Université Constantine 2 Abdelhamid Mehri — Département MI

Chapitre 4 : Relations et applications

A. Kitouni — module : Algèbre 1

2015–2016

Une relation est une proposition qui lie deux éléments.

Le lien entre deux éléments peut s'exprimer sous forme d'un couple.

Les relations peuvent ainsi a priori être considérées comme des ensembles de couples, appelés graphes.

Mais cela ne suffit pas toujours, il faut aussi connaître les couples d'éléments non-liés. Cela revient à préciser dans quel produit cartésien s'inscrit la relation.

Définition

On appelle relation (ou correspondance) d'un ensemble E vers un ensemble F le triplet $R = (E, \Gamma, F)$ où Γ est une partie de $E \times F$. On note $x\mathcal{R}y$ si $(x, y) \in \Gamma$.

- E est l'ensemble de départ de $\mathcal{R}$,
- F est l'ensemble d'arrivée de $\mathcal{R}$,
- Γ est le graphe de $\mathcal{R}$.

Relation binaire

Définition

Une relation $\mathcal{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F est appelée relation binaire si et seulement si $E = F$. On dit alors que $\mathcal{R}$ est une relation binaire dans E.

Définition

Une relation binaire $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est dite

- réflexive si $\forall x \in E : x\mathcal{R}x$,

Définition

Une relation binaire $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est dite

- réflexive si $\forall x \in E : x\mathcal{R}x$,
- symétrique si $\forall (x, y) \in E^2 : x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$,

Définition

Une relation binaire $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est dite

- réflexive si $\forall x \in E : x\mathcal{R}x$,
- symétrique si $\forall (x,y) \in E^2 : x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$,
- antisymétrique si : $\forall (x,y) \in E^2 : (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \implies x = y$,

Définition

Une relation binaire $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est dite

- réflexive si $\forall x \in E : x\mathcal{R}x$,
- symétrique si $\forall (x, y) \in E^2 : x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$,
- antisymétrique si : $\forall (x, y) \in E^2 : (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y$,
- transitive si : $\forall (x, y, z) \in E^3 : (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$.

Relation d'équivalence

Définition

Une relation binaire $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est une relation d'équivalence si elle est

- réflexive ;
- symétrique ;
- transitive.

Dans ce cas, deux éléments en relation sont aussi dits équivalents.

Classe d'équivalence, ensemble quotient

Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E.

- Pour tout x de E, on appelle classe d'équivalence de x (modulo $\mathcal{R}$) l'ensemble noté $cl(x)$, $\bar{x}$, $\dot{x}$, ou encore $\hat{x}$, défini par :
$$cl(x) = \{y \in E / x\mathcal{R}y\}$$
- Tout élément de $cl(x)$ est appelé un représentant de $cl(x)$.
- On appelle ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$, et on note $E/\mathcal{R}$, l'ensemble des classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$.

Remarque

- Les classes d'équivalence constituent une partition de E : elles sont deux à deux disjointes et leurs réunion est égale à E.

Remarque

- Les classes d'équivalence constituent une partition de E : elles sont deux à deux disjointes et leurs réunion est égale à E.
- Tout élément de E appartient à une seule classe d'équivalence.

Relation d'ordre

Définition

Soit E un ensemble. Une relation binaire $\mathcal{R}$ dans E est une relation d'ordre si elle est

- réflexive,
- antisymétrique,
- transitive.

Ordre total, ordre partiel

Définition

- Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total sur un ensemble E si deux éléments x et y de E sont toujours comparables, c'est à dire : on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.
- Dans le cas contraire, on a une relation d'ordre partiel.

Exemples de relations d'ordre

- La relation d'ordre $\leq$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Exemples de relations d'ordre

- La relation d'ordre $\leq$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. C'est une relation d'ordre total.
- L'inclusion $\subset$ dans l'ensemble des partie d'un ensemble.

Exemples de relations d'ordre

- La relation d'ordre $\leq$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. C'est une relation d'ordre total.
- L'inclusion $\subset$ dans l'ensemble des partie d'un ensemble.C'est une relation d'ordre partiel.

Majorant, minorant

Définition

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Soit A une partie non vide de E.

- On dit qu'un élément x de E est un majorant de A (ou qu'il majore la partie A) si x est comparable à tous les éléments de A et si, pour tout élément a de A, on a : $a \leq x$.
- On dit qu'un élément $x \in E$ est un minorant de A (ou qu'il minore A) si x est comparable à tous les éléments de A et si, pour tout a de A, $x \leq a$.

Définition

Soit A une partie non vide d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$. On dit que A est

- Majorée si l'ensemble de ses majorants est non vide,
- minorée si l'ensemble de ses minorants est non vide,
- bornée si elle est à fois majorée et minorée. Autrement dit :

  $$A \text{ est bornée } \iff \exists (x, y) \in E, \forall a \in A, x \leq a \leq y.$$

Proposition

Soit A une partie non vide d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$. Soit α un élément de A.

- On dit que α est un élément maximum de A (ou plus grand élément de A) s'il majore A. Il n'existe au plus qu'un élément maximum de A : s'il existe, on le note $\max(A)$.
- On dit que α est un élément minimum de A(ou plus petit élément de A) s'il minore A. Il n'existe au plus qu'un élément minimum de A : s'il existe, on le note $\min(A)$.

Applications

Soit E et F deux ensembles.

Définition (Fonction)

On appelle fonction de E vers F toute relation f de E vers F telle que chaque élément de E est en relation avec au plus un élément de F.

On note alors $y = f(x)$ plutôt que xfy. On écrit aussi

$$f : E \to F \quad x \mapsto y = f(x)$$

Si $y = f(x)$, on dit que y est *l'image* de x et x est *un antécédent* de y.

Définition (Domaine de définition)

On appelle ensemble (ou domaine) de définition de la fonction f, et on note D_f ou $Def(f)$, l'ensemble des éléments x de E tels qu'il existe un élément y de F vérifiant $y = f(x)$.

Définition (Application)

On appelle application de E dans F, toute fonction

$$f : E \to F \quad x \mapsto y = f(x)$$

telle que tout élément de l'ensemble de départ a une image par f, c'est à dire que l'ensemble de départ de f est égal à son ensemble de définition.

Exemples d'applications

- On appelle *identité* ou *application identique* d'un ensemble E l'application de l'ensemble E dans lui même, qui à chaque élément x associe le même élément x.

$$Id_E : E \to E \quad x \mapsto Id_E(x) = x$$

Exemples d'applications

- On appelle *identité* ou *application identique* d'un ensemble E l'application de l'ensemble E dans lui même, qui à chaque élément x associe le même élément x.

$$Id_E : E \to E \quad x \mapsto Id_E(x) = x$$

- Soit f une application de E dans F et A est un sous-ensemble de E.

  On appelle *la restriction* de f à A, l'application de A dans F, qui à tout x de A associe $f(x)$. On la note $f_{/A}$.

- Soit A un sous-ensemble de E, et g est une application de A dans F.

  Si f est une application de E dans F, qui coïncide avec g sur A alors on dit que f est *un prolongement* de g.

- Soit A un sous-ensemble de E, et g est une application de A dans F.

  Si f est une application de E dans F, qui coïncide avec g sur A alors on dit que f est *un prolongement* de g.

- Soit E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

  On appelle application composée de f et g, et on note $g \circ f$ l'application

$$
\begin{aligned}
g \circ f : E &\to G \\
x &\to (g \circ f)(x) = g(f(x))
\end{aligned}
$$

- Soit A un sous-ensemble de E, et g est une application de A dans F.

  Si f est une application de E dans F, qui coïncide avec g sur A alors on dit que f est *un prolongement* de g.

- Soit E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

  On appelle application composée de f et g, et on note $g \circ f$ l'application

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\to G \\ x &\to (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

Remarque

La composition des applications n'est pas commutative.

Application injective

Définition

Une application f de E vers F est dite une injection (ou application injective) si deux éléments distincts de E ont pour image par f deux éléments distincts de F :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2 : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Application injective

Définition

Une application f de E vers F est dite une injection (ou application injective) si deux éléments distincts de E ont pour image par f deux éléments distincts de F :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2 : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ce qui est équivalent à

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2 : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Application surjective

Définition

Une application f de E dans F est dite une surjection (ou une application surjective) si chaque élément y de F a au moins un antécédent par f.

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x).$$

Application bijective

Définition

Une application est dite bijective (ou que c'est une bijection) lorsqu'elle est à la fois injective et surjective.

Proposition

- La composée de deux injections est une injection.
- La composée de deux surjections est une surjection.
- La composée de deux bijections est une bijection.

Application réciproque

Proposition

Soit $f : E \to F$ une application bijective. Il existe une application $g : F \to E$, telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.

Cette application est notée f^{-1} et appelée application réciproque de f.

Image directe d'un sous-ensemble

Définition (Image directe)

On appelle image directe d'un sous-ensemble A de E par f, le sous-ensemble de F, noté $f(A)$ formé par tous les éléments de F qui sont des images d'éléments de A :

$$\begin{aligned} f(A) &= \{y \in F / \exists x \in A : y = f(x)\} \\ &= \{f(x) / x \in A\} \end{aligned}$$

On appelle image de f et on note Imf, l'ensemble $f(E)$. C'est un sous-ensemble de F.

Image réciproque d'un sous-ensemble

Définition (Image réciproque)

On appelle image réciproque d'un sous-ensemble B de F par f, et on note $f^{-1}(B)$, le sous-ensemble de E formé de tous les éléments x de E dont l'image $f(x)$ par f appartient à B

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

Propriétés

Proposition

Soit $f : E \to F$, A_1, A_2 et A des parties de E et B_1, B_2 et B des parties de F. Alors :

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
2. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$, avec égalité si f est injective ;

Propriétés

Proposition

Soit $f : E \to F$, A_1, A_2 et A des parties de E et B_1, B_2 et B des parties de F. Alors :

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
2. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$, avec égalité si f est injective ;
3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
4. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;

Propriétés

Proposition

Soit $f : E \to F$, A_1, A_2 et A des parties de E et B_1, B_2 et B des parties de F. Alors :

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
2. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$, avec égalité si f est injective ;
3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
4. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
5. $f(f^{-1}(B)) \subset B$, avec égalité si f est surjective ;
6. $f^{-1}(f(A)) \supset A$, avec égalité si f est injective.