Université Constantine 2
Faculté des NTIC
Tronc commun «MI»
Algèbre I
Année 2015–2016

Corrigé type de l'interrogation

Exercice 1 (2 pts)

$$\begin{aligned}&\text{non } (\exists! x \in \mathbb{R} : e^x = 1)\\ &\iff (\forall x \in \mathbb{R} : e^x \neq 1) \ \text{ ou } \ (\exists x_1 \in \mathbb{R}, \exists x_2 \in \mathbb{R} : x_1 \neq x_2 \text{ et } e^{x_1} = 1 \text{ et } e^{x_2} = 1)\end{aligned}$$

Exercice 2 (6 pts)

1. $$\mathrm{P}(1) : 1 \times 2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{3} \qquad \text{(0,5 pt)}$$
   et
   $$\mathrm{P}(2) : 1 \times 2 + 2 \times 3 = \frac{2 \times 3 \times 4}{3} \qquad \text{(0,5 pt)}$$
2. — On a $1 \times 2 = 2$ et $\frac{1\times2\times3}{3} = 2$ donc $\mathrm{P}(1)$ est vraie. (0,5 pt)
   — On a $1 \times 2 + 2 \times 3 = 2 + 6 = 8$ et $\frac{2\times3\times4}{3} = 8$ donc $\mathrm{P}(2)$ est vraie. (0,5 pt)
3. $\mathrm{P}(n+1) : 2 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3}{3}$. (1 pt)
4. Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant 1 : \mathrm{P}(n)$.
   — On a $\mathrm{P}(1)$ est vraie.
   — Pour $n \geqslant 1$, supposons que $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est à dire
   $$1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
   et montrons que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie c'est-à-dire
   $$1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$
   $$\begin{aligned}1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + (n+1)(n+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)\\ &= (n+1)(n+2)(\frac{n}{3} + 1)\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.\end{aligned}$$
   D'après le principe de raisonnement par récurrence on a $\forall n \geqslant 1 : \mathrm{P}(n)$. (3 pts)

Exercice 3 (9 pts)

1. a) $A \subset D$; $A = E$; $B \subset G$; $E \subset D$; $F \subset G$. (5 × 0,5 pt)

   b) $\text{Card}\,A = 3$; $\text{Card}\,B = 2$; $\text{Card}\,C = 1$; $\text{Card}\,D = 4$;
   $\text{Card}\,E = 3$; $\text{Card}\,F = 2$; $\text{Card}\,G = 3$; $\text{Card}\,H = 3$. (8 × 0,25 pt)

   c) $A \cap B = \{5\}$; (0,5 pt)
   $G \cup H = \{\{1,2\},\{5\},\{1\},\{2\},5\}$; (0,5 pt)
   $E \backslash G = \{1,2\}$; (1 pt)

   d) $\complement_D A = \{\emptyset\}$ (1 pt)

2. Ces notations ne désignent pas le même ensemble :
   — $\emptyset$ est l'ensemble vide.
   — $\{\emptyset\}$ est l'ensemble qui contient un seul élément qui est l'ensemble vide.
   — $\{\{\emptyset\}\}$ est l'ensemble qui contient un seul élément qui est l'ensemble qui a pour seul élément l'ensemble vide. (1,5 pt)