ملحق خاص بالوحدات الإضافية الخاصة بشعبتي الرياضيات والتقني رياضي

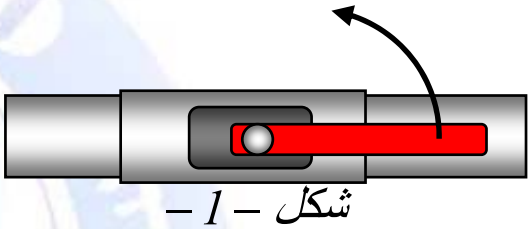
1-الوحدة الإضافية في مجال الميكانيك:

الوحدة-3 : العمل والطاقة الحركية (حالة حركة دورانية)

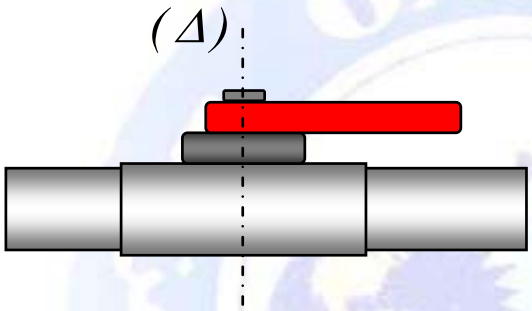
1 – عزم قوة بالنسبة لمحور ثابت

1 – 1 مفهوم العزم

يمثل الشكل -1- منظر من الأعلى لحنفية تستعمل لقطع الماء الذي يجري في الأنبوب بينما الشكل -2- يمثل نظرة جانبية لنفس الحنفية.



شكل – 1 –



شكل -2-

نشاط 1

نريد غلق الحنفية و من أجل هذا يجب تدوير مقبضها كما هو مبين على الشكل -1-

1 – نطبق قوة كما هو مبين على الشكل التالي:

– هل تغلق الحنفية؟

– كيف هو حامل القوة بالنسبة لمحور الدوران (Δ)؟

2 – نطبق القوة كما هو مبين على الشكل التالي:

– هل تغلق الحنفية؟

– كيف هو حامل القوة بالنسبة لمحور الدوران (Δ)؟

3 – نطبق القوة كما هو مبين على الشكل التالي:

– هل تغلق الحنفية؟

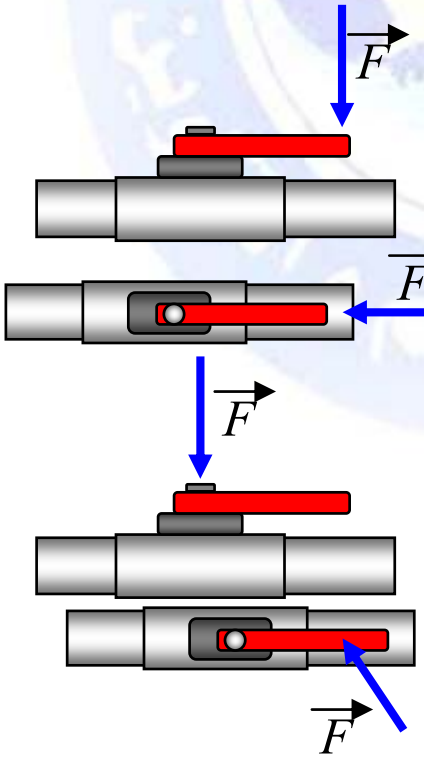
– كيف هو حامل القوة بالنسبة لمحور الدوران (Δ)؟

4 – نطبق القوة كما هو مبين على الشكل التالي:

– هل تغلق الحنفية

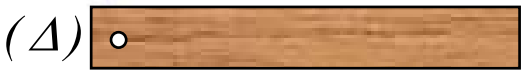
– كيف هو حامل القوة بالنسبة لمحور الدوران (Δ)

مقارنة بالحالات الثلاثة السابقة؟



نشاط 2

1 – هل يكفي تطبيق قوة على الجسم المبين على



الشكل لجعله يدور حول المحور (Δ)؟

2 – إذا كان الجواب لا ، ما الذي يجب فعله لتحقيق هذا الغرض؟

تحليل النشاط

1 – وجود قوة لوحدها لا تكفي لتدوير جسم كما رأينا من خلال النشاط 1.

لتدوير جسم يجب أن تكون هناك قوة و يجب أن تطبق هذه القوة بكيفية مناسبة.

2 – لكي تكون قوة ما قادرة على تدوير جسم حول محور ثابت يجب أن لا:

– يكون حامل القوة موازي لمحور الدوران

– يكون حامل القوة لا يقطع محور الدوران

– تطبق القوة على محور الدوران.

1 – 2 عبارة عزم قوة بالنسبة لمحور دوران Δ

عزم قوة بالنسبة لمحور الدوران يعطى بالعلاقة

$$M_{(\Delta)}(\overrightarrow{F}) = F \cdot d$$

و يقدر في جملة الوحدات الدولية بوحدة $N \cdot m$ و هو مقدار جبري.

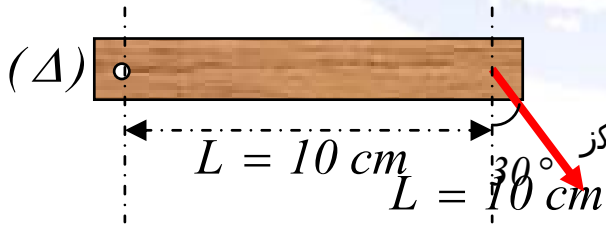
المقدار (d) هو البعد العمودي الموجود بين حامل القوة و مركز الدوران.

يقد (d) بالمتر و شدة القوة F بالنيوتون.

كيف يعين المقدار (d)؟

مثال:

نريد تدوير الجسم صلب و من أجل هذا نطبق عليه قوة كما هو مبين على الشكل. شدة القوة المطبقة عليه $F = 5\ N$ و البعد بين نقطة تطبيق القوة و مركز الدوران (O) الذي يمر منه المحور (Δ) هو $L = 10\ cm$



1 – هل هذه القوة باستطاعتها تدوير الجسم الصلب؟ اشرح؟

2 – أحسب عزم هذه القوة بالنسبة للمحور (Δ)

الإجابة:

1 – نعم هذه القوة باستطاعتها تدوير الجسم الصلب لأن:

– حاملها لا يوازي محور الدوران

– حاملها لا يقطع محور الدوران

– القوة ليست مطبقة على محور الدوران.

2 – حساب عزم القوة بالنسبة لمحور الدوران

نطبق قانون عزم قوة:

$$M_{(\Delta)}(\overrightarrow{F}) = F \cdot d$$

(d) هو البعد العمودي الموجود بين حامل القوة و محور الدوران (Δ).

من الشكل نجد: $d = L.\cos 30$

$$d = 8.67 cm$$

و منه تكون قيمة عزم القوة:

$$M_{(\Delta)}(\overrightarrow{F}) = 5 \times 0,867 \Rightarrow$$

$$M_{(\Delta)}(\overrightarrow{F}) = 4,34\ N.m$$

2 – عزم مزدوجة ثابتة بالنسبة لمحور الدوران Δ

نشاط 1:

يمثل الشكل المقابل قطعة خشبية بإمكانها الدوران حول محور ثابت (Δ).

نؤثر على هذه القطعة بقوتين لهما نفس الشدة متعاكسين في الاتجاه و حاملهما متوازيين و لا ينطبقان على بعضهما البعض

1 – كيف هي محصلة القوتين ؟

2 – استنتج تعريف مزدوجة قوتين.

تحليل النشاط:

1 – بما أن للقوتين نفس الشدة ، اتجاهين متعاكسين و حاملهما متوازيين فإن محصلة القوتين تكون منعدمة

2 – تعريف مزدوجة قوتين:

إذا كانت محصلة قوتين منعدمة و ليس للقوتين نفس الحامل نقول أن القوتان تشكلان مزدوجة.

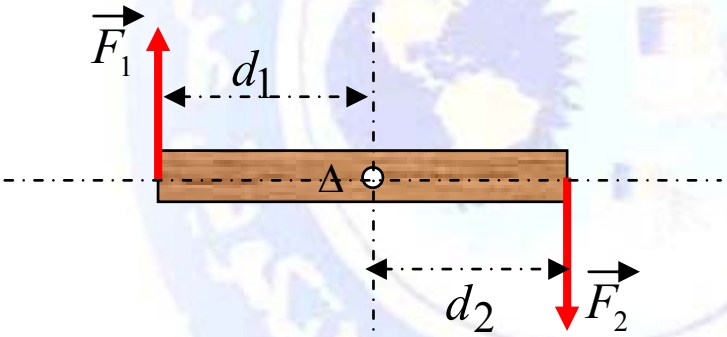
نشاط 2:

نريد تدوير القطعة الخشبية السابقة كما هو مبين على الشكل، و من أجل هذا نطبق مزدوجة قوتين بحيث $F_1 = F_2 = F = 1N$.

1 – أعط عبارة عزم كل قوة.

2 – أجمع العبارتين السابقتين.

3 – استنتج عبارة عزم المزدوجة.



تحليل النشاط:

1 – عبارة عزم كل قوة:

عبارة عزم القوة التي شدتها F_1 : $M_\Delta(\overrightarrow{F_1}) = F_1.d_1$

عبارة عزم القوة التي شدتها F_2 : $M_\Delta(\overrightarrow{F_2}) = F_2.d_2$

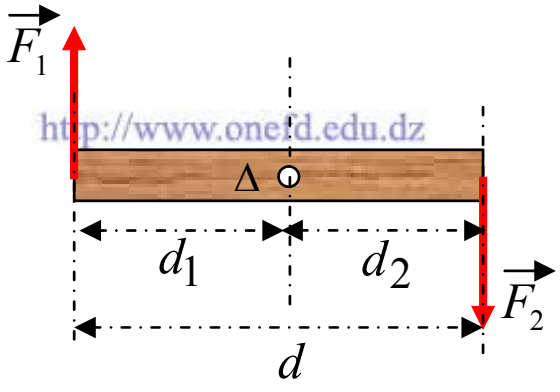
2 – بجمع العبارتين نجد:

$$M_\Delta(\overrightarrow{F_1}) + M_\Delta(\overrightarrow{F_2}) = F_1.d_1 + F_2.d_2 = F(d_1 + d_2) = F.d$$

$$M_\Delta(\overrightarrow{F_1}) + M_\Delta(\overrightarrow{F_2}) = F.d$$

استنتاج عبارة عزم مزدوجة:

عزم مزدوجة ثابتة في الشدة يساوي جداء شدة

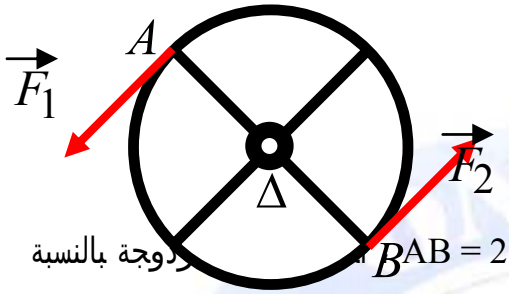


إحدى القوتين مضروبة في قيمة البعد العمودي
الموجود بين حامل القوتين:

$$M_{\Delta}(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = F \cdot d$$

مثال:

نريد تدوير الجسم الصلب المبين على الشكل المقابل و من أجل هذا نطبق عليه مزدوجة قوتين $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2})$ فيالنقطتين A و B كما هو مبين على الشكلعلما أن $F_1 = F_2 = F = 1,5\ N$ و أن $AB = 25\ cm$ ... مزدوجة بالنسبة للمحور Δ.



الإجابة:

بتطبيق قانون عزم المزدوجة نجد:

$$M_{\Delta}(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = F \cdot d \Rightarrow$$
$$M_{\Delta}(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = F \cdot AB$$
$$M_{\Delta}(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = 1,5 \times 0,25$$

$$M_{\Delta}(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = 37,5\ N \cdot m$$

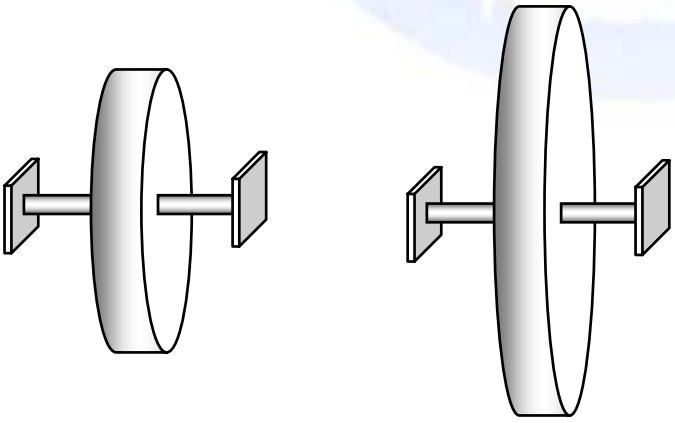
3 – عزم عطالة جسم صلب بالنسبة لمحور:

نشاط 1:

نأخذ قرصين معدنيين، أحدهما أكبر من الآخر ثم نحاول تدويرهما باستعمال نفس القوة.

1 – أيهما يصعب تدويره؟

2 – ماذا تستنتج؟

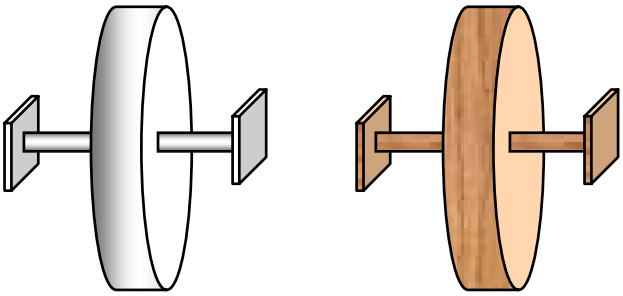


تحليل النشاط:

1 – القرص الأكبر هو الذي يبدي صعوبة أكبر للتدوير

2 – نستنتج أن صعوبة تدوير جسم تتعلق بأبعاده

نشاط 2:



نأخذ قرص من الخشب و الآخر معدني، لهما نفس الأبعاد. نحاول تدوير كل قرص باستعمال نفس القوة.

1 – أيهما يصعب تدويره؟

2 – ماذا تستنتج؟

تحليل النشاط:

1 – القرص المعدني يبدي صعوبة للتدوير أكبر من الصعوبة التي يبديها القرص الخشبي.

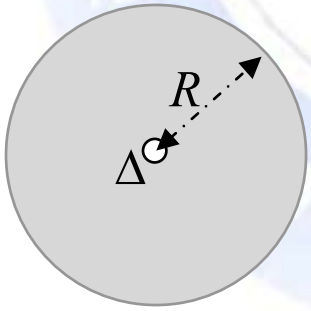
2 – صعوبة تدوير جسم تتعلق بكتلة الجسم.

مفهوم عزم العطالة بالنسبة لمحور (Δ).

عندما نحاول تدوير جسم حول محور دوران (Δ) فإن هذا الجسم يواجهنا بصعوبة و يقاومنا. تتعلق هذه الصعوبة بكتلة الجسم و ببعده الذي يميزه.

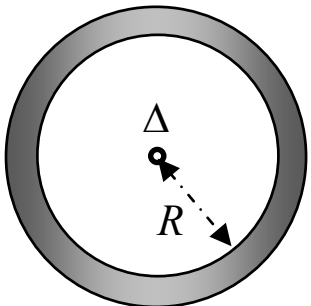
عزم عطالة جسم بالنسبة لمحور (Δ) يمثل الصعوبة التي تواجهنا عندما نحاول تدوير هذا الجسم حول المحور (Δ).

يعطى عزم عطالة بعض الأجسام الشهية و هذا بالنسبة لمحور (Δ) يجتازها من مركز كتلتها



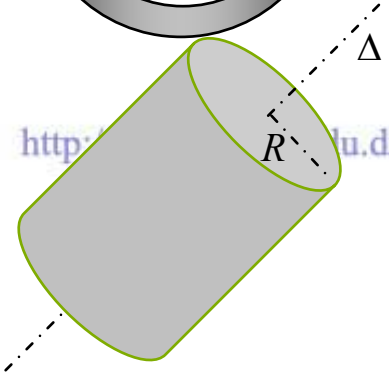
1 – عزم عطالة قرص مملوء و متجانس بالنسبة لمحور (Δ) يمر من مركزه و عمودي على سطحه

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} M . R^2$$



2 – عزم عطالة قرص فارغ بالنسبة لمحور (Δ) يمر من مركزه و عمود على سطحه كتلته موزعة بانتظام على محيطه الخارجي

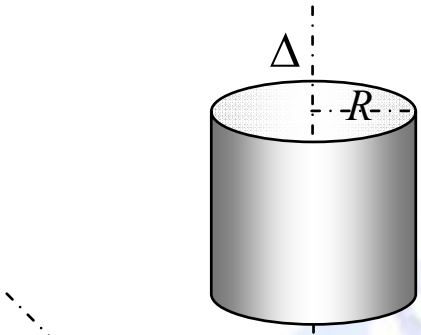
$$J_{\Delta} = M . R^2$$



3 – عزم عطالة اسطوانة مملوءة و متانسة

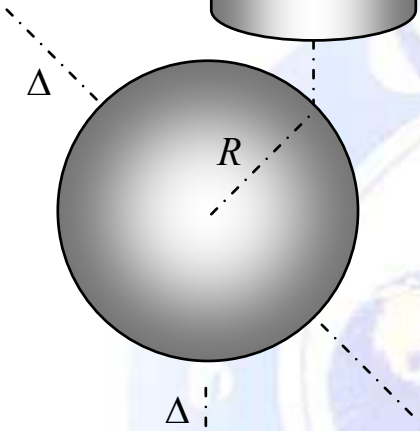
بالنسبة لمحور عمودي على مساحة قاعدتها

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} M .R^2$$



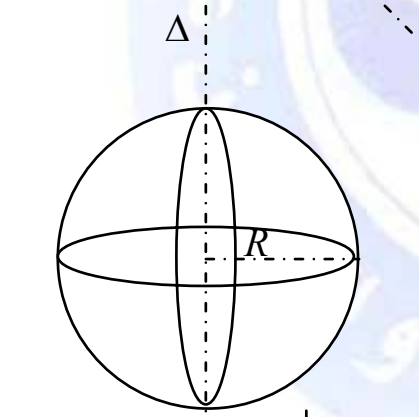
4 – عزم عطالة اسطوانة فارغة بالنسبة لمحور عمودي سطح قاعدتها. كتلتها موزعو بانتظام على محيطها الخارجي

$$J_{\Delta} = M .R^2$$



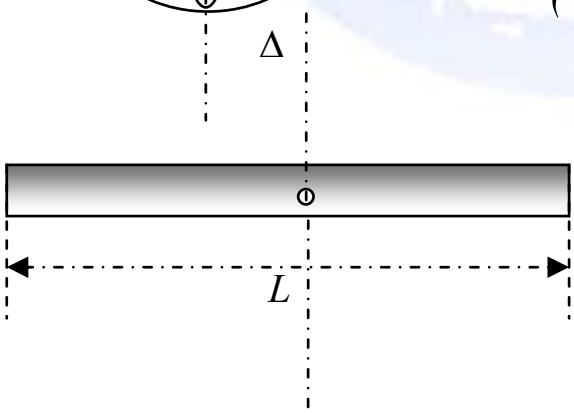
5 – عزم عطالة كرة مملوءة و متجانسة بالنسبة لمحور (Δ) يجتازها من أحد أقطارها

$$J_{\Delta} = \frac{2}{3} M .R^2$$



6 – عزم عطالة كرة مجوفة بانسبة لمحور (Δ) يمر من أحد أقطارها

$$J_{\Delta} = M .R^2$$

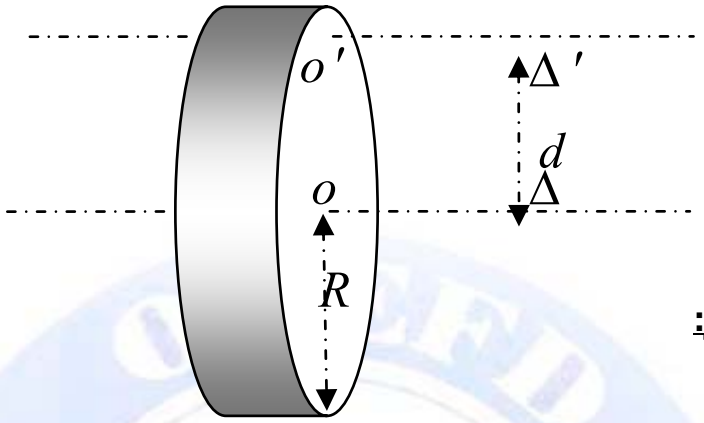


7 – عزم عطالة ساق متجانسة بالنسبة لمحور (Δ) يجتازها من منتصفها

$$J_{\Delta} = \frac{1}{12} M .R^2$$

نظرية هويغنز:

تسمح هذه النظرية بحساب عزم عطالة جسم صلب بالنسبة لمحور آخر (Δ') يوازي المحور (Δ) و لكن لا يمر من مركز كتلة الجسم الصلب.



نص نظرية هويغنز:

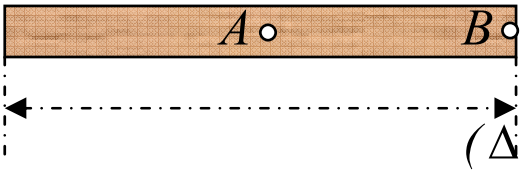
عزم عطالة جسم صلب بالنسبة لمحور (Δ') لا يمر من مركز كتلته يساوي عزم عطالة هذا الجسم بالنسبة لمحور (Δ) موازي للمحور (Δ') و يمر من مركز كتلته زائد جداء كتلة الجسم مضروبة في مربع المسافة الفاصلة بين المحورين:

$$J_{\Delta'} = J_{\Delta} + M.d^2$$

مثال:

يمثل الشكل المقابل ساق متجانسة كتلتها (m) و طولها (L).

1 – أعط عبارة عزم عطالة الساق بالنسبة لمحور (Δ) يجتازها من مركز كتلتها (A).



2 – استنتج عبارة عزم عطالة الساق بالنسبة لمحور (Δ') يجتازها من النقطة (B) و موازي للمحور (Δ)

3 – علما أن $m = 200\ g$ و $L = 20\ cm$ أحسب عزم عطالة هذه الساق بالنسبة لكل محور .

الإجابة:

1 – عبارة عزم عطالة الساق بالنسبة للمحور (Δ) الذي يجتازها من مركز كتلتها:

$$J_{\Delta} = \frac{1}{12} m \cdot L^2$$

2 – عبارة عزم عطالة الساق بالنسبة لمحور (Δ') يوازي المحور (Δ) و يجتاز الساق من النقطة (B) تستنتج باستعمال نظرية هويغنز:

$$J_{\Delta'} = J_{\Delta} + M.d^2 \Rightarrow J_{\Delta'} = \frac{1}{12} m.L^2 + m.\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

و منه نجد:

$$J_{\Delta'} = \frac{1}{3} m \cdot L^2$$

3 – بالنسبة للمحور (Δ) نجد : $J_{\Delta'} = 3{,}33.10^{-3}\ Kg.m^2$

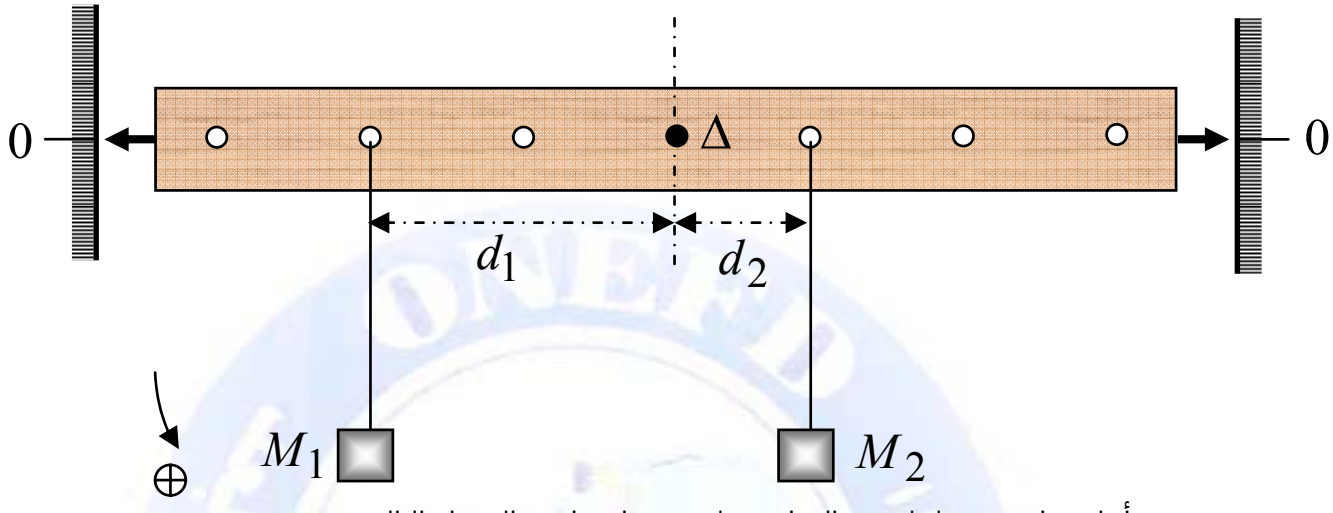
بالنسبة للمحور (Δ') نجد : $J_{\Delta'} = 13{,}33.10^{-3}\ Kg.m^2$

4 – توازن جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت

نشاط:

نعتبر ساق خشبية في حالة سكون بالنسبة لمرجع غاليلي (المرجع المخبري الأرضي مثلا). هذا يعني أن الساق شبه معزولة و بالتالي يكون: $\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$

هذه الساق الخشبية المبينة على الشكل تقبل الدوران حول المحور (Δ). الهدف من هذا النشاط هو البحث عن الشرط الذي يجب تحقيقه حتى لا تدور هذه الساق حول المحور (Δ).



من أجل هذا نقوم بسلسلة من التجارب نلخص نتائجها في الجدول التالي:

1 – أكمل الجدول.

$M_1(Kg)$	0,05	0,1	0,5
$d_1(m)$	0,05	0,2	0,15
$M_\Delta(\overrightarrow{P_1}) = P_1 \times d_1(N.m)$			
$M_2(Kg)$	0,1	0,05	0,3
$d_2(m)$	0.025	0,4	0,25
$M_\Delta(\overrightarrow{P_2}) = P_2 \times d_2(N.m)$			
$\sum M_\Delta(\overrightarrow{F}) = M_\Delta(\overrightarrow{P_1}) + M_\Delta(\overrightarrow{P_2})$			

2 – ما هو الشرط الذي يمكن استنتاجه من خلال هذا النشاط و الذي يجعل الجسم القابل للدوران حول محور ثابت لا يدور؟

تحليل النشاط:

1– أكمال الجدول

نلاحظ أن عزم $\overrightarrow{P_1}$ هو عزم يدير القطعة الخشبية في الاتجاه الموجب المبين على الشكل بينما عزم $\overrightarrow{P2}$ هو عزم يدير القطعة عكس الجهة الموجبة المبينة على الشكل و بذلك يكون عزم هذه القوة عزم مقاوم.

$M_1(Kg)$	0,05	0,1	0,5
$d_1(m)$	0,05	0,2	0,15
$M_\Delta(\overrightarrow{P_1}) = P_1 \times d_1(N.m)$	**0,025**	**0,02**	**0,075**
$M_2(Kg)$	0,1	0,05	0,3
$d_2(m)$	0.025	0,4	0,25
$M_\Delta(\overrightarrow{P_2}) = P_2 \times d_2(N.m)$	**-0,025**	**–0,02**	**–0,075**
$\sum M_\Delta(\overrightarrow{F}) = M_\Delta(\overrightarrow{P_1}) + M_\Delta(\overrightarrow{P_2})$	**0**	**0**	**0**

2 – نلاحظ أن الجسم لا يدور إذا كان المجموع الجبري لعزوم القوى المؤثرة عليه منعدما

4 – 1 – شرط توازن جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت

النتيجة التي يمكن استخلاصها من النشاط السابق هي:

إذا كان بإمكان جسم صلب الدوران حول محور ثابت (Δ) و كان هذا الجسم في حالة توازن ، أي لا يدور، فإن المجموع الجبري لعزوم القوى الخارجية المؤثرة عليه بالنسبة للمحور (Δ) يكون معدوما

$$\sum M_\Delta(\overrightarrow{F}) = 0$$

4 – 2 – الشرط العام لتوازن جسم صلب:

عندما يخضع جسم صلب إلى عدة قوى و يكون متوازنا في مرجع أرضي فإن الشرطان التاليين يكونا محققين:

1 – المجموع الشعاعي لجميع القوى الخارجية المطبقة على الجسم يكون منعدما

$$\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

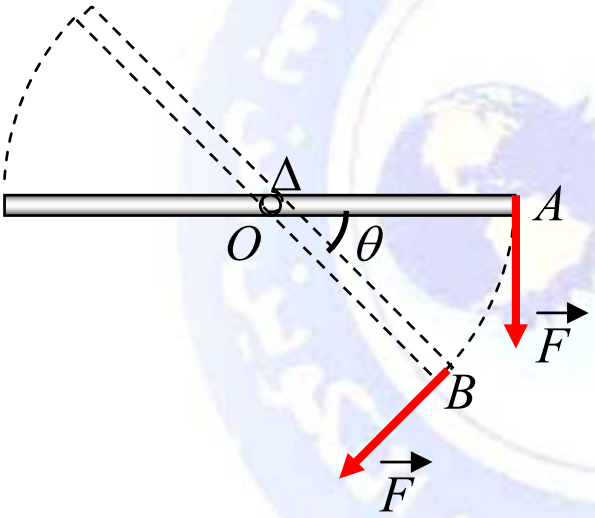
2 – المجموع الجبري لعزوم القوى الخارجية المطبقة على الجسم ، بالنسبة لمحور دورانه، يكون منعدما.

$$\sum M_{\Delta}(\overrightarrow{F}) = 0$$

5 – عبارة عمل عزم قوة ثابتة في الشدة و مماسية للمسار.

نعتبر جسم صلب بإمكانه الدوران حول محور ثابت (Δ) تحت تأثير قوة ثابتة في الشدة و مماسية لمسار نقطة تأثيرها

عندما يدور الجسم تنتقل نقطة تأثير القوة المطبقة من A إلى B و يكون شعاع القوة مماسا في كل لحظة للمسار AB .



نريد من خلال هذه الدراسة إيجاد عبارة عمل عزم القوة انطلاقا من عبارة عمل قوة ثابتة في حالة الحركة الإنسحابية.

نشاط: 1 – نجزئ المسار AB إلى انتقالات عنصرية صغيرة L_1 ، L_2 ... إلخ، بحيث نعتبر إنه خلال كل انتقال عنصري صغير تكون القوة ثابتة و طول شعاع الانتقال يساوي طول الانتقال العنصري الصغير.

2 – أحسب عمل القوة $\overrightarrow{F}$ خلال كل انتقال عنصري

3 – إذا اعتبرنا أن عمل القوة $\overrightarrow{F}$ خلال الانتقال AB هو مجموع أعمل هذه القوى خلال كل انتقال عنصري، أوجد عبارة عمل هذه القوة خلال الانتقال AB .

4 – استنتج عبارة عمل عزم القوة $\overrightarrow{F}$ من أجل دوران الجسم بزاوية θ

تحليل النشاط:

1 – عندما نجزئ المسار AB إلى انتقالات عنصرية صغيرة بحيث تتحقق الشروط المذكورة سابقا يمكن اعتبار أن الزاوية α التي يحصرها شعاع القوة $\vec{F}$ و شعاع الانتقال العنصري تكون تقريبا منعدمة (شعاع القوة مماسي لشعاع الانتقال العنصري) $\alpha \approx 0$ مما يجعل $cos(\alpha) \approx 1$.

2 – عمل القوة من أجل كل الانتقالات العنصرية يكون:

من أجل الانتقال العنصري L_1 : $W_\Delta(\vec{F}) = F.L_1$

من أجل الانتقال العنصري L_2 : $W_\Delta(\vec{F}) = F.L_2$

من أجل الانتقال العنصري L_n : $W_\Delta(\vec{F}) = F.L_n$

3 – عبارة عمل هذه القوة خلال كل الانتقال AB .

نقوم بجمع أعمال القوة $\vec{F}$ التي أنجزت خلال الانتقالات العنصرية السابقة فنحصل على:

$$W_\Delta(\vec{F}) = \sum w_\Delta(\vec{F}) \Rightarrow W_\Delta(\vec{F}) = F.AB$$

4 – نعلم من جهة أخرى أن العلاقة التي تربط قوس دائرة بالزاوية التي يحدها هذا القوس هي:

$$AB = R \times \theta$$

نعوض في عبارة العمل فنجد:

$$W_\Delta(\vec{F}) = F.R.\theta$$

بما أن المقدار $F.R$ يمثل عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة للمحور (Δ)، فإن عبارة عمل قوة ثابتة في الشدة و مماسية للمسار تعطى بالقانون التالي:

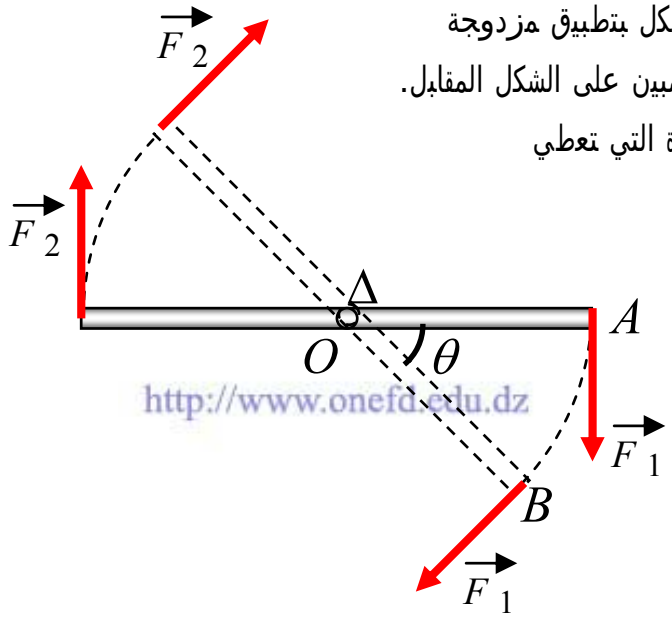
$$\boxed{W_\Delta(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{F}) \times \theta}$$

عبارة عمل عزم مزدوجة ثابتة في الشدة و مماسية للمسار

في هذه الحالة نقوم بتدوير الجسم المبين على الشكل بتطبيق مزدوجة تكون ثابتة في الشدة و مماسية للمسار، كما هو مبين على الشكل المقابل.

نحاول من خلال هذا التحليل الوصول إلى العبارة التي تعطي عمل المزدوجة $(\vec{F_1}, \vec{F_2})$ لما يدور الجسم بزاوية θ.

من أجل هذا نتبع نفس الخطوات التي استعملت في الدراسة السابقة للوصول إلى عمل عزم قوة.



نجزئ المسار إلى انتقالات عنصرية صغيرة بحيث نعتبر
أنه خلال كل انتقال عنصري صغير تبقى القوة ثابتة و طول شعاع الانتقال يساوي طول الانتقال العنصري. نقوم بعد ذلك بحساب عمل كل قوة خلال كل الإنتقال الذي قامت به نقطة تطبيق كل قوة فنصل إلى النتيجة التالية:

$$W(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}) = M_\Delta(\overrightarrow{F_1}).\theta + M_\Delta(\overrightarrow{F_2}).\theta$$

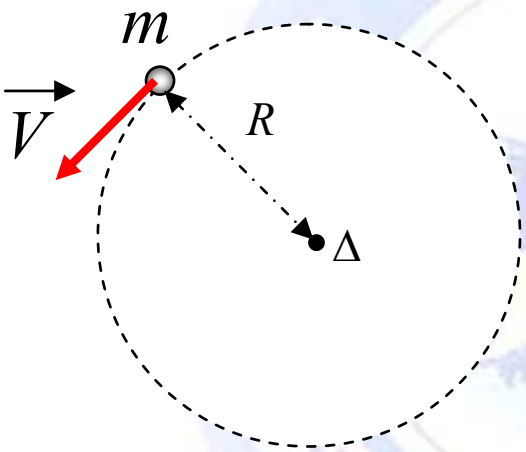
و منه نجد:

$$W(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}) = M_\Delta(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}).\theta$$

6 – عبارة الطاقة الحركية الدورانية لجسم صلب:

6 – 1 – حالة نقطة مادية:

نشاط:



نعتبر نقطة مادية كتلتها m و قيمة سرعتها عند لحظة (t) هي (V).

1 – أعط عبارة الطاقة الحركية لهذه النقطة المادية.

2 – علما أن العلاقة التي تربط السرعة الخطية (V) بالسرعة الزاوية (ω) هي $\omega = \frac{V}{R}$ ، استنتج عبارة الطاقة الحركية الدورانية للنطة المادية بدلالة عزم عطالة النقطة المادية بالنسبة للمحور (Δ) و السرعة الزاوية (ω)

تحليل النشاط:

1 – عبارة الطاقة الحركية للنقطة المادية عند اللحظة (t) تعطى بالعلاقة:

$$E_c = \frac{1}{2}.m.V^2$$

2 – نعوض $V = R.\omega$ في العبارة السابقة فنجد:

$$E_c = \frac{1}{2}.m.(R.\omega)^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}.\underbrace{m.R^2}_{J_\Delta}.\omega^2$$

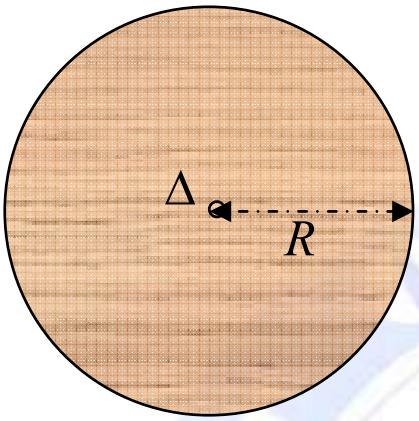
و منه نصل إلى عبارة الطاقة الحركية الدورانية لنقطة مادية:

$$E_c = \frac{1}{2} . J_\Delta . \omega^2$$

يمثل المقدار J_Δ عزم عطالة النقطة المادية بالنسبة للمحور (Δ) ، و (ω) تمثل السرعة الزاوية للنقطة المادية و تقدر في جملة الوحدات الدولية بـ rad / s

6 – 2 – حالة جسم صلب:

الجسم الصلب يتكون من مجموعة من النقط المادية. عندما يدور الجسم الصلب حول محور ثابت كل النقط التي تشكله تدور بنفس السرعة الزاوية، بينما تختلف السرعة الخطية من نقطة مادية لأخرى حسب نصف قطرها بالنسبة لمحور الدوران.



1 – أعط عبارة كل النقط المادية التي تشكل الجسم الصلب

2 – باعتبار أن الطاقة الحركية للجسم الصلب هي مجموع الطاقات الحركية الدورانية التي تشكل الجسم الصلب، استنتج عبارة الطاقة الحركية الدورانية للجسم الصلب.

تحليل النشاط:

1 – الجسم الصلب يتكون من مجموعة من النقط المادية كلها تدور بنفس السرعة الزاوية و لكن لكل نقطة كتلتها الخاصة بها و بعدها (R) عن محور الدوران الذي يميزها، و بالتالي لكل نقطة عزم عطالة (J_Δ) خاص بها.

النقطة المادية رقم (1): $$E_c = \frac{1}{2}.(J_\Delta)_1.\omega^2$$

النقطة المادية رقم (2): $$E_c = \frac{1}{2}.(J_\Delta)_2.\omega^2$$

النقطة المادية رقم (n): $$E_c = \frac{1}{2}.(J_\Delta)_n.\omega^2$$

2 – الطاقة الحركية للجسم الطلب هي مجموع الطاقات الحركية لمختلف النقط المادية التي تشكله:

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}.(J_\Delta)_i.\omega^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_\Delta.\omega^2}$$

حيث (J_Δ) يمثل عزم عطالة الجسم الصلب بالنسبة للمحور (Δ).

7 – الطاقة الكامنة المرونية لنواس الفتل

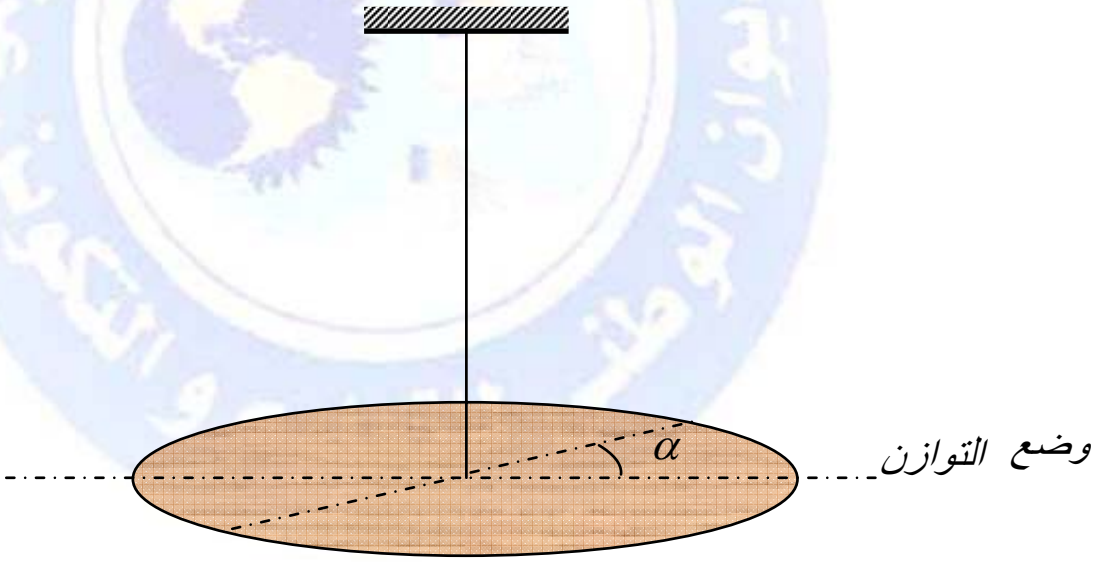
نشاط:

الهدف من هذا النشاط هو الوصول إلى عبارة الطاقة الكامنة المرونية لنواس الفتل:

نأخذ جسم صلب عبارة قرص مملوء، عزم عطالته بالنسبة لمركز كتلته هو $J_\Delta = \frac{1}{2} m.R^2$.

قيمة عزم العطالة هي : $J_\Delta = 2.10^{-2}\,\mathrm{Kg.m^2}$. نعلق هذا الجسم من مركز كتلته بواسطة سلك قابل للفتل ثابت فتله $C = 2.10^{-3}\,\mathrm{N.m/rad}$ ثم نعلق السلك من طرفه الآخر في نقطة ثابتة كما هو مبين على الشكل.

ندير الجسم في مستوي أفقي بزاوية (α) فيفتل السلك. نحرر بعد ذلك الجسم فيعود إلى وضع توازنه، عند هذا الوضع نقيس السرعة الزاوية ω للقرص.



نكرر هذه التجربة من أجل عدة قيم للزاوية (α) فنحصل على الجدول التالي:

α(rad)	0,52	1,05	1,57	2,09
ω(rad/ s)	0,16	0,33	0,50	0,66
Ec (joule)				
α^2 (rad)^2				

1 – أكمل الجدول ثم أرسم البيان $\alpha^2 = f(Ec)$

2 – أعط معادلة البيان.

3 – قارن المقدار $\frac{2}{C}$ مع ميل البيان (a) ثم أكتب من جديد عبارة المنحنى البياني

4 – بتطبيق قانون مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (سلك + جسم)، أوجد العلاقة التي تربط بين الطاقة الكامنة المرونية Epe للسلك لما يكون مفتول بزاوية α و الطاق الحركية الدورانية للجسم لما يمر من وضع توازنه (عندها يكون السلك بدون فتل).

5 – استنتج عبارة الطاقة الكامنة المرونية لسلك الفتل.

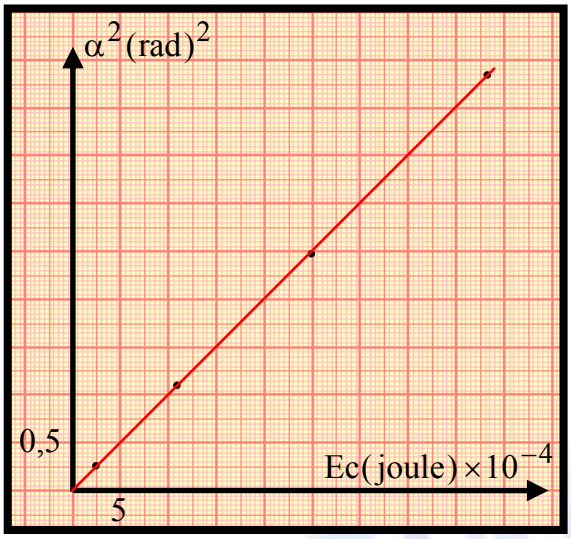
<u>الإجابة عن النشاط:</u>

1 – إكمال الجدول يكون باستعمال علاقة الطاقة الحركية الدورانية:

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta . \omega^2$$

α(rad)	0,52	1,05	1,57	2,09
ω(rad/ s)	0,16	0,33	0,50	0,66
Ec (joule)× 10^{-4}	2,6	10,9	25,0	43,6
α^2 (rad)^2	0,27	1,10	2,46	4,37

– رسم البيان $\alpha^2 = f(Ec)$.



2 – البيان عبارة عن خط مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل:

$$\alpha^2 = a.Ec$$

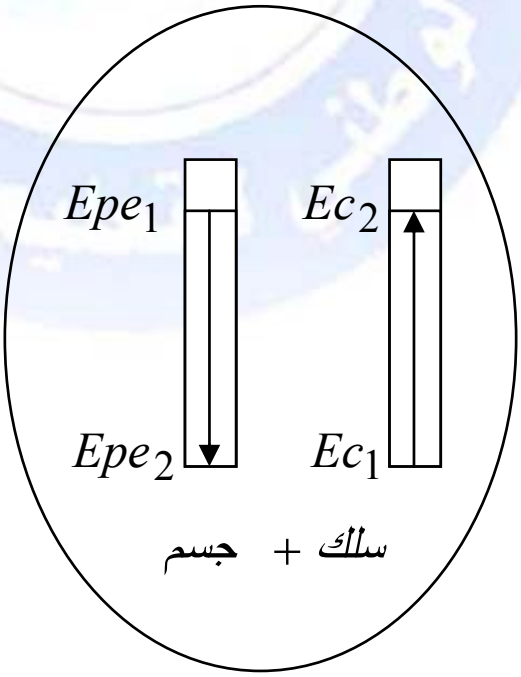
3 – مقارنة المقدار (a) مع المقدار $\frac{2}{C}$ تعطي:

$$\frac{a}{\frac{2}{C}} = \frac{1000}{\frac{2}{2.10^{-3}}} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{C}}$$

و منه تصبح معادلة البيان من الشكل التالي:

$$\boxed{\alpha^2 = \frac{2}{C}.Ec}$$

4 – بتطبيق قانون مبدا انحفاظ الطاقة على الجملة (جسم + سلك) نجد:



$$\Delta E = E_2 - E_1 = \sum \Delta Ec + \sum \Delta Ep + \sum \Delta Ei = \sum Q + \sum Wm + \sum We + \sum Er$$

$$\sum \Delta Ec + \sum \Delta Ep + 0 = 0 + 0 + 0 + 0$$

$$\Delta Ec + \Delta Epe = 0 \Rightarrow Ec_2 - Ec_1 = Epe_1 - Epe_2$$

و منه نجد:

$$Ec_2 = Epe_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

5 – استنتاج عبارة الطاقة الكامنة المرونية لنواس الفتل:

من المعادلة المستخرجة من البيان نجد:

$$\alpha^2 = \frac{2}{C}.Ec \Rightarrow$$

$$Ec = \frac{1}{2} C.\alpha^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

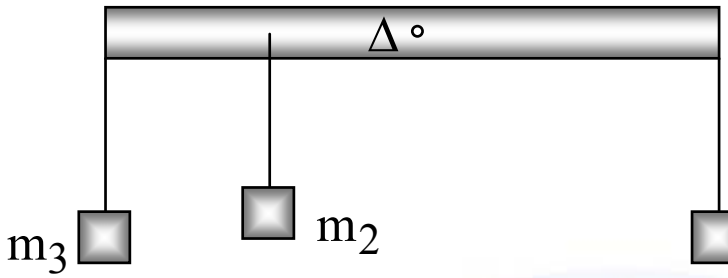
بمقارنة العبارتين (1) و (2) نجد:

$$\boxed{Epe = \frac{1}{2} C.\alpha^2}$$

تمثل هذه العبارة عبارة الطاقة الكامنة المرونية لنواس الفتل. ثابت فتل السلك هو (C) لما يكون مفتولا بزاوية (α)،

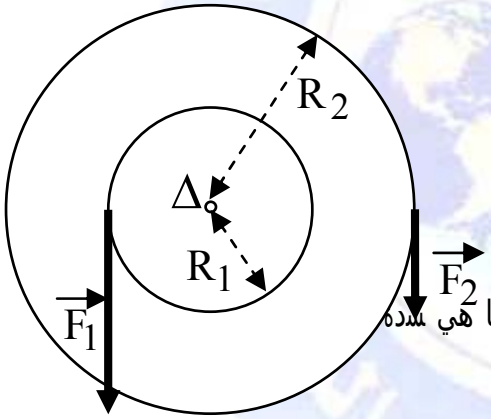
أسئلة التصحيح الذاتي

تمرين 1:



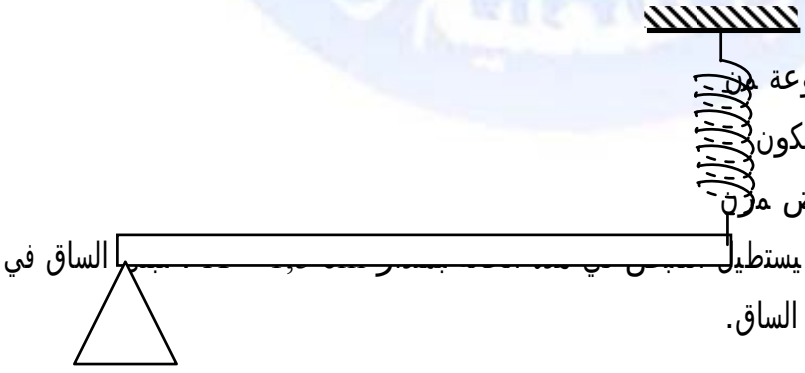
ساق متجانسة تقبل الدوران حول محور (Δ) يمر من مركز كتلتها كما هو مبين على الشكل. نعلق في هذه الساق كتل m_1 ، m_2 ، m_3 بحيث يكون $m_1 = 100\ g$ و $m_3 = 20\ g$.
ما هي قيمة الكتلة m_2 حتى لا تدور الساق حول المحور (Δ).

تمرين 2:



يمثل الشكل المقابل بكرة مركبة تتكون من أسطوانتين ملحمتين. تقبل البكرة الدوران حول المحور (Δ) الذي يجتازها من مركز كتلتها كما هو مبين على الشكل.
نصف قطر الأسطوانة الداخلية $R_1 = 10\ cm$ و نصف قطر الأسطوانة الخارجية $R_2 = 20\ cm$. نطبق قوة شدتها $F_1 = 20\ N$ مماسية على محيط الأسطوانة الداخلية . ما هي شدة القوة المطبقة على محيط الأسطوانة الخارجية حتى لا تدور البكرة؟

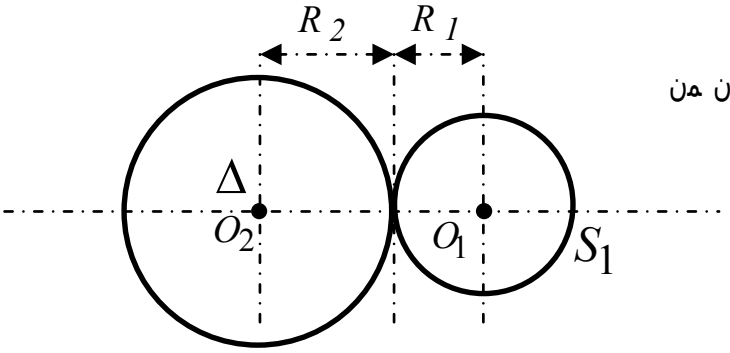
تمرين 3:



يمثل الشكل المقابل ساق موضوعة على أحد طرفيها إلى فوق حاجز و تكون معلقة من طرفها الآخر في نابض مرن ثابت مرونته $K = 20\ N/m$. يستطيل النابض في حالة توازن الساق في هذه التجربة أفقية. استنتج كتلته الساق.

تمرين 4:

يمثل الشكل المقابل جسم صلب (S) تتكون من جسمين صلبين (S_1) و (S_2) حيث :



- (S_1) عبارة عن قرص مملوء كتلته $m_1 = 100g$ و لـ ـه $R_1 = 15cm$

- (S2) قرص مملوء كتلته $m_2 = 200g$ و لـ ـه $R_2 = 25cm$

أحسب عزم عطالـ ـ ـ ـة هذه الجملة بالنسبة لمحور (Δ) عمودي على مستوي الشكل و يمر من مركز الكتلة (O_2)

تمرين 5:

دولاب، أسطواني الشكل و متجانس، نصف قطره $R = 50cm$ و كتلته $m = 2tonne$.

يخضع هذا الدولاب إبتداءا من السكون في اللحظة t_1 لمزدوجة عزمها ثابت و يساوي $M_\Delta = 3{,}5.10^3\ N.m$ فيكتسب في اللحظة t_2 سرعة مقدارها $360tr/min$.

1 – مثل الحصيلة الطاقوية الخاصة بالدولاب بين اللحظتين t_1 و t_2 .

2 – بتطبيق قانون مبدأ انحفاظ الطاقة بين هاتين اللحظتين لأوجد العلاقة التي تربط بين العما الميكانيكي للمزدوجة و الطاقة الحركية للدولاب في اللحظة t_2 .

3 – استنتج عدد الدورات التي قام بها الدولاب بين اللحظتين t_1 و t_2 .

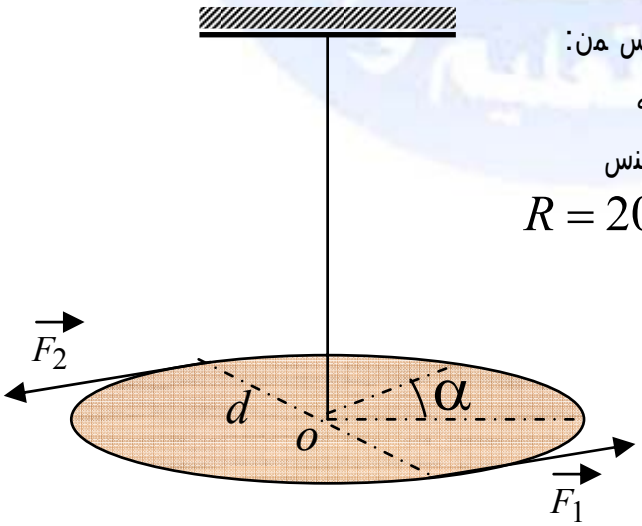
تمرين 6:

يمثل الشكل المقابل نواس فتل. يتكون هذا النواس من:

- سلك قابل للفتل معلق شاقوليا من أحد طرفيه
- جسم صلب عبارة عن قرص مملوء و متجانس كتلته $m = 400g$ و نصف قطره $R = 20cm$

معلق من مركز كتلته في الطرف الثاني للسلك

عندما ندير الساق في مستوي أفقي بزاوية α يفتل السلك بنفس الزاوية



1 – ما نوع الطاقة التي تخزن في السلك أثناء فتله.

2 – لجعل السلك يفتل بزاوية $\alpha = \frac{\pi}{6} rad$ نؤثر على الجسم الصلب بمزدوجة ثابتة في الشدة و مماسية لمحيط القرص. شدة هذه المزدوجة $F_1 = F_2 = F = 2N$ فيبقى الجسم الصلب متزن تحت تأثير كل من عزم هذه الزدوجة و عزم الفتل الموجود في سلك الفتل. استنتج ثابت فتل السلك (C)

3 – في اللحظة t_1 نحرر الجسم بدون سرعة ابتدائية و في اللحظة t_2 يمر من وضع توازنه بسرعة زاوية ω

أ / مثل الحصيلة الطاقوية الخاصة بالجملة (سلك + جسم) بين اللحظتين t_1 و t_2 .

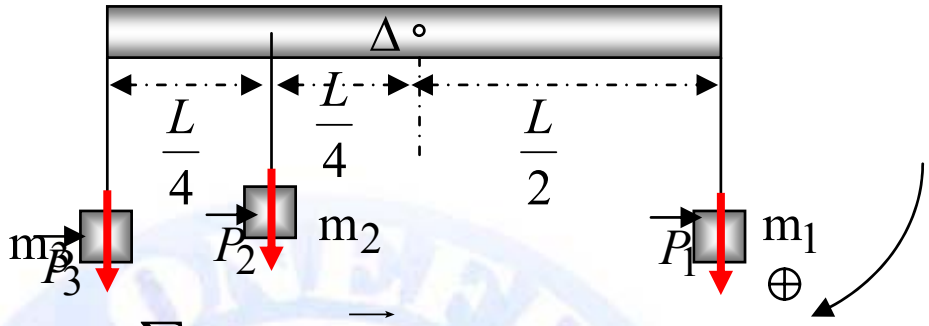
ب / أكتب قانون مبدأ انحفاظ الطاقة الخاص بهذه الجملة بين هاتين اللحظتين ثم استنتج العلاقة التي تربط بين الطاقة الكامنة المرونية لنواس الفتل في اللحظة t_1 و الطاقة الحركية للجسم في اللحظة t_2 .

جـ / استنتج قيمة السرعة الزاوية (ω)

أجوبة التصحيح الذاتـــي

تمرين 1:

عندما لا تدور الساق يكون المجموع الجبري لعزوم القوى المؤثرة على الجسم منعدما.



$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$$

$$M(\vec{P_1}) + M(\vec{P_2}) + M(\vec{P_3}) = 0$$

$$m_1 g \times \frac{L}{2} - m_2 g \times \frac{L}{4} - m_3 g \times \frac{L}{4} = 0$$

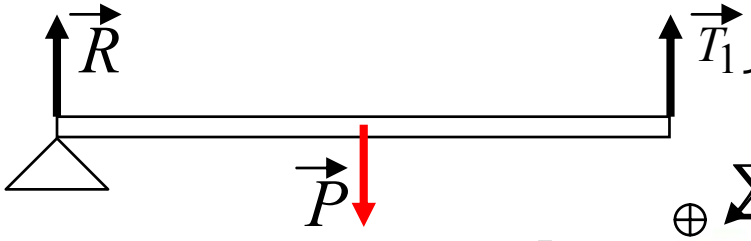
$$\boxed{m_2 = 4 \times \left(\frac{m_1}{2} - \frac{m_3}{4}\right)}$$

$$\boxed{m_2 = 180\ g}$$

تمرين 2:

بعد اجراء نفس التحليل نجد: $\boxed{F_2 = 10\ N}$

تمرين 3:



شرط توازن الساق بالنسبة لمحور الدوران

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$$

$$K.X.L = m.g.\frac{L}{2} \Rightarrow \boxed{m = 300g}$$

تمرين 4:

عزم عطالة الجملة يساوي مجموع عزوم عطالة الأجسام التي تكونها.

$$J_\Delta(S) = J_\Delta(S_1) + J_\Delta(S_2)$$

بعد هذا نطبق نظرية هويغنز من أجل كل من الأجسام التي تشكل الجسم الصلب (S)

$$J_{\Delta'} = J_\Delta + M.d^2$$

من أجل الجسم (S_1)

$$J_\Delta(S_1) = J_{O_1} + m_1.(R_1 + R_2)^2 \Rightarrow$$

$$J_\Delta(S_1) = \frac{1}{2} m_1 {R_1}^2 + m_1.(R_1 + R_2)^2$$

التطبيق العددي يعطي:

$$J_\Delta(S_1) = 1{,}7.10^{-3}\, Kg.m^2$$

من أجل الجسم (S_2)

$$J_\Delta(S_2) = J_{O_2} + m_2.d^2 \Rightarrow J_\Delta(S_1) = \frac{1}{2} m_1 {R_1}^2 + 0$$

التطبيق العددي يعطي:

$$J_\Delta(S_2) = 6{,}2.10^{-3}\, Kg.m^2$$

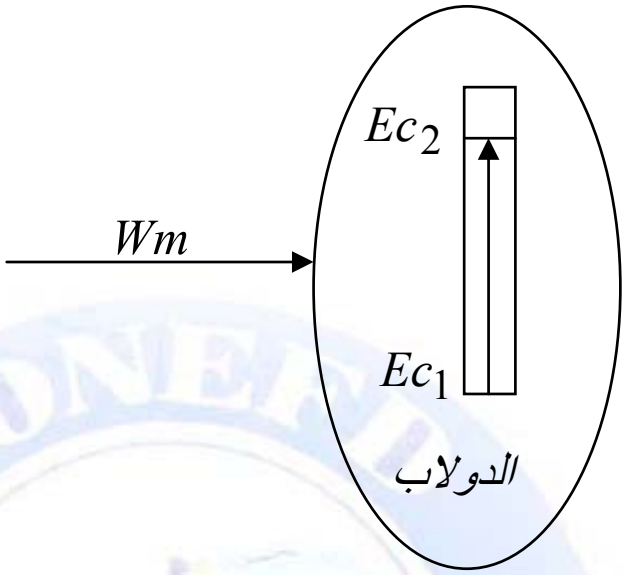
عزم عطالة الجسم الصلب (S) يكون :

$$J_\Delta(S) = J_\Delta(S_1) + J_\Delta(S_2) \Rightarrow$$

$$\boxed{J_\Delta(S) = 7{,}9.10^{-3}\, Kg.m^2}$$

تمرين 5:

1 – الحصيلة الطاقوية الخاصة بالدولاب بين اللحظتين t_1 و t_2.



2 – بتطبيق قانون مبدأ انحفاظ الطاقة :

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \sum \Delta Ec + \sum \Delta Ep + \sum \Delta Ei = \sum Q + \sum Wm + \sum We + \sum Er$$

$$\Delta Ec = Wm \Rightarrow Ec_2 - Ec_1 = Wm$$

بما أن الدولاب ينطلق من السكون إذن:

$$\boxed{Ec_2 = Wm}$$

3 – عدد الدورات التي قام بها الدولاب بين هاتين اللحظتين:

$$Ec_2 = Wm \Rightarrow \frac{1}{2} J.\omega^2 = M(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) \times \alpha$$

و منه نجد:

$$\boxed{\alpha = \frac{J.\omega^2}{2 \times M(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2})}}$$

نقوم بحساب عزم عطالة القرص:

$$J = \frac{1}{2} m.R^2 \Rightarrow J = \frac{1}{2} \times 2.10^3 \times \frac{360 \times 2 \times \pi}{60} \Rightarrow$$

$$\boxed{J = 37680 Kg.m^2}$$

نعوض في العلاقة السابقة فنجد:

$$\alpha = \frac{J.\omega^2}{2 \times M(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2})} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{37680 \times (37,68)^2}{2 \times 3,5.10^3}$$

و منه نجد: $\alpha = 7642,5rad$

هذه القيمة تمثل الزاوية التي مسحها نصف قطر الدولاب بين اللحظتين t_1 و t_2.

لمعرفة عدد الدورات نقوم بقسمة هذه القيمة على 2π فنجد: 1217 دورة

تمرين 6:

1 – الطاقة التي تخزن في السلك أثناء فتله هي طاقة كامنة مرونية.

2 – استنتاج ثابت فتل السلك

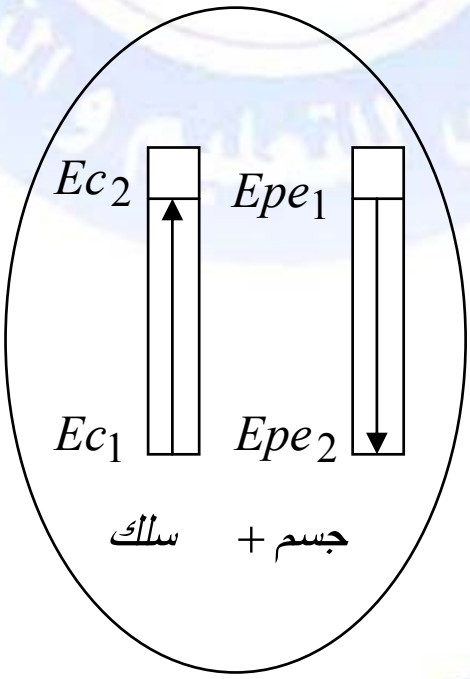
بما أن القرص في حالة توازن نكتب: $\sum M_{\Delta}(\overrightarrow{F}) = 0$

$$M(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = C.\alpha \Rightarrow F \times (2R) = C \times \alpha \Rightarrow \boxed{C = \frac{F \times (2R)}{\alpha}}$$

التطبيق العددي يعطي: $C = 1,53N.m/rad$

3 –

أ / الحصيلة الطاقوية تكون:



ب / قانون مبدأ انحفاظ الطاقة الخاص بهذه الجملة بين هاتين اللحظتين:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \sum \Delta Ec + \sum \Delta Ep + \sum \Delta Ei = \sum Q + \sum Wm + \sum We + \sum Er$$

$$\sum \Delta Ec + \sum \Delta Ep + 0 = 0 + 0 + 0 + 0$$

$$\Delta Epe = -\Delta Ec \Rightarrow Epe_2 - Epe_1 = Ec_1 - Ec_2$$

ومنه نجد:

$$\boxed{Epe_1 = Ec_2}$$

جـ / قيمة السرعة الزاوية ω

من العلاقة السابقة نجد:

$$Epe_1 = Ec_2 \Rightarrow \frac{1}{2} C.\alpha^2 = \frac{1}{2} J.\omega^2 \Rightarrow \boxed{\omega = \alpha \times \sqrt{\frac{C}{J}}}$$

نقوم بحساب عزم العطالة(J):

$J = \frac{1}{2} m.R^2$ التطبيق العددي يعطي: $J = 8.10^{-3}\, Kg.m^2$

نعوض فنجد: $\boxed{\omega = 7{,}24 rad/s}$