المستقيم في المستوى

I- معلم مستوى (تذكير و اضافات)

1- أنشطة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$،

نعتبر النقط $A(1;2)$ و $B(-3;-1)$ و $C(3;-2)$ ومتجهتين $\vec{u}(-2;3)$ و $\vec{v}(2;4)$.

1- أنشئ النقط A و B و C و المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

2- حدد زوج إحداثيتي كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $2\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$

3- حدد زوج إحداثيتي D حيث $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$

4- حدد زوج إحداثيتي I منتصف $[AB]$

2- شرط استقامية متجهتين

أ- محددة متجهتين

تعريف

لتكن $\vec{u}(x;y)$ و $\vec{v}(x';y')$ متجهتين

العدد $xy'-x'y$ يسمى محددة المتجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ (في هذا الترتيب) نرمز له بـ $\det(\vec{u};\vec{v})$ أو $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

نكتب $\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-x'y$

مثال نعتبر $\vec{u}(-2;3)$ و $\vec{v}(2;4)$ و $\vec{w}(-5;0)$

حدد $\det(\vec{u};\vec{v})$ و $\det(\vec{u};\vec{w})$

ب- لتكن $\vec{u}(x;y)$ و $\vec{v}(x';y')$ غير منعدمتين

* $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان تكافئ $\vec{u}=k\vec{v}$

تكافئ $x=kx'$ و $y=ky'$

ومنه $xy'-x'y=kx'y'-kx'y'=0$

نفترض $xy'-x'y=0$ و $x'\neq 0$

* نضع $\frac{x}{x'}=k$ ومنه $x=kx'$

و بالتالي $xy'-x'y=0$ تكافئ $y=ky'$

إذن $\vec{u}=k\vec{v}$

إذا كان $\vec{u}$ أو $\vec{v}$ منعدما فان $xy'-x'y=0$

خاصية

تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا وفقط إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v})=0$

تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين إذا وفقط إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v})\neq 0$

مثال

لتكن $\vec{u}(\sqrt{2}+1;1)$ و $\vec{v}(1;\sqrt{2}-1)$ و $\vec{w}(-1;\sqrt{2})$

أدرس استقامية $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ثم $\vec{u}$ و $\vec{w}$

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$،

نعتبر النقط $A\left(\frac{1}{2};3\right)$ و $B(-2;-2)$ و $C(1;4)$ ومتجهة $\vec{u}(1;3)$

5- أنشئ النقط A و B و C و المتجهة $\vec{u}$

6- حدد x حيث $\vec{u}$ و $\vec{v}(x-2;5)$ مستقيميتان

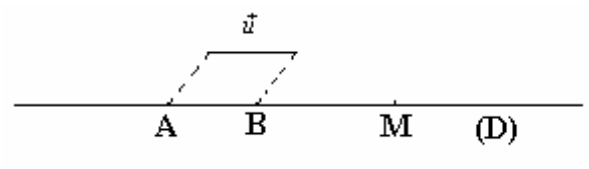
7- بين أن النقط A و B و C مستقيمية

II- المستقيم في المستوى

1- مستقيم معرف بنقطة ومتجهة

لتكن A نقطة و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة

نحدد (D) مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$; $t\in\mathbb{R}$



لنضع $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$

* $(D)\neq\varnothing$ لان $B\in(D)$

* نعلم أن $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$; $t\in\mathbb{R}$ تكافئ $M\in(AB)$

$(D)=(AB)$

(D) يسمى المستقيم المار من A و الموجه بـ $\vec{u}$

تعريف

لتكن A نقطة و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة

مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$; $t\in\mathbb{R}$ هيالمستقيم المار من A و الموجه بـ $\vec{u}$ نرمز له بـ $D(A;\vec{u})$

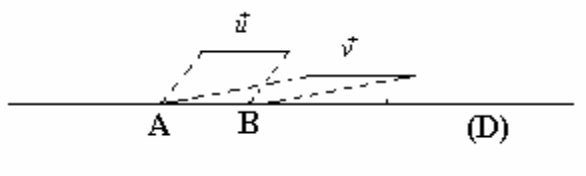
ملاحظة

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير منعدمتين

* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فان $D(A;\vec{u})=D(A;\vec{v})$

* إذا كان $B\in D(A;\vec{u})$ فان $D(A;\vec{u})=D(B;\vec{u})$

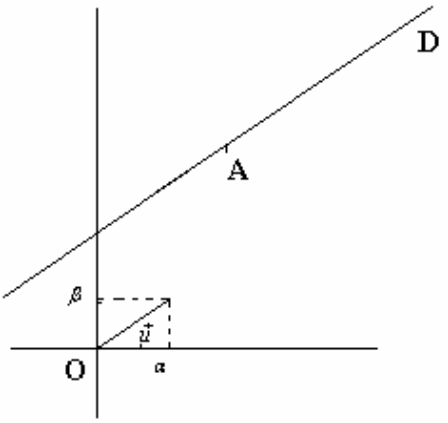
* $\overrightarrow{AB}$ موجهة للمستقيم (AB)



2- تمثيل بارامتري لمستقيم

في مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$، نعتبر (D) مستقيم

مار من النقطة $A(x_0;y_0)$ و $\vec{u}(\alpha;\beta)$ موجهة له



$M\in(D)$ تكافئ توجد t من $\mathbb{R}$ حيث $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

تكافئ $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=x_0+t\alpha\\ y=y_0+t\beta\end{cases}$

النظمة $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=x_0+t\alpha\\ y=y_0+t\beta\end{cases}$ تسمى تمثيل بارامتري

للمستقيم (D) المار من $A(x_0;y_0)$ والموجه بـ $\vec{u}(\alpha;\beta)$

مبرهنة وتعريف

المستوى منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و $\vec{u}(\alpha;\beta)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_0;y_0)$ نقطة.

كل مستقيم (D) مار من $A(x_0;y_0)$ وموجه بـ $\vec{u}(\alpha;\beta)$ له نظمة على شكل $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=x_0+t\alpha\\ y=y_0+t\beta\end{cases}$

النظمة $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=x_0+t\alpha\\ y=y_0+t\beta\end{cases}$ تسمى تمثيل بارامتري للمستقيم (D) المار من $A(x_0;y_0)$ والموجه بـ $\vec{u}(\alpha;\beta)$

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$،

نعتبر النقط $A(-2;1)$ و $B(0;-2)$ و $C(1;4)$ ومتجهتين $\vec{u}(-2;3)$ و $\vec{v}(4;-6)$.

لتكن $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=2-t \\ y=1+t \end{cases}$ تمثيلا بارامتريا لمستقيم (Δ)

1- أنشئ المستقيم (D) المار من A و الموجه بـ $\vec{u}$ و المستقيم (Δ)

2- أ- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)

ب- أعط ثلاث نقط تنتمي إلى المستقيم (D)

ج- هل النقطتين B و C تنتميان الى المستقيم (D)

3- أ- بين أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان

ب- حدد تمثيلا بارامتريا لـ $D(C;\vec{v})$. ماذا تلاحظ

4- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (AC)

ملاحظة

كل مستقيم يقبل ما لا نهاية من التمثيلات البارامترية

3- معادلة ديكارتية لمستقيم

أ- مستقيم معرف بنقطة و متجهة

في مستوى (P) منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$،

نعتبر (D) مستقيم مار من النقطة $A(x_0;y_0)$ و $\vec{u}(\alpha;\beta)$ موجهة له.

لتكن $M(x;y)$ نقطة من (P)

$M\in(D)$ تكافئ $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان

تكافئ $\begin{vmatrix} x-x_0 & \alpha \\ y-y_0 & \beta \end{vmatrix}=0$

تكافئ $\beta x-\alpha y+\alpha y_0-\beta x_0=0$

نضع $-\alpha=b$; $\beta=a$; $c=\alpha y_0-\beta x_0$

$M\in(D)$ تكافئ $ax+by+c=0$ حيث $(a;b)\neq(0;0)$

مبرهنة

في مستوى منسوب إلى معلم

كل مستقيم (D) له معادلة على شكل $ax+by+c=0$ حيث $(a;b)\neq(0;0)$.

* العكس

لتكن a و b و c اعداد حقيقية حيث $(a;b)\neq(0;0)$

لنحدد (D) مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $ax+by+c=0$

لنفرض أن $a\neq 0$

(D) غير فارغة لأن $C\left(\frac{-c}{a};0\right)\in(D)$

لتكن $A(x_0;y_0)$ تنتمي الى (D) ومنه $ax_0+by_0+c=0$

وبالتالي $c=-ax_0-by_0$

$M(x;y)\in(D)$ تكافئ $ax+by+c=0$

تكافئ $ax+by-ax_0-by_0=0$

تكافئ $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

تكافئ $\begin{vmatrix} x-x_0 & -b \\ y-y_0 & a \end{vmatrix}=0$

تكافئ $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}(-b;a)$ مستقيميتان

تكافئ $M \in D(A;\vec{u})$

مبرهنة

في مستوى منسوب إلى معلم مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $ax+by+c=0$

و$(a;b)\neq(0;0)$ هي المستقيم (D) الموجه بـ$\vec{u}(-b;a)$

المعادلة $ax+by+c=0$ حيث $(a;b)\neq(0;0)$ تسمى معادلة ديكارتية للمستقيم (D) الموجه بـ$\vec{u}(-b;a)$

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$، نعتبر النقطة $A(-2;1)$ و $\vec{u}(1;2)$.

لتكن $2x-3y+1=0$ معادلة ديكارتية لمستقيم (D) و $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=1+5t \\ y=2-2t \end{cases}$ تمثيل بارامتري لمستقيم (D')

1- حدد معادلة ديكارتية لمستقيم (Δ) مار من A و موجه بـ $\vec{u}$

2- أعط ثلاث نقط من المستقيم (D) و متجهة موجهة له.

3- حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D'). أنشئ الشكل.

ملاحظة

* لكل عدد حقيقي غير منعدم k ، المعادلتان $ax+by+c=0$ و $akx+bky+kc=0$ متكافئين، فهما معادلتان لنفس المستقيم

* للمستقيم مالا نهاية من المعادلات المتكافئة.

ب- المستقيم المعرف بنقطتين

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر $A\neq B$ إذا كان $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ فان إحدى معادلات ديكارتية لـ (AB) هي $(x-x_A)(y_B-y_A)-(y-y_A)(x_B-x_A)=0$

مثال

$A(-2;3)$ و $B(-1;-2)$ حدد معادلة (AB)

ج- حالات خاصة

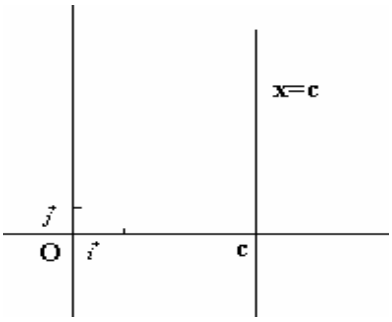
*** المستقيم القاطع لمحوري المعلم**

يقطع مستقيم (D) محوري معلم في نقطتين مختلفتين $A(a;0)$ و $B(0;b)$ إذا و فقط إذا كان للمستقيم (D) معادلة ديكارتية على شكل $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ حيث $a\neq0$ و $b\neq0$

*** المستقيم الموازي لمحور الأراتيب**

خاصية

يكون مستقيم مواز لمحور الأراتيب اذا و فقط كان له معادلة من نوع $x=c$



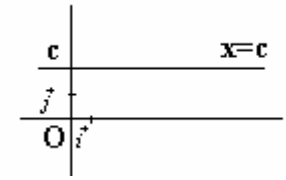
ملاحظة ليكن $(a;b)\neq(0;0)$

تكون $ax+by+c=0$ معادلة مستقيم مواز لمحور الأراتيب إذا و فقط إذا كان $b=0$

* **المستقيم الموازي لمحور الأفاصيل**

خاصية

يكون مستقيم مواز لمحور الأراتيب اذا و فقط كان له معادلة من نوع $y=c$.



* **المستقيم غير الموازي لمحور الأراتيب**

(P) مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

$(D): ax+by+c=0$

(D) غير مواز لمحور الأراتيب تكافئ $b\neq 0$

إذن معادلة (D) تصبح $y=\frac{-b}{a}x-\frac{c}{a}$

نضع $m=\frac{-a}{b}$; $p=\frac{-c}{b}$ إذن معادلة (D) تكتب $y=mx+p$

بالعكس نعتبر $y=mx+p$ معادلة (D)

ومنه $\vec{u}(1;m)$ موجهة لـ (D) و لدينا $\det(\vec{u};\vec{j})\neq 0$

إذن (D) لا يوازي محور الأراتيب.

خاصية

(P) مستوى منسوب إلى معلم

يكون المستقيم (D) غير مواز لمحور الأراتيب إذا وفقط إذا كانت معادلة (D) على شكل $y=mx+p$

العدد m يسمى المعامل الموجه للمستقيم (D)

المتجهة $\vec{u}(1;m)$ موجهة للمستقيم (D)

المعادلة $y=mx+p$ تسمى المعادلة المختزلة للمستقيم (D)

ملاحظة

اذا كان $\vec{u}(\alpha;\beta)$ موجهة لمستقيم غير مواز لمحور الأراتيب فان المعامل الموجه له هو العدد $\frac{\beta}{\alpha}$

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$،

نعتبر النقطة $A(-2;1)$ و $t\in\mathbb{R}$ $(\Delta):\begin{cases}x=1+3t\\ y=-2+t\end{cases}$.

1- حدد المعادلة المختزلة للمستقيم (D) المار من A و معامله الموجه $\frac{-1}{2}$.

2- حدد المعامل الموجه للمستقيم (Δ) ثم معادلته المختزلة.

III - الأوضاع النسبية لمستقيم

1- التوازي

$(D_1): ax+by+c=0$; $(D_2): a'x+b'y+c'=0$

$\vec{u}(-b;a)$ موجهة لـ (D_1) و $\vec{u}'(-b';a')$ موجهة لـ (D_2)

$(D_1)//(D_2)$ تكافئ $\det(\vec{u};\vec{u}')=0$

تكافئ $ab'-a'b=0$

مبرهنة1

ليكن (P) مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و $(a;b)\neq(0;0)$ و $(a';b')\neq(0;0)$.

نعتبر $(D_1): ax+by+c=0$; $(D_2): a'x+b'y+c'=0$

$(D_1)//(D_2)$ اذا و فقط اذا كان $ab'-a'b=0$

مبرهنة2

ليكن (P) مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و $(D_1):y=mx+p \quad ; \quad (D_2):y=m'x+p'$

$(D_1)//(D_2)$ اذا و فقط اذا كان $m=m'$

مثال

$(D_1):2x-3y+4=0 \quad ; \quad (D_2):-4x+6y+1=0$

هل (D_1) و (D_2) منفصلا أم منطبقان

2- التقاطع

مبرهنة1

ليكن (P) مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و $(a;b)\neq(0;0)$ و $(a';b')\neq(0;0)$.

نعتبر $(D_1):ax+by+c=0 \quad ; \quad (D_2):a'x+b'y+c'=0$

(D_1) و (D_2) متقاطعان اذا و فقط اذا كان $ab'-a'b\neq 0$

و زوج إحداثيتي تقاطعهما هو حل النظمة $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

مبرهنة2

ليكن (P) مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و $(D_1):y=mx+p \quad ; \quad (D_2):y=m'x+p'$

(D_1) و (D_2) متقاطعان اذا و فقط اذا كان $m\neq m'$

و زوج إحداثيتي تقاطعهما هو حل النظمة $\begin{cases} y=mx+p \\ y=m'x+p' \end{cases}$

مثال

$(D_1):x+3y-5=0 \quad ; \quad (D_2):2x+y-1=0$

تأكد أن (D_1) و (D_2) متقاطعان وحدد تقاطعهما

تمرين

ليكن ABC مثلثا و I و J و K نقط حيث I منتصف $[BC]$ و $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CK}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

ننسب المستوى إلى معلم $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

1- حدد إحداثيات النقط I و J و K

2- بين أن النقط I و J و K مستقيمية

3- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (IJ) ثم حدد معادلة ديكارتية له.

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$، نعتبر النقطتين $A(-2;1)$ و $B(2;4)$ و $\vec{u}(5;2)$

و $(D):2x-3y+1=0$ و $(D_m):(m-1)x-2my+3=0$

1- حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}$

2- تأكد أن (D) و (Δ) متقاطعان و حدد تقاطعهما.

3- أ- حدد m حيث $(D)//(D_m)$

ب- حدد m حيث $B\in(D_m)$

4- أ- أنشئ المستقيمات (D_0) ; (D_1) ; (D_2)

ب – بين أن جميع المستقيمات تمر من النقطة $C\left(3;\frac{3}{2}\right)$

تمرين

نعتبر $A(10;3)$; $B(6.7)$; $C(0;2)$

حدد معادلة ديكارتية لكل متوسط للمثلث ABC

حدد زوج إحداثيتي G مركز ثقل ABC.

تمرين

ليكن $ABCD$ و $EFGH$ متوازيي الأضلاع حيث $E \in [AB)$ و $G \in [AD)$

أثبت أن المستقيمات (BG) و(ED) و (CF) اما متوازية إما متقاطعة (يمكن اعتبار المعلم $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$)