Université Constantine 2 Abdelhamid Mehri — Département MI

Chapitre 2
Langage et raisonnement en mathématiques

A. Kitouni — module : Algèbre 1

2015–2016

En mathématique, il y a deux processus fondamentaux :

En mathématique, il y a deux processus fondamentaux :

1. construire des objets mathématiques (nombres, fonctions, figures géométriques, ...) ;

En mathématique, il y a deux processus fondamentaux :

1. construire des objets mathématiques (nombres, fonctions, figures géométriques, ...) ;
2. établir des relations entre ces objets ; les relations sont soit supposées vraies (axiomes), soit déduites des axiomes et de relations établies précédemment au moyen d'un raisonnement logique (théorèmes).

Les deux principales règles sont :

1. **La précision du langage** Les mathématiques, comme toutes les autres sciences, sont formulées en langage courant. Mais il est important d'expliciter, pour chaque mot correspondant à une notion mathématique, le sens précis qui lui a été donné et qui peut être différent de celui du langage courant.
2. **La rigueur des raisonnements** Chaque étape du chemin qui nous mène d'affirmations considérées comme vraies (hypothèses) à la conclusion doit être justifiée par un théorème précédent, une définition, un axiome ou une règle de calcul.

Un peu de vocabulaire

Voici quelques mots et expressions qu'on utilise très souvent dans un texte mathématique :

- Une *définition* est un énoncé qui introduit un nouvel objet ou notion mathématique.

Un peu de vocabulaire

Voici quelques mots et expressions qu'on utilise très souvent dans un texte mathématique :

- Une *définition* est un énoncé qui introduit un nouvel objet ou notion mathématique.
- Un *théorème* est un énoncé mathématique établi par une démonstration.

- Le mot *proposition* est employé à la place du mot théorème lorsque l'énoncé à prouver n'est pas très difficile ou fondamental.

- Le mot *proposition* est employé à la place du mot théorème lorsque l'énoncé à prouver n'est pas très difficile ou fondamental.

Remarque

En logique mathématique, le mot *proposition* a le même sens que que le mot *assertion*.

- Le mot *proposition* est employé à la place du mot théorème lorsque l'énoncé à prouver n'est pas très difficile ou fondamental.

Remarque

En logique mathématique, le mot *proposition* a le même sens que que le mot *assertion*.

- Un *corollaire* est un énoncé qui se déduit facilement d'un théorème ou d'une proposition.

- Le mot *proposition* est employé à la place du mot théorème lorsque l'énoncé à prouver n'est pas très difficile ou fondamental.

Remarque

En logique mathématique, le mot *proposition* a le même sens que que le mot *assertion*.

- Un *corollaire* est un énoncé qui se déduit facilement d'un théorème ou d'une proposition.
- Un *lemme* est un énoncé préliminaire à la preuve d'un théorème ou d'une proposition.

Remarquons aussi que, pour la correction du langage, toutes les lettres utilisées dans un texte mathématique pour désigner des objets mathématiques doivent être explicitement introduites.

Remarquons aussi que, pour la correction du langage, toutes les lettres utilisées dans un texte mathématique pour désigner des objets mathématiques doivent être explicitement introduites.

Les énoncés qui définissent ou nomment un objet mathématique sont en général de la forme suivante :

- Soit x un nombre réel.
- Notons ε un nombre réel strictement positif.
- Considérons une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
- Soit a et b deux nombres complexes, posons $c = a - b$.

Les méthodes de raisonnement

En général, on a des objets donnés dans l'énoncé, des hypothèses (c'est-à-dire des propriétés de ces objets qui sont supposées vraies), et il s'agit de démontrer un but, qui est une propriété que l'on doit établir et qui concerne ces mêmes objets, à l'aide des hypothèses et des propriétés déjà connues.

La question est : *comment s'y prendre pour aboutir au but à partir des hypothèses ?*

Toutes les démonstrations ne se réduisent pas à des automatismes, il n'y a pas de méthode systématique : pour chaque problème on essaye de trouver et d'appliquer la méthode de démonstration qui convient.

Raisonnement direct

Raisonnement direct

Le raisonnement direct consiste à montrer une implication. C'est la méthode de raisonnement la plus fréquente et on la préfère, chaque fois que possible. Pour démontrer l'implication $(P \implies Q)$, on suppose que P est vraie et on démontre Q (que Q est vraie).

Raisonnement direct

Le raisonnement direct consiste à montrer une implication. C'est la méthode de raisonnement la plus fréquente et on la préfère, chaque fois que possible. Pour démontrer l'implication $(P \implies Q)$, on suppose que P est vraie et on démontre Q (que Q est vraie).

Exemple

Soit x un nombre réel, considérons les assertions suivantes
$P(x) : |x| < 0,1$ $\qquad\qquad Q(x) : |2x^2 - x| < 0,12$

Montrons l'implication « $P(x) \implies Q(x)$ »

Raisonnement par contraposée

Raisonnement par contraposée

Si on doit démontrer une assertion et si on connaît une deuxième assertion qui lui est équivalente et qui est plus facile à démontrer, alors il suffit de démontrer cette deuxième assertion.

Or on sait qu'une implication est équivalente à sa contraposée. On peut donc remplacer une implication $(P \implies Q)$ par sa contraposée $(nonQ \implies nonP)$ si celle-ci est plus facile à démontrer. On dit alors qu'on raisonne par contraposée.

Raisonnement par contraposée

Si on doit démontrer une assertion et si on connaît une deuxième assertion qui lui est équivalente et qui est plus facile à démontrer, alors il suffit de démontrer cette deuxième assertion.

Or on sait qu'une implication est équivalente à sa contraposée. On peut donc remplacer une implication $(P \implies Q)$ par sa contraposée $(nonQ \implies nonP)$ si celle-ci est plus facile à démontrer. On dit alors qu'on raisonne par contraposée.

Exemple

Soit x_1 et x_2 dans $[1, 2]$, et la fonction $x \mapsto f(x) = x^2$. Nous voulons démontrer l'implication suivante :

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Raisonnement par l’absurde

Raisonnement par l'absurde

C'est une méthode de démonstration qu'on utilise très souvent. Le principe de cette méthode est le suivant : On veut démontrer qu'une assertion P est vraie. On suppose que P est fausse. Si on arrive alors à en déduire une assertion fausse (on trouve une contradiction), on doit conclure que P est vraie.

Raisonnement par l'absurde

C'est une méthode de démonstration qu'on utilise très souvent. Le principe de cette méthode est le suivant : On veut démontrer qu'une assertion P est vraie. On suppose que P est fausse. Si on arrive alors à en déduire une assertion fausse (on trouve une contradiction), on doit conclure que P est vraie.

Exemple

Montrons que le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Utiliser un contre-exemple

Utiliser un contre-exemple

Un contre-exemple permet de montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E : P(x)$ » est fausse.

Utiliser un contre-exemple

Un contre-exemple permet de montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E : P(x)$ » est fausse.

Exemple

Soit a, b, c et d des nombres réels tels que $a \leq b$ et $c \leq d$, a-t-on toujours $ac \leq bd$?

Raisonnement par disjonction des cas

(ou raisonnement cas par cas)

Raisonnement par disjonction des cas

(ou raisonnement cas par cas)

Lorsque on veut démontrer une implication $P \implies Q$ et que l'hypothèse P s'écrit $P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$, alors on peut montrer que $(P_1 \implies Q) \wedge \cdots \wedge (P_n \implies Q)$.

Ce type de preuve apparaît par exemple dans les problèmes dépendant d'un paramètre.

Raisonnement par disjonction des cas

(ou raisonnement cas par cas)

Lorsque on veut démontrer une implication $P \implies Q$ et que l'hypothèse P s'écrit $P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$, alors on peut montrer que $(P_1 \implies Q) \wedge \cdots \wedge (P_n \implies Q)$.

Ce type de preuve apparaît par exemple dans les problèmes dépendant d'un paramètre.

Exemple

Soit x et y deux nombres réels. Montrons que

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

Raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une propriété qui dépend de l'entier naturel n, définie pour $n \geq 0$ ou pour $n \geq n_0$, où n_0 est un entier donné. Par exemple :

$$P(n) : 2^n + 3 \geq n^2, \qquad P(n) : n! \geq 3^n$$

La méthode de raisonnement qui convient ici est le raisonnement par récurrence dont voici le principe :

Principe du raisonnement par récurrence

Soit P une propriété dépendant d'un entier naturel n, et soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si :

- $P(n_0)$ est vraie.
- Pour chaque entier $k \geq n_0$ on a l'implication : $P(k) \implies P(k+1)$.

Alors pour tout entier naturel $n \geq n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie.

Remarque

Pour démontrer certaines propriétés, il est nécessaire d'utiliser une variante du principe de récurrence appelé la récurrence forte (dans la condition 2, on suppose que la propriété est vraie de l'étape initiale jusqu'à l'étape k)

Remarque

Pour démontrer certaines propriétés, il est nécessaire d'utiliser une variante du principe de récurrence appelé la récurrence forte (dans la condition 2, on suppose que la propriété est vraie de l'étape initiale jusqu'à l'étape k)

Exemple

Pour quels entiers naturels n a-t-on « $2^n \leq n!$ » ?