Université Constantine 2 Abdelhamid Mehri — Département MI

Chapitre 3 : Ensembles

A. Kitouni — module : Algèbre 1

2015–2016

Nous ne définissons pas la notion d'ensemble dans ce cours. Nous allons simplement préciser les notations et les règles pour utiliser le langage des ensembles. Nous partons d'une notion intuitive :

un ensemble est une collection non-ordonnée d'objets tous distincts.

Définitions et notations

Voici quelques définitions et notations

- Les objets d'un ensemble E sont appelés *éléments* de l'ensemble E.

Définitions et notations

Voici quelques définitions et notations

- Les objets d'un ensemble E sont appelés *éléments* de l'ensemble E.
- Deux ensembles sont dits *égaux* s'ils ont les mêmes éléments.

Définitions et notations

Voici quelques définitions et notations

- Les objets d'un ensemble E sont appelés *éléments* de l'ensemble E.
- Deux ensembles sont dits *égaux* s'ils ont les mêmes éléments.
- Si x est un élément de l'ensemble E, on dit que x *appartient à* E ou que E *contient* x et on note $x \in E$.

  Le symbole $\in$ se lit *appartient à*.

Définitions et notations

- Si un objet x n'est pas un élément de l'ensemble E, on dit que x *n'appartient pas à* E ou que E *ne contient pas* x et on note $x \notin E$.

Définitions et notations

- Si un objet x n'est pas un élément de l'ensemble E, on dit que x *n'appartient pas à* E ou que E *ne contient pas* x et on note $x \notin E$.
- Il existe un ensemble ne contenant aucun élément, appelé ensemble vide et noté $\emptyset$ ou $\{\}$.

Définitions et notations

- Si un objet x n'est pas un élément de l'ensemble E, on dit que x *n'appartient pas à* E ou que E *ne contient pas* x et on note $x \notin E$.
- Il existe un ensemble ne contenant aucun élément, appelé ensemble vide et noté $\emptyset$ ou $\{\}$.
- Si E est un ensemble fini, on appelle *cardinal* de E, et on note $\mathrm{Card}\, E$, le nombre d'éléments de E.

Définitions et notations

Il y a essentiellement deux façons de définir un ensemble E :

- Donner la liste de tous les éléments de E, séparés par des virgules, en utilisant les accolades $\{$ et $\}$ pour délimiter l'ensemble.

Définitions et notations

Il y a essentiellement deux façons de définir un ensemble E :

- Donner la liste de tous les éléments de E, séparés par des virgules, en utilisant les accolades { et } pour délimiter l'ensemble.

  Par exemple :

  - $E_1 = \{\text{lundi}, \text{mardi}, \text{jeudi}, \text{vendredi}\}$
  - $E_2 = \{-3, -2, 0, 1, 5\}$

Définitions et notations

Il y a essentiellement deux façons de définir un ensemble E :

- Donner la liste de tous les éléments de E, séparés par des virgules, en utilisant les accolades $\{$ et $\}$ pour délimiter l'ensemble.

  Par exemple :

  - $E_1 = \{\text{lundi}, \text{mardi}, \text{jeudi}, \text{vendredi}\}$
  - $E_2 = \{-3, -2, 0, 1, 5\}$

  Cas Particulier : si x est un objet, $\{x\}$ est un ensemble à un élément, appelé aussi *singleton*.

- Donner une propriété caractérisant les éléments de E parmi ceux d'un autre ensemble connu.

$$E = \{x \in F \ / \ P(x)\}$$

Le symbole / se lit *tel que* ou encore *vérifiant*.

- Donner une propriété caractérisant les éléments de E parmi ceux d'un autre ensemble connu.

$$E = \{x \in F \ / \ P(x)\}$$

Le symbole / se lit *tel que* ou encore *vérifiant*.

Par exemple :

  - L'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à 100.

- Donner une propriété caractérisant les éléments de E parmi ceux d'un autre ensemble connu.

$$E = \{x \in F \ / \ P(x)\}$$

Le symbole / se lit *tel que* ou encore *vérifiant*.

Par exemple :

  - L'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à 100.

$$E_3 = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n < 100\}$$

- Donner une propriété caractérisant les éléments de E parmi ceux d'un autre ensemble connu.

$$E = \{x \in F \ / \ P(x)\}$$

Le symbole / se lit *tel que* ou encore *vérifiant*.

Par exemple :

  - L'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à 100.

$$E_3 = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n < 100\}$$

  - L'ensemble des nombres réels solutions de l'équation $\cos x = \sin 3x$.

- Donner une propriété caractérisant les éléments de E parmi ceux d'un autre ensemble connu.

$$E = \{x \in F \ / \ P(x)\}$$

Le symbole / se lit *tel que* ou encore *vérifiant*.

Par exemple :

  - L'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à 100.

$$E_3 = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n < 100\}$$

  - L'ensemble des nombres réels solutions de l'équation $\cos x = \sin 3x$.

$$E_4 = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \cos x = \sin 3x\}.$$

Remarque

Il est possible de remplacer le symbole / par un point-virgule, voire une virgule si l'écriture de la propriété caractérisant l'ensemble n'utilise pas de virgule. Ainsi, dans l'ensemble E_3, les notations suivantes sont admises :

$$E_3 = \{n \in \mathbb{N}; n < 100\}, \qquad E_3 = \{n \in \mathbb{N}, n < 100\}$$

Exemple

Écrire sous forme mathématique (entre accolades) les ensembles suivants :

1. L'ensemble I des nombres réels compris entre -2 et 2.
2. L'ensemble P des nombres entiers naturels pairs.
3. L'ensemble E des nombres naturels impairs strictement inférieurs à 4.

Inclusion

Soit E et F deux ensembles.

- On dit que E est un *sous-ensemble de* F et on note $E \subset F$, si tout élément de E est élément de F.

Inclusion

Soit E et F deux ensembles.

- On dit que E est un *sous-ensemble de* F et on note $E \subset F$, si tout élément de E est élément de F.
- Si $E \subset F$, on dit aussi que E est *inclus dans* F, ou bien que E est *une partie de* F, ou encore que F *contient* E (dans ce cas, on écrit aussi $F \supset E$). Le symbole $\subset$ s'appelle le signe d'inclusion.

Si A et B sont deux parties d'un ensemble E, l'inclusion $A \subset B$ s'écrit, avec des quantificateurs :

$$A \subset B \iff (\forall x \in A : x \in B)$$

ou encore

$$A \subset B \iff (\forall x \in E : x \in A \implies x \in B)$$

Remarque

1. Pour montrer l'inclusion d'ensembles $E \subset F$, on doit donc montrer une implication : on prend un élément x quelconque dans E et l'on montre que x est dans F.
2. Il ne faut pas confondre le signe d'appartenance $\in$ avec le signe d'inclusion $\subset$.

Cas particuliers

1. Tout ensemble E est inclus dans lui-même : $E \subset E$.
2. L'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble : $\emptyset \subset E$.

Inclusion et égalité

Soit E et F deux ensembles. Les ensembles E et F sont égaux lorsqu'ils possèdent les mêmes éléments, c'est-à-dire lorsque tout élément de E est dans F et tout élément de F est dans E. On a donc l'équivalence :

$$E = F \iff E \subset F \text{ et } F \subset E$$

Dans toutes les preuves où intervient l'égalité de deux ensembles E et F, on mettra bien en évidence la preuve de chacune des inclusions $E \subset F$ et $F \subset E$.

Exemple

Soit E l'ensemble des nombres réels x possédant la propriété suivante : il existe un entier $n \geq 3$ (dépendant de x) tel que $\frac{1}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}$.

Montrer que $E =]0, 1[$.

Réunion et intersection d'ensembles

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

La réunion de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble constitué des éléments qui appartiennent à au moins un des deux ensembles A ou B.

Réunion et intersection d'ensembles

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

La réunion de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble constitué des éléments qui appartiennent à au moins un des deux ensembles A ou B.

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Réunion et intersection d'ensembles

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

La réunion de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble constitué des éléments qui appartiennent à au moins un des deux ensembles A ou B.

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

L'intersection de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble constitués des éléments qui appartiennent à la fois aux deux ensembles A et B.

Réunion et intersection d'ensembles

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

La réunion de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble constitué des éléments qui appartiennent à au moins un des deux ensembles A ou B.

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

L'intersection de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble constitués des éléments qui appartiennent à la fois aux deux ensembles A et B.

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Complémentaire d'un ensemble

Soit A une partie d'un ensemble E.

Le complémentaire de l'ensemble A dans E, noté $\complement_E A$ ou $\complement A$, est l'ensemble formé des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

$$\complement_E A = \{x \in E / x \notin A\}.$$

Complémentaire d'un ensemble

Soit A une partie d'un ensemble E.

Le complémentaire de l'ensemble A dans E, noté $\complement_E A$ ou $\complement A$, est l'ensemble formé des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

$$\complement_E A = \{x \in E / x \notin A\}.$$

Si le sous-ensemble A de E est défini par la propriété P, alors son complémentaire est défini par la propriété $(\text{non } P)$.

Propriétés

- La réunion et l'intersection sont commutatives et associatives.

Propriétés

- La réunion et l'intersection sont commutatives et associatives.
- L'intersection et la réunion sont distributives chacune par rapport à l'autre.

Propriétés

- La réunion et l'intersection sont commutatives et associatives.
- L'intersection et la réunion sont distributives chacune par rapport à l'autre.
- La réunion de deux ensembles E et F est le plus petit ensemble qui contienne la fois ces deux ensembles.

Propriétés

- La réunion et l'intersection sont commutatives et associatives.
- L'intersection et la réunion sont distributives chacune par rapport à l'autre.
- La réunion de deux ensembles E et F est le plus petit ensemble qui contienne la fois ces deux ensembles.
- L'intersection de deux ensembles E et F est le plus grand ensemble qui est contenu à la fois dans ces deux ensembles.

Différence et différence symétrique de deux ensembles

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

On appelle ensemble différence entre A et B, noté $A \setminus B$, l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.

$$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

Différence et différence symétrique de deux ensembles

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

On appelle ensemble différence entre A et B, noté $A \setminus B$, l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.

$$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

La différence symétrique de deux sous-ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à un et un seul des deux sous-ensembles A et B, c'est la réunion des deux sous-ensembles $A \setminus B$ et $B \setminus A$. Cet ensemble est noté $A \Delta B$.

Produit cartésien de deux ensembles

On appelle produit cartésien de l'ensemble E par l'ensemble F, l'ensemble noté $E \times F$ des couples (x, y) tels que x appartient à E et y appartient à F.

$$E \times F = \{(x, y)/x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Produit cartésien de deux ensembles

On appelle produit cartésien de l'ensemble E par l'ensemble F, l'ensemble noté $E \times F$ des couples (x, y) tels que x appartient à E et y appartient à F.

$$E \times F = \{(x, y)/x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Remarque

- $E \times F \neq F \times E$.
- $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$.

Ensemble des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble.

L'ensemble des parties de l'ensemble E, noté $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble de tous les sous ensembles de E.

Ensemble des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble.

L'ensemble des parties de l'ensemble E, noté $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble de tous les sous ensembles de E.

Exemple

Si $E = \{1, 2\}$ alors

Ensemble des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble.

L'ensemble des parties de l'ensemble E, noté $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble de tous les sous ensembles de E.

Exemple

Si $E = \{1, 2\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Exemple

Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Calculer $A \cup B$, $A \cap B$, $\complement_E B$, $A \setminus B$ et $A \Delta B$.

Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{4, 5\}$.

Calculer $E \times F$, $F \times E$, $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(F)$.