Université Constantine 2
Faculté des NTIC
Tronc commun «MI»
Algèbre I
Année 2015–2016

Solution de la troisième série d'exercices

Relations et Applications

Exercice 1

1. Pour montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, on montre que $\mathcal{R}$ est reflexive, symétrique et transitive.
   — $\mathcal{R}$ reflexive $\iff \forall z \in \mathbb{C} : z\mathcal{R}z$.
   Soit z un élément quelconque de $\mathbb{C}$, alors on a $|z| = |z|$, donc $z\mathcal{R}z$. Donc $\mathcal{R}$ est reflexive.
   — $\mathcal{R}$ est symétrique $\iff \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 : z\mathcal{R}z' \implies z'\mathcal{R}z$.
   Soit z, z' deux éléments de $\mathbb{C}$, tels que $z\mathcal{R}z'$. On a alors

$$\begin{aligned} z\mathcal{R}z' &\implies |z| = |z'| \\ &\implies |z'| = |z| \\ &\implies z'\mathcal{R}z. \end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
   — $\mathcal{R}$ est transitive $\iff \forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3 : z\mathcal{R}z' \wedge z'\mathcal{R}z'' \implies z\mathcal{R}z''$.
   Soit z, z', z'' trois éléments de $\mathbb{C}$ tels que $z\mathcal{R}z'$ et $z'\mathcal{R}z''$. Alors on a

$$\begin{aligned} z\mathcal{R}z' \wedge z'\mathcal{R}z'' &\implies |z| = |z'| \wedge |z'| = |z''| \\ &\implies |z| = |z''| \\ &\implies z\mathcal{R}z'' \end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{R}$ est transitive.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} cl(z) &= \{z' \in \mathbb{C} / z\mathcal{R}z'\} \\ &= \{z' \in \mathbb{C} / |z'| = |z|\} \end{aligned}$$

   Dans le plan complexe, $cl(z)$ représente le cercle de centre 0 et de rayon $|z|$.

Exercice 2

Dans $\mathbb{Z}$ on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \ \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}y \iff (\exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 4k)$$

Pour montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, on montre que $\mathcal{R}$ est reflexive, symétrique et transitive.

— $\mathcal{R}$ reflexive $\iff \forall x \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}x$.
Soit x un élément quelconque de $\mathbb{Z}$, alors on a $x - x = 0 = 4 \times 0$, donc $x\mathcal{R}x$. Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

— $\mathcal{R}$ est symétrique $\iff \forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$.
Soit x, y deux éléments de $\mathbb{Z}$, tels que $x\mathcal{R}y$. On a alors

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\implies \exists k \in Z : x - y = 4k \\ &\implies \exists k \in Z : y - x = -4k \\ &\implies \exists k' = -k \in Z : y - x = 4k' \\ &\implies y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

— $\mathcal{R}$ est transitive $\iff \forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$.
Soit x, y, z trois éléments de $\mathbb{Z}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Alors on a

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z &\implies \exists k \in \mathbb{Z}, \exists k' \in \mathbb{Z} : x - y = 4k \wedge y - z = k' \\ &\implies \exists k \in \mathbb{Z}, \exists k' \in \mathbb{Z} : x - z = 4(k + k') \\ &\implies \exists k'' = k + k' \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}z \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

On a :

$$\begin{aligned} cl(0) &= \{x \in \mathbb{Z}/x\mathcal{R}0\} = \{x \in \mathbb{Z}/\exists k \in \mathbb{Z} : x = 4k\}, \\ cl(1) &= \{x \in \mathbb{Z}/x\mathcal{R}1\} = \{x \in \mathbb{Z}/\exists k \in \mathbb{Z} : x = 4k + 1\}, \\ cl(2) &= \{x \in \mathbb{Z}/x\mathcal{R}2\} = \{x \in \mathbb{Z}/\exists k \in \mathbb{Z} : x = 4k + 2\}, \\ cl(3) &= \{x \in \mathbb{Z}/x\mathcal{R}3\} = \{x \in \mathbb{Z}/\exists k \in \mathbb{Z} : x = 4k + 3\}, \\ cl(4) &= \{x \in \mathbb{Z}/x\mathcal{R}4\} = \{x \in \mathbb{Z}/\exists k \in \mathbb{Z} : x = 4k + 4\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}/\exists k' \in \mathbb{Z} : x = 4k'\} = cl(0). \end{aligned}$$

De plus $cl(0) \cup cl(1) \cup cl(2) \cup cl(3) = \mathbb{Z}$, donc $cl(0)$, $cl(1)$, $cl(2)$ et $cl(3)$ sont les classes d'équivalences pour cette relation. Donc $\mathbb{Z}/R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{cl(0), cl(1), cl(2), cl(3)\}$.

Exercice 3

On définit sur $\mathbb{R}^2$: $(x,y) \ll (x',y') \iff |x'-x| \leqslant y'-y$.

1. Pour montrer que $\ll$ est une relation d'ordre, on montre qu'elle est reflexive, antisymétrique et transitive.
   — $\ll$ est reflexive $\iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \ll (x,y)$.
   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors on a $|x-x| = 0 \leqslant y-y = 0$. Donc $\ll$ est reflexive.
   — $\ll$ est antisymétrique $\iff$
   $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \ll (x',y') \wedge (x',y') \ll (x,y) \implies (x,y) = (x',y')$.
   Soit $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,y) \ll (x',y')$ et $(x',y') \ll (x,y)$, c'est à dire $|x'-x| \leqslant y'-y$ et $|x-x'| \leqslant y-y'$.
   On a d'une part $y'-y \geqslant |x'-x|$ donc $y'-y \geqslant 0$. D'autre part $y-y' \geqslant |x-x'|$ donc $y-y' \geqslant 0$, ou encore $y'-y \leqslant 0$. Donc $y'-y=0$, c'est à dire $y'=y$.
   De plus, on a : $|x'-x| \leqslant y'-y = 0$, donc $|x'-x| = 0$, d'où $x'=x$.
   Donc $\ll$ est antisymétrique.
   — $\ll$ est transitive $\iff \forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \ll (x',y') \wedge (x',y') \ll (x'',y'') \implies (x,y) \ll (x'',y'')$.
   Soit (x,y), (x',y'), $(x'',y'') \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,y) \ll (x',y')$ et $(x',y') \ll (x'',y'')$, c'est à dire $|x'-x| \leqslant y'-y$ et $|x''-x'| \leqslant y''-y'$. On a alors :
   $$\begin{aligned} |x''-x| &= |x''-x'+x'-x| \\ &\leqslant |x''-x'| + |x'-x| \\ &\leqslant y''-y'+y'-y \\ &\leqslant y''-y \end{aligned}$$
   Donc $(x,y) \ll (x'',y'')$. Donc $\ll$ est transitive.
2. L'ordre n'est pas total. Contre-exemple : $(1,2) \not\ll (3,2)$ et $(3,2) \not\ll (1,2)$.

Exercice 4

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} : (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2-1) = 3(x^2-1)+1 = 3x^2-2$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+1) = (3x+1)^2-1 = 9x^2+6x$$

Donc $g \circ f \neq f \circ g$.

Exercice 5

1. $$\begin{aligned} f \text{ est injective } &\iff \forall x_1,x_2 \in \mathbb{R} : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) \\ &\iff \forall x_1,x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Considérons $x_1 = 2$ et $x_2 = 1/2$, alors $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2) = 4/5$. Donc f n'est pas injective. (Indication : essayez de résoudre l'équation $f(x_1) = f(x_2)$.)

$$f \text{ est surjective } \iff \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y.$$

Soit $y \in \mathbb{R}$. Résolvons l'équation $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{2x}{1+x^2} \\ &\iff y + yx^2 = 2x \\ &\iff yx^2 - 2x + y = 0 \end{aligned}$$

— Si $y = 0$, on a $-2x = 0$, donc $x = 0$.
— Si $y \neq 0$, alors $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1-y)(1+y)$. Donc
  — pour $y = 1$ ou $y = -1$, on a $\Delta = 0$;
  — pour $y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, on a $\Delta < 0$;
  — pour $y \in]-1, 1[$, on a $\Delta > 0$.

Donc l'équation n'admet pas de solution pour $y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. donc f n'est pas surjective.

2. On a $f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)\}$. D'après la question précédente, l'équation $y = f(x)$ admets au moins une solution pour $y \in [-1, 1]$. Donc $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

3. Pour montrer que g est bijective, on montre que pour tout $y \in [-1, 1]$, l'équation $y = g(x)$ admet une solution *unique* dans $[-1, 1]$.

   Soit $y \in [-1, 1]$. Résolvons dans $[-1, 1]$ l'équation $y = g(x)$. De la même manière que dans la question 1, on trouve
   — Si $y = 0$, alors $x = 0$.
   — Si $y = 1$ ou $y = -1$, alors l'équation admet une solution double $x = \frac{1}{y}$.
   — Si $y \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, alors l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$:

$$x' = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y}.$$

   — On a $\left(1 + \sqrt{1-y^2}\right)^2 = 1 + (1-y^2) + 2\sqrt{1-y^2} > 1 > y^2$, donc $|x''| > 1$, donc $x'' \notin [-1, 1]$.
   — $x'x'' = (1 - 1 + y^2)/y^2 = 1$, donc $|x'| < 1$, $x' \in [-1, 1]$.

   Donc l'équation admet une solution unique dans $[-1, 1]$.

   Donc g est bijective

4. — $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   — $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
   — f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)2 - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$f'(x)$ a le même signe que $(1-x^2)$, donc $f'(x) > 0$ si $x \in]-1,1[$, et $f'(x) < 0$ si $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

— (tracer le tableau de variations)

On remarque que f est continue et strictement croissante sur $[-1,1]$, donc elle est bijective de $[-1,1]$ dans $f([-1,1])$, et d'après le tableau de variations $f([-1,1]) = [-1,1]$.

Exercice 6

1. Rappelons que pour un ensemble $B' \subset B$, $f^{-1}(B') = \{x \in A / f(x) \in B'\}$. Soit $x \in f^{-1}(B_0 \cap B_1)$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_0 \cap B_1) &\iff f(x) \in B_0 \cap B_1 \\ &\iff f(x) \in B_0 \text{ et } f(x) \in B_1 \\ &\iff x \in f^{-1}(B_0) \text{ et } x \in f^{-1}(B_1) \\ &\iff x \in f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1) \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(B_0 \cap B_1) = f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)$.

2. On n'a pas toujours l'égalité, voici un contre-exemple. Considérons l'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

$A_0 = [1,\infty[$ et $A_1 = [-\infty,-1]$, on a $f(A_0) = f(A_1) = f(A_0) \cap f(A_1) = [1,\infty[$. On a d'autre part $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ donc $f(A_0 \cap A_1) = \emptyset$.

Exercice 7

1. Supposons que $g \circ f$ est injective, c'est à dire,

$$\forall x_1, x_2 \in A : (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \implies x_1 = x_2,$$

et montrons que f est injective c'est-à-dire $\forall x \in A : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$. Soit $x_1, x_2 \in A$. Supposons que $f(x_1) = f(x_2)$ et montrons que $x_1 = x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies g(f(x_1)) = g(f(x_2)) && \text{(car } g \text{ est une application)} \\ &\implies (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ &\implies x_1 = x_2 && \text{(car } g \circ f \text{ est injective)} \end{aligned}$$

Donc f est injective.

2. Supposons que $g \circ f$ est surjective, c'est-à-dire $\forall z \in C, \exists x \in A : z = (g \circ f)(x)$ et montrons que g est surjective, c'est-à-dire $\forall z \in C, \exists y \in B : z = g(y)$.

   Soit $z \in C$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in A$ tel que $z = (g \circ f)(x)$. Posons $y = f(x)$, alors $z = g(y)$. Donc il existe un $y \in B$ tel que $z = g(y)$.

   Donc g est surjective.

3. Supposons que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, et montrons que f, g et h sont bijectives.

   D'après les questions précédentes, on déduit que f est injective, g est bijective, et h est surjective. Il reste à montrer que f est surjective et h est injective.

   Soit $y \in B$, donc $g(y) \in C$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in A$ tel que $(g \circ f)(x) = g(y)$. De plus comme g est injective, on obtient $f(x) = y$. Donc f est surjective.

   Soit $z_1, z_2 \in C$. Supposons que $h(z_1) = h(z_2)$. Comme g est surjective, il existe $y_1, y_2 \in B$ tels que $z_1 = g(y_1)$ et $z_2 = g(y_2)$. Donc $h(g(y_1)) = h(g(y_2))$. Comme $h \circ g$ est injective, on en déduit que $y_1 = y_2$, donc $g(y_1) = g(y_2)$ soit $z_1 = z_2$. Donc h est injective.

   Réciproquement, si f, g et h sont bijectives alors $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives comme composées d'applications bijectives.