Université Constantine 2 Abdelhamid Mehri
Faculté des NTIC, Tronc commun «MI»
Algèbre I
Année 2015–2016

Quatrième série d'exercices

Structures algébriques

Exercice 1

Considérons l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'addition, la multiplication et la composition d'applications comme suit

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R} : (f + g)(x) = f(x) + g(x);$$
$$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R} : (f.g)(x) = f(x)g(x);$$
$$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R} : (g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

1. Montrer que la composition des applications est associative.
2. Montrer que la composition des applications n'est pas distributive par rapport à l'addition des applications.
3. Montrer que la multiplication des applications est distributive par rapport à l'addition des applications.

Exercice 2

Soit les lci $\oplus$ et $\otimes$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \oplus y = x + y - 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \otimes y = x + y - xy$$

1. La loi $\oplus$
   a) est-elle associative ?
   b) est-elle commutative ?
   c) admet-elle un élément neutre ?
2. La loi $\otimes$
   a) est-elle associative ?
   b) est-elle commutative ?

c) admet-elle un élément neutre ?

3. Montrer que $\oplus$ confère à $\mathbb{R}$ une structure de groupe commutatif.
4. Qu'en est-il de $\otimes$?
5. Montrer que $\otimes$ est distributive par rapport à $\oplus$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = x^n$.

1. Montrer que f est un endomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, \times)$.
2. Déterminer l'image et le noyau de f.

Exercice 4

Soit

$$A = \left\{ \frac{m}{2^n} \Big/ m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}$$

1. Montrer que A est un sous anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
2. Quels en sont les éléments inversibles ?