$

و بقسمة طرفي المعادلة على m ينتج : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \cdot v = \left(1 - \frac{\rho \cdot V}{m}\right) . g$

ب. بمطابقة المعادلة السابقة مع المعادلة $\frac{dx}{dt} + \alpha \cdot x = \beta$ ، نجد: $\beta = \left(1 - \frac{\rho \cdot V}{m}\right) . g$ و $\alpha = \frac{k}{m}$

ج. إذا كانت دافعة أرخميدس معدومة ، فإن: $\rho \cdot V = 0$ و منه : $\beta = \left(1 - \frac{0}{m}\right) . g$ ، أي أن: $\beta = g$ ومنه: $\beta = 9,80\, m\, s^{-2}$

** نلاحظ في المعادلة التفاضلية: $\frac{dv}{dt} + 7,58\, v = 8,64$ أن $\beta = 8,64\, m.s^{-2}$ إذن: $\beta \neq g \neq 9,80 m.s^2$

و عليه فإن يجب أخذ دافعة أرخميدس في الحسبان حيث تبلغ شدتها : $\pi = m \cdot \left(g - \beta\right) = 3,7 \times 10^{-2}\, N$